

THEORETICKÉ ŘEŠENÍ NĚKTERÝCH ÚLOH O PRÁSKOVITÝCH MATERIÁLECH

VRATISLAV HORÁLEK, Praha

Úvod

V chemii, ve fyzice, v práškové metalurgii, ve stavebnictví, v potravinářském průmyslu, ve výrobě umělých hmot, v elektrotechnice, při výrobě brusných materiálů atd. se setkáváme se sypkými práškovitými materiály. Při přejímání těchto materiálů, při rozbořech kontrolních vzorků, odebraných z výrobního procesu a pod. jsme staveni před otázky ověření některých měřitelných vlastností těchto materiálů nebo určení stupně promísení, drcení, mletí a pod. Řešení většiny těchto otázek je velmi podrobně probíráno v Hermetických metod pro určení velikosti rozměru, povrchu případně objemu částic a dále jsou podány na základě teorie matematické statistiky i nejruznější metody vyhodnocování výsledků provedených měření, popsány zásady plánování pokusů atd.

Tento článek obsahuje aplikace matematické statistiky při theoretickém řešení některých dalších úloh o práškovitých materiálech, které v citované práci [1] nejsou uvedeny. Řešení je provedeno pro případy, kdy pracujeme s volnými nepolyblivými částicemi kulovitého tvaru. Řešené úlohy jsou však současně přípravnou prací pro řešení podobných úloh pro případy, kdy pod mikroskopem případně na snímků pozorujeme pouze obrysy řezů, které jsou vedeny v různých vzdálenostech od středu kulovitých částic. Řešení těchto úloh, se kterými se setkáváme převážně v metalografii, bude uveřejněno později. Zhodnocení a rozbor metod používaných při kvantitativní metalografické analýze (planimetrická, přímková a bodová metoda) byly uvedeny v práci [2].

Přehled řešených úloh a základní předpoklady

Při zjišťování stupně promísení různých práškovitých materiálů, při sledování výrobního procesu mletí, při ověřování jakosti přejímaných zásilek těchto materiálů a pod. odbíráme vždy z určitého daného celku (vářka, dodávka a pod.) menší vzorky a na nich pod mikroskopem, pomocí fotografičských snímků a pod. hodnotíme určité kvantitativní případně kvantitativní vlastnosti

částic. Otázky, se kterými přicházíme ve styk v praxi při popsaném způsobu sledování, můžeme shrnout do těchto bodů:

- Jaká je celková plocha, kterou zaujmají pozorované plochy průmětů částic jednoho druhu na sledované ploše vzorku? — (úloha A.1).
- Jaký je celkový povrch těchto částic? — (úloha A.2).
- Jaký je celkový objem těchto částic? — (úloha A.3).
- Jaký podíl celkové plochy (celkového povrchu, celkového objemu) zaujmají pozorované částice jednoho druhu, jejichž velikost $x \leq x_0$ (kde x_0 je konst.)? — (úlohy B.1—B.3).

e) Jaký je celkový počet částic na sledované ploše vzorku? — (úloha C.1). Při řešení úloh A.1—A.3 a B.1—B.3 uvažujeme vždy oba způsoby měření, průmět) a obsah jejího průmětu. Příslušné měřicí metody budeme pokládat za známé, případně poukazyjeme na kapitoly 3 a 5 v knize [1].

Abychom mohli matematicky formulovat jednotlivé uvedené úlohy, je třeba učinit určité předpoklady o tvaru částic, o jejich rozložení na ploše vzorku, o způsobu odebrání vzorku a případně o zákonu, kterým se řídí rozdělení rozměrů částic.

Budeme předpokládat, že:

- částice mají kulovitý tvar;
- částice vzorku jsou na ploše mikroskopického sklička (případně snímku) rozloženy zcela náhodně;
- vzorek byl z výrobní dávky případně z dodávky odebrán zcela náhodně;
- rozměry částic mají rozdělení logaritmicko-normální, kterému přísluší hustota

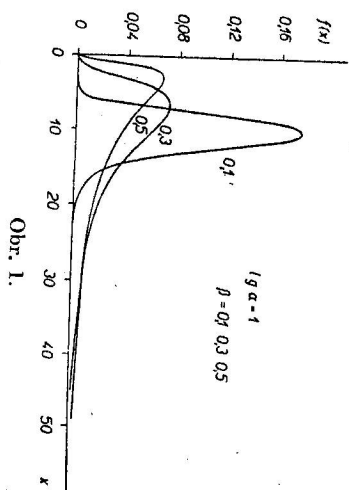
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\lg x - \lg \alpha}{\beta}\right)^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad (1)$$

kde α a β jsou parametry rozdělení, které charakterisují střední hodnotu ($\lg \alpha$) a rozptyl (β^2) logaritmů sledovaného rozměru. Předpoklad d) theoreticky zdůvodnil Kolmogorov v práci [7].

Příběhy hustoty, definované vztahem (1), pro $\lg \alpha = 1$ a $\beta = 0,1; 0,3$ a $0,5$ jsou znázorněny na obr. 1.

U částic, které vznikly drcením, mletím nebo jiným mechanickým působením, se ukazuje dobrá shoda mezi empirickým rozdělením, získaným zpracováním výsledků měření, a theoretickým rozdělením, definovaným vztahem (1). V poslední době se objevily aplikace logaritmicko-normálního rozdělení i při vyhodnocování snímků metalografických výbrusů [3]. Nutno však poznamenat, že rozdělení skutečných rozměrů zrn v materiálovém vzorku se liší od rozdělení rozměrů rovinných průřezů zrn, které zjišťujeme na rovině výbrusu [4]. S fyzikálním a matematickým hlediska je oprávněné použít logaritmicko-normálního rozdělení pouze v případě rozměrů zrn a nikoliv

rozměrů rovinných průseků zrn, jako je použito v práci [3]. Odvození rozdělení průměrů rovinných průseků zrn za předpokladu logaritmicko-normálního rozdělení průměrů zrn je podáno rovněž v práci [4].



Obr. 1.

Logaritmicko-normální rozdělení

V tomto odstavci si všimneme některých vlastností logaritmicko-normálního rozdělení, které mají význam pro další úvahy.

a) Uvažujme náhodnou proměnnou ξ , které přísluší hustota

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \beta_x x} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\lg x - \lg \alpha_x}{\beta_x} \right)^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad (1)$$

kde α_x a β_x jsou parametry, pro které platí tyto vztahy:

$$\lg \alpha_x = E(\lg \xi) = \int_0^{\infty} \lg x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \beta_x x} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\lg x - \lg \alpha_x}{\beta_x} \right)^2} dx, \quad (2)$$

$$\beta_x^2 = D^2(\lg \xi) = \int_0^{\infty} (\lg x - \lg \alpha_x)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \beta_x x} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\lg x - \lg \alpha_x}{\beta_x} \right)^2} dx. \quad (3)$$

Položme

$$\eta = h \xi^k \quad (h > 0, k > 0), \quad (4)$$

kde h a k jsou známé konstanty. Z rovnice (4) vyplývá

$$\lg x = \frac{1}{k} (\lg y - \lg h). \quad (4')$$

Platí tedy pro hustotu $\varphi(y)$ náhodné proměnné η

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \beta_y y} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\lg y - \lg \alpha_y}{\beta_y} \right)^2}, \quad (5)$$

kde vzhledem ke vztahům (2) a (3)

$$\left. \begin{aligned} \lg \alpha_y &= E(\lg \eta) = E(k \lg \xi + \lg h) = k E(\lg \xi) + \lg h = k \lg \alpha_x + \lg h, \\ \beta_y^2 &= D^2(\lg \eta) = D^2(k \lg \xi + \lg h) = k^2 D^2(\lg \xi) = k^2 \beta_x^2. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Ze srovnání vztahů (1) a (5) je zřejmé, že hustota $f(x)$ a $\varphi(y)$ jsou téhož typu. Důkaz vyplývá také přímo z charakteru lineární transformace (4').

Poněvadž transformace vyjádřená rovnicí (4) zahrnuje v sobě různé vztahy mezi délkovými, plošnými a objemovými případně vahovými vlastnostmi částic, můžeme vyslovit tuto větu:

Jestliže rozdělení délkových rozměrů částic je logaritmicko-normální, potom jsou téhož typu i rozdělení jakékoliv měřitelné vlastnosti částic, kterou lze vyjádřit vzhledem k délkovým rozměrům částic ve tvaru funkce, definované vztahem (4').

Příklad. Necht náhodná proměnná ξ nabývá hodnot x plošného obsahu průměrné částice, který stanovíme např. mikroskopicky a necht příslušná hustota $f(x)$ je definována vztahem (1), kde parametry α_x a β_x jsou předem známy nebo jejich hodnoty byly odhadnuty na základě výsledků provedených měření. Hledejme nyní hustotu, která přísluší rozdělení objemů částic kulovitého tvaru. Označíme-li η náhodnou proměnnou, která nabývá hodnot objemu částic, zřejmě pro ni platí

$$\eta = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \xi^{\frac{3}{2}}.$$

Hustota příslušná náhodné proměnné η je pak definována vztahem (5), v němž pro parametry α_y a β_y platí podle (6)

$$\lg \alpha_y = \frac{3}{2} \lg \alpha_x + \lg \frac{4}{3\sqrt{\pi}},$$

$$\beta_y^2 = \left(\frac{3}{2} \right)^2 \beta_x^2.$$

b) Stanovme nyní odhady parametrů α_x a β_x^2 rozdělení náhodné proměnné ξ metodou maximální věrohodnosti.

Nechť $x_1, x_2, \dots, x_n$ je n pozorovaných hodnot na náhodné proměnné ξ .
Potom funkce věrohodnosti pro tento náhodný výběr ze základního souboru
s neznámými parametry α_x a β_x má tento tvar

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_x, \beta_x) = \lg \prod_{i=1}^n f(x_i) = \lg \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \beta_x} \right)^n \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\lg x_i - \lg \alpha_x}{\beta_x} \right)^2} \quad (7)$$

Maximálně věrohodné odhady parametrů α_x a β_x , které označíme a_x a b_x ,
pak stanovíme řešením rovnice:

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_x, \beta_x)}{\partial \alpha_x} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_x, \beta_x)}{\partial \beta_x} = 0. \quad (9)$$

Snadno zjistíme, že platí

$$\hat{\alpha}_x = a_x = e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lg x_i}, \quad (10)$$

$$\hat{\beta}_x^2 = b_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\lg x_i - \lg \hat{\alpha}_x)^2. \quad (11)$$

Řešení jednotlivých úloh

a) Řešení úloh A.1 ÷ A.3. Uvažujeme náhodnou proměnnou ξ , které přísluší
hustota

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \beta x} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\lg x - \lg \alpha}{\beta} \right)^2}, \quad 0 < x < \infty. \quad (12)$$

Položme opět

$$g(\xi) = h \xi^k \quad (h > 0, k > 0). \quad (13)$$

Vzhledem ke vztahu (12) a (13) je střední hodnota

$$E[g(\xi)] = E(h \xi^k) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi} \beta x} h x^k e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\lg x - \lg \alpha}{\beta} \right)^2} dx. \quad (14)$$

Provedeme-li substituci

$$y = \frac{\lg x - \lg \alpha}{\beta},$$

dostáváme

$$\begin{aligned} E(h \xi^k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} h \alpha^k e^{-\frac{1}{2} (y^2 - 2ky)} dy = \\ &= \frac{h \alpha^k e^{\frac{k^2 \beta^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} (y - k\beta)^2} dy = h \alpha^k e^{\frac{k^2 \beta^2}{2}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Podle toho, jakých hodnot nabývá náhodná proměnná ξ , získává i funkce
 $g(\xi)$ při řešení úloh A.1 – A.3 různých tvarů.

Označíme-li nyní N počet částic na sledované ploše, L celkovou plochu,
kterou zaujímá na sledované ploše skříčka nebo snímků N pozorovaných
částic, P celkový povrch všech N pozorovaných částic a W objem těchto
částic, potom odhady $\hat{L}$, $\hat{P}$ a $\hat{W}$ jsou dány součinem

$$N \cdot E[g(x)], \quad (16)$$

kde hodnoty $E[g(x)]$ pro různé vyšetřované případy jsou uvedeny v tab. 1.

Tabulka 1

Náhodná proměnná ξ nabývá hodnot	L		P		W	
	$g(x)$	$E[g(x)]$	$g(x)$	$E[g(x)]$	$g(x)$	$E[g(x)]$
Průměrná x částice	$\frac{\pi x^2}{4}$	$\frac{\pi}{4} \alpha^2 e^{k^2 \beta^2}$	πx^2	$\pi \alpha^2 e^{k^2 \beta^2}$	$\frac{\pi x^3}{6}$	$\frac{\pi}{6} \alpha^3 e^{\frac{3}{2} k^2 \beta^2}$
Plošného obsahu x částice	x	$\alpha e^{\frac{k^2 \beta^2}{2}}$	$4x$	$4\alpha e^{\frac{k^2 \beta^2}{2}}$	$\frac{4}{3} \frac{x^3}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \alpha^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2} k^2 \beta^2}$

Příklad. Předpokládejme, že výsledky měření plošného obsahu průmětu
částic jsme uspořádali do skupinového rozdělení četností a že jsme vypočetli
odhady a a b parametrů α a β . Chceme-li nyní stanovit např. celkový objem
částic (při splnění předpokladů o tvaru částic a o rozdělení rozměrů částic)
dosadíme odhady a a b do vztahu (16). Zřejmě dostaneme

$$\hat{W} = N \cdot \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \alpha^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2} k^2 \beta^2}.$$

b) Řešení úloh B.1 ÷ B.3. Uvažujeme opět náhodnou proměnnou ξ , které
přísluší hustota definovaná vztahem (12) a funkci této náhodné proměnné $g(\xi)$,

definovanou vztahem (13). Pro distribuční funkci náhodné proměnné $g(\xi)$ pak platí

$$H[hx^2] = \frac{1}{\alpha^2 h} \int_0^{x_1} h x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \beta x} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\lg x - \lg \alpha}{\beta} \right)^2} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(z), \quad (17)$$

kde horní mez integrálu

$$z = \frac{\lg x_1 - \lg \alpha}{\beta} - k\beta.$$

Hodnoty distribuční funkce normálního rozdělení $\Phi(z)$ jsou tabelovány např. v [5]. Hodnoty horní meze z jsou pro různé vyšetřované případy uvedeny v tab. 2.

Tabulka 2

Náhodná proměnná ξ nabývá hodnot	L		P		W	
	$g(x)$	z	$g(x)$	z	$g(x)$	z
Průměru x částice	$\frac{\pi x^2}{4}$	$\frac{\lg x_1 - \lg \alpha - 2\beta}{\beta}$	πx^2	$\frac{\lg x_1 - \lg \alpha - 2\beta}{\beta}$	$\frac{\pi x^3}{6}$	$\frac{\lg x_1 - \lg \alpha - 3\beta}{\beta}$
Plošného obsahu x částice	x	$\frac{\lg x_1 - \lg \alpha - \beta}{\beta}$	$4x$	$\frac{\lg x_1 - \lg \alpha - \beta}{\beta}$	$\frac{4x^2}{3\sqrt{\pi}}$	$\frac{\lg x_1 - \lg \alpha - \frac{3}{2}\beta}{\frac{\beta}{2}}$

Předpokládejme, že hodnoty parametrů α a β jsou známy. Potom např. podíl p plochy, kterou zaujímají všechny částice jednoho druhu na ploše snímku směsí, při čemž obsah průmětů těchto částic je nejvýše roven x_1 , je dán hodnotou integrálu

$$p(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\lg x_1 - \lg \alpha}{\beta}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad 0 \leq p(x) \leq 1.$$

Při prosevu průškovitých materiálů se pak setkáváme s obrácenou úlohou: chceme stanovit např. podíl objemu zbytku Z zrn na sítu, jejichž průměr je větší než hodnota x_1 . Tento podíl je dán hodnotou integrálu

$$Z(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\lg x_1 - \lg \alpha}{\beta}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad 0 \leq Z(x) \leq 1.$$

Podíl objemu zrn, jejichž průměr leží v intervalu $x_a < x < x_b$, je pak dán rozdílem

$$Z(x_b) - Z(x_a).$$

c) *Řešení úlohy C.* Další úloha, se kterou se setkáváme při vyhodnocování snímků, je stanovení počtu částic na sledované ploše. Je pochopitelné, že při vyhodnocování větších ploch nestanovujeme počet částic přesně, ale odhadujeme jej na základě počtu částic zjištěných na menších plochách, jejichž velikost pokládáme za jednotku. Z okrajových částic, které neleží zcela uvnitř této dané plochy a jsou pouze protaženy hranicí této plochy, zahrnujeme do celkového počtu částic pouze ty, jejichž střed leží ještě uvnitř hranic. Úlohou nyní je stanovit odhad počtu částic na celé ploše při daném koeficientu spolehlivosti. Při řešení této úlohy budeme o částicích předpokládat, že pocházejí z homogenního celku a že tedy jejich rozměry se vzájemně velmi málo liší. Nechtě A je celková sledovaná plocha snímku. Nechtě δ je náhodná proměnná, která nabývá hodnot počtu částic d na jednotkové ploše.

Předpokládejme, že množina pevných (nepohyblivých) částic je na ploše A rozmístěna zcela náhodně a že jednotlivé části sledované plochy A jsou vzájemně nezávislé. Potom pravděpodobnost, že na jednotkové ploše náleží d nebo méně částic je obvykle vyjadřována součtem prvních $(d+1)$ členů Poissonovy exponenciely

$$P(\delta \leq d; \lambda) = \sum_{j=0}^d \frac{e^{-\lambda} \lambda^j}{j!}, \quad (19)$$

kde parametr λ určuje průměrný počet částic připadající na jednotku plochy. Očekávaný počet částic N na ploše A můžeme pak odhadnout ze vztahu

$$N = A \cdot \lambda. \quad (20)$$

Odhad neznámé hodnoty parametru λ můžeme provést dvojím způsobem: a) na základě počtu částic, které jsme zjistili při jednom náhodném položení jednotkové plochy;

b) na základě průměrného počtu částic, který jsme určili z n výsledků náhodného položení jednotkové plochy.

V obou případech pak stanovujeme tzv. intervalový odhad parametru λ při daném koeficientu spolehlivosti e .

Zabýváme se nejprve případem a). Předpokládejme, že na jednotkové ploše jsme napočítali d částic. Označme $\lambda(d, e_1, 1)$ a $\lambda(d, e_2, 1)$ dolní, resp. horní hranici intervalu spolehlivosti parametru λ při koeficientu spolehlivosti $e = 1 - 2e_2(\alpha e_1 + e_2 = 1)$. Hodnoty $\lambda(d, e_1, 1)$ a $\lambda(d, e_2, 1)$ jsou uvedeny pro hodnoty $0 \leq d \leq 100$ a $e = 0,98, 0,96, 0,90$ a $0,80$ v tab. 3, která byla napočtena autorem článku. Potom vzhledem ke vztahu (20) můžeme stanovit intervalový odhad celkového počtu N částic na ploše A s pravděpodobností e takto:

$$P(N_1 \leq N \leq N_2) = e. \quad (21)$$

Tabulka 3

d	$\varepsilon = 0,98$		$\varepsilon = 0,96$		$\varepsilon = 0,90$		$\varepsilon = 0,80$	
	$\lambda(d, \varepsilon_1, 1)$	$\lambda(d, \varepsilon_2, 1)$	$\lambda(d, \varepsilon_1, 1)$	$\lambda(d, \varepsilon_2, 1)$	$\lambda(d, \varepsilon_1, 1)$	$\lambda(d, \varepsilon_2, 1)$	$\lambda(d, \varepsilon_1, 1)$	$\lambda(d, \varepsilon_2, 1)$
0	0,00	4,61	0,00	3,91	0,00	3,00	0,00	2,30
1	0,01	6,64	0,02	5,83	0,11	4,74	0,11	3,89
2	0,15	8,41	0,21	7,52	0,30	6,30	0,53	5,32
3	0,44	10,05	0,57	9,08	0,82	7,75	1,10	6,68
4	0,82	11,60	1,02	10,58	1,37	9,15	1,75	7,99
5	1,28	13,11	1,53	12,03	1,97	10,51	2,43	9,28
6	1,79	14,57	2,09	13,44	2,61	11,84	3,15	10,53
7	2,33	16,00	2,68	14,82	3,28	13,15	3,90	11,77
8	2,91	17,40	3,31	16,17	3,98	14,44	4,66	13,00
9	3,51	18,78	3,95	17,51	4,70	15,71	5,43	14,20
10	4,13	20,14	4,62	18,83	5,43	16,96	6,22	15,40
11	4,77	21,49	5,30	20,14	6,17	18,21	7,02	16,60
12	5,43	22,82	5,99	21,43	6,92	19,44	7,83	17,78
13	6,10	24,14	6,70	22,71	7,68	20,68	8,65	18,96
14	6,78	25,46	7,42	23,98	8,46	21,90	9,47	20,13
15	7,47	26,75	8,15	25,24	9,25	23,09	10,30	21,29
16	8,2	28,0	8,9	26,5	10,0	24,3	11,1	22,5
17	8,9	29,3	9,6	27,7	10,8	25,5	12,0	23,6
18	9,6	30,6	10,4	29,0	11,6	26,7	12,8	24,7
19	10,3	31,8	11,1	30,2	12,4	27,9	13,7	25,9
20	11,1	33,1	11,9	31,5	13,2	29,1	14,5	27,0
21	11,8	34,4	12,7	32,7	14,1	30,2	15,4	28,2
22	12,6	35,6	13,5	33,9	14,9	31,4	16,2	29,3
23	13,3	36,8	14,2	35,1	15,7	32,6	17,1	30,5
24	14,1	38,1	15,0	36,3	16,5	33,8	18,9	31,6
25	14,8	39,3	15,8	37,5	17,4	34,9	18,9	32,7
26	15,6	40,5	16,6	38,7	18,2	36,1	19,7	33,8
27	16,4	41,8	17,4	39,9	19,1	37,2	20,6	35,0
28	17,2	43,0	18,2	41,1	19,9	38,4	21,5	36,1
29	18,0	44,2	19,0	42,3	20,7	39,5	22,4	37,2
30	18,7	45,4	19,9	43,5	21,6	40,7	23,2	38,3
31	19,5	46,6	20,7	44,7	22,4	41,8	24,1	39,4
32	20,3	47,8	21,5	45,8	23,3	43,0	25,0	40,5
33	21,1	49,0	22,3	47,0	24,1	44,1	25,9	41,7
34	21,9	50,2	23,1	48,2	25,0	45,3	26,8	42,8
35	22,7	51,4	23,9	49,4	25,9	46,4	27,7	43,9
36	23,5	52,6	24,8	50,5	26,7	47,5	28,6	45,0
37	24,3	53,8	25,6	51,7	27,6	48,7	29,5	46,1
38	25,1	55,0	26,4	52,9	28,5	49,8	30,4	47,2
39	25,9	56,2	27,3	54,0	29,3	51,0	31,2	48,3
40	26,8	57,3	28,1	55,2	30,2	52,1	32,1	49,4
41	27,6	58,5	28,9	56,4	31,0	53,2	33,0	50,5
42	28,4	59,7	29,8	57,5	31,9	54,3	33,9	51,6
43	29,2	60,9	30,6	58,7	32,8	55,5	34,8	52,7
44	30,0	62,1	31,5	59,8	33,7	56,6	35,7	53,8
45	30,9	63,2	32,3	61,0	34,5	57,8	36,6	54,9

Pokračování tabulky 3

d	$\varepsilon = 0,98$		$\varepsilon = 0,96$		$\varepsilon = 0,90$		$\varepsilon = 0,80$	
	$\lambda(d, \varepsilon_1, 1)$	$\lambda(d, \varepsilon_2, 1)$	$\lambda(d, \varepsilon_1, 1)$	$\lambda(d, \varepsilon_2, 1)$	$\lambda(d, \varepsilon_1, 1)$	$\lambda(d, \varepsilon_2, 1)$	$\lambda(d, \varepsilon_1, 1)$	$\lambda(d, \varepsilon_2, 1)$
46	31,7	64,4	33,2	62,1	35,4	58,9	37,6	56,0
47	32,5	65,6	34,0	63,3	36,3	60,0	38,5	57,1
48	33,4	66,7	34,9	64,4	37,2	61,1	39,4	58,2
49	34,2	67,9	35,7	65,6	38,0	62,2	40,3	59,3
50	35,0	69,1	36,6	66,7	38,9	63,3	41,2	60,3
52	36,7	71,4	38,3	69,0	40,7	65,5	43,0	62,5
54	38,4	73,7	40,0	71,3	42,5	67,7	44,8	64,7
56	40,1	76,0	41,7	73,6	44,3	70,0	46,7	66,9
58	41,8	78,3	43,4	75,9	46,1	72,2	48,5	69,0
60	43,5	80,6	45,2	78,1	47,9	74,4	50,3	71,2
62	45,2	82,9	46,9	80,4	49,6	76,6	52,1	73,3
64	46,9	85,2	48,4	82,6	51,4	78,8	54,0	75,5
66	48,6	87,5	50,4	84,8	53,2	81,0	55,8	77,7
68	50,3	89,8	52,2	87,1	55,0	83,2	57,7	79,8
70	52,0	92,1	53,9	89,4	56,8	85,4	59,5	82,0
72	53,7	94,3	55,6	91,6	58,6	87,6	61,4	84,2
74	55,5	96,6	57,4	93,8	60,4	89,8	63,2	86,3
76	57,2	98,9	59,2	96,1	62,2	92,0	65,1	88,5
78	58,9	101,1	61,0	98,3	64,1	94,2	66,9	90,6
80	60,7	103,4	62,7	100,6	65,9	96,4	68,8	92,7
82	62,4	105,7	64,5	102,8	67,7	98,6	70,6	94,9
84	64,1	107,9	66,3	105,0	69,5	100,7	72,5	97,0
86	65,9	110,1	68,1	107,2	71,3	102,9	74,3	99,1
88	67,6	112,4	69,8	109,4	73,2	105,1	76,2	101,3
90	69,4	114,7	71,6	111,6	75,0	107,2	78,1	103,4
92	71,2	116,9	73,4	113,9	76,8	109,4	79,9	105,6
94	72,9	119,1	75,2	116,1	78,7	111,6	81,8	107,7
96	74,7	121,3	77,0	118,3	80,5	113,7	83,7	109,8
98	76,5	123,6	78,8	120,5	82,3	115,9	85,5	111,9
100	78,2	125,9	80,5	122,7	84,2	118,1	87,4	114,1

kde

$$\begin{aligned} N_1 &= A \cdot \lambda(d, \varepsilon_1, 1), \\ N_2 &= A \cdot \lambda(d, \varepsilon_2, 1), \end{aligned} \quad (22)$$

Označme v případě b) pomocí d_i ($i = 1, 2, \dots, n$) počet částic zjištěný na ploše snímku při i -tém položení jednotkové plochy. Jestliže počet položení n je dostatečně velký ($n \geq 20$), můžeme určit dolní a horní hranici $\lambda(\bar{d}, \varepsilon_1, n)$ a $\lambda(\bar{d}, \varepsilon_2, n)$ intervalu spolehlivosti parametru λ při daném koeficientu spolehlivosti ε ze vztahů

$$\lambda(\bar{d}, \varepsilon_1, n) = \bar{d} - k_\varepsilon \sqrt{\frac{\bar{d}}{n}}, \quad \lambda(\bar{d}, \varepsilon_2, n) = \bar{d} + k_\varepsilon \sqrt{\frac{\bar{d}}{n}}, \quad (23)$$

kde opět $\varepsilon = 1 - 2\varepsilon_a$ a $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1$. Hodnoty k_ε jsou uvedeny v tab. 4.

Tabulka 4

ϵ	0,90	0,95	0,955	0,99	0,997
k_ϵ	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000

Velikina $\bar{d}$ je definována tímto vztahem:

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i. \quad (24)$$

Můžeme tedy vzhledem ke vztahu (20) stanovit intervalový odhad celkového počtu N částic na ploše A s pravděpodobností ϵ

$$N'_1 \leq N \leq N'_2, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} N'_1 &= A \cdot \lambda(\bar{d}, \epsilon_1, n), \\ N'_2 &= A \cdot \lambda(\bar{d}, \epsilon_2, n). \end{aligned} \quad (26)$$

Vzhledem k výsledkům (21) a (25) můžeme provést úpravu výsledků, které jsme získali při řešení úloh A.1–A.3.

Jestliže při zjišťování odhadů celkové plochy částic L , celkového objemu W a celkového povrchu P počet částic na vyhodnocované ploše snímku pouze použít ve vztahu (16) výsledků (21) a (25). Platí tedy např. pro odhad celkové plochy částic L pro případ, kdy náhodná proměnná ξ nabývá hodnot průměru částice, vzhledem k rovnici (21)

$$P \left\{ A \cdot \lambda(d, \epsilon_1, 1) \cdot \frac{\pi}{4} \alpha^2 e^{2\beta^2} \leq L \leq A \cdot \lambda(\bar{d}, \epsilon_2, 1) \cdot \frac{\pi}{4} \alpha^2 e^{2\beta^2} \right\} = \epsilon$$

a vzhledem k rovnici (25)

$$P \left\{ A \cdot \lambda(\bar{d}, \epsilon_1, n) \cdot \frac{\pi}{4} \alpha^2 e^{2\beta^2} \leq L \leq A \cdot \lambda(\bar{d}, \epsilon_2, n) \cdot \frac{\pi}{4} \alpha^2 e^{2\beta^2} \right\} = \epsilon.$$

Výpočet tabulky 3. Necht δ je náhodná proměnná, která nabývá hodnot d počtu částic, který jsme zjistili při jednom položení jednotkové plochy. Potom pravděpodobnost

$$P(\delta \leq d; \lambda) = e^{-\lambda} \left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^d}{d!} \right), \quad (27)$$

kde λ je parametr vyjadřující průměrný počet částic na jednotku plochy. Hledáme nyní pro hodnoty $0 \leq d \leq 100$ hodnoty λ takové, že

$$P(\delta \leq d - 1; \lambda) = \epsilon_1, \quad (28)$$

$$P(\delta \leq d; \lambda) = \epsilon_2, \quad (29)$$

kde pokládáme postupně $\epsilon_1 = 0,99; 0,98; 0,95; 0,90$ a $\epsilon_2 = 0,01; 0,02; 0,05; 0,10$. Hodnoty λ , které získáme řešením rovnic (28) a (29), označme $\lambda(d, \epsilon_1, 1)$ a $\lambda(d, \epsilon_2, 1)$. Jsou to tzv. dolní, resp. horní hranice intervalu spolehlivosti pro parametr λ , vypočtené na základě výběrové hodnoty d . Pro $d = 0$ dolní hranice $\lambda(d, \epsilon_1, 1) = 0$.

Řešení rovnic (28) resp. (29) lze provést tímto postupem. Poněvadž pomocí integrace per partes lze dokázat, že

$$\frac{1}{d!} \int_0^\infty t^d e^{-t} dt = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda^d}{d!} + \frac{\lambda^{d-1}}{(d-1)!} + \dots + \frac{\lambda}{1!} + 1 \right),$$

platí

$$\begin{aligned} P(\delta \leq d; \lambda) &= \frac{1}{d!} \int_0^\infty t^d e^{-t} dt, \\ &= 1 - \frac{1}{d!} \int_0^\lambda t^d e^{-t} dt. \end{aligned} \quad (31)$$

Položíme-li nyní pro výpočet dolních hranic $\lambda(d, \epsilon_1, 1)$

$$t = \frac{\lambda^2}{2}, \quad d = \frac{n}{2} - 1 \quad \text{a} \quad \lambda = \frac{\lambda_{n,1}^2}{2}$$

a pro výpočet horních hranic $\lambda(d, \epsilon_2, 1)$

$$t = \frac{\lambda^2}{2}, \quad d = \frac{n}{2} \quad \text{a} \quad \lambda = \frac{\lambda_{n,2}^2}{2},$$

můžeme vyjádřit integrály na pravé straně rovnic (30), resp. (31) pomocí distribuční funkce χ^2 -rozdělení s n stupni volnosti, která je pro procentní hodnoty λ_n^2 tabelována pro $n \leq 30$ na př. v [5]. Pro výpočet hodnot λ_n^2 pro $30 < n \leq 202$ použijeme vztahu odvozeného Wilsonem a Hilfertym, podle kterého proměnná $\left(\frac{\chi^2}{n} \right)^{\frac{1}{3}}$ má normální rozdělení $N \left(1 - \frac{2}{9n}; \sqrt{\frac{2}{9n}} \right)$. Tato aproximace je navržena např. v práci Blomové [6].

Závěr

Ve srovnání s dosud používanými vztahy pro výpočet odhadu celkové plochy, povrchu a objemu, které zaujmají částice jednoho druhu na dané ploše snímku, obsahují vzorce odvozené v tomto článku ještě parametr, který charakterizuje rozptýlení sledované vlastnosti částice. Pro případy, kdy počet částic pouze odhadujeme, jsou výsledné vztahy vyjádřeny intervalovým odhadem, který je vázán na požadovaný stupeň spolehlivosti.

LITERATURA

- [1] G. Herdan, Small particle statistics. Elsevier Publishing Company, 1963.
- [2] S. Drápal, V. Horálek, Z. Režný, Mřížkové kvantitativní metalografická analýza, Hutnické listy 1957, č. 6.
- [3] W. Dickenscheid, Une méthode de calcul des grains et son application, Metaux corrosion industries 1954, č. 341.
- [4] S. Drápal, V. Horálek, Některé vztahy mezi rovinnými a prostoroými parametry struktury materiálů (dosud nepřiblíženo).
- [5] J. Janke, Tabulky k matematické statistice, Praha 1950.
- [6] G. Blom, Transformation of the binomial, negative binomial, Poisson and χ^2 -distribution, Biometrika 1954, č. 3 a 4.
- [7] A. N. Kolmogorov, Über das logarithisch-normale Verteilungsgesetz der Dimensionen der Teilchen bei Zerkleinerung, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS 1941, č. 2. Došlo 7. 8. 1957.

Výzkumný ústav lepešné techniky, Praha.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ О ЗЕРНИСТЫХ МАТЕРИАЛАХ ВРАТИСЛАВ ГОРАЛЕК

ВЫВОДЫ

В статье дается решение случаев происходящих при установлении некоторых качественных и количественных свойств зернистых материалов на снимках или на микроскопических стеклышках.

По сравнению с отгешенными до сих пор применяемыми для вычисления оценки суммарной плоскости проекций, суммарной поверхности и суммарного объема, которые занимают зерна одного типа на плоскости снимка, выведенные в этой статье формулы содержат параметр, который характеризует дисперсию свойств зерен. О распределений диаметров зерен предполагается, что оно логарифмически нормальное.

В случаях когда количество зерен на плоскости снимка только оцениваемо, оценка дается интервалом, который зависит от определенной степени достоверности.

A THEORETICAL SOLUTION OF CERTAIN PROBLEMS ABOUT POWDER MATERIALS VRATISLAV HORÁLEK

Summary

The paper contains a solution of problems occurring in practice by the ascertainment of several qualitative and quantitative characteristics of powder materials randomly distributed over a microscope slide.

In comparison with relations till now used for computation an estimate of total area of projection, of total surface and of total volume occupied by particles of one sort on microscope slide, the formulae derived in this paper contain still a parameter, which describes the dispersion of checked quality characteristic of particles. It is assumed that the distribution of diameters of particles is logarithmicnormal.

In the cases, when the number of particles on the microscope slide is estimated, the final formulae are expressed as confidence interval in dependence on chosen confidence coefficient.