MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, VIII, 3 — 1958

POZNÁMKA K VETÁM EMMY NOETHEROVEJ

MIKULÁŠ BLAŽEK, Bratislava

V jednotlivých častiach fyziky možno odvodiť z Hamiltonovho princípu najmenšieho účinku, pri vhodne zvolenom lagrangiáne, pohybové rovnice a z ich invariančných vlastností príslušné zákony o zachovaní. Noetherová ukázala [1], za akých podmienok možno odvodiť zákony o zachovaní priamo z invariančných vlastností variačného princípu. Prednosťou tejto metódy je, že netreba odvozovať zákony o zachovaní v rôznych prípadoch osobitne, ale tieto zákony vyplývajú ako špeciálne prípady zo zákonov o zachovaní, formulovaných vo všeobecnom tvare.

Táto práca je rozdelená takto: V § 1 zavedieme označenia, ktoré používame v ďalšom. V § 2 sa zaoberáme infinitezimálnymi transformáciami. V § 3 ukážeme, ako obmedzuje lagrangián voľbu jednotlivých transformácií. V ďalších paragrafoch (§ 4, 5) odvodíme vety Noetherovej pre prípad, že lagrangián obsahuje derivácie vlnových funkcií ľubovoľného rádu. Niektorými elementárnymi príkladmi sa zaoberáme v § 6.

Starší (pôvodný) spôsob odvodenia (resp. aplikácie) viet Noetherovej možno nájsť napríklad v prácach [1], [2] a [3]. Novšie odvodenie prvej vety (pre lagrangián obsahujúci prvé derivácie vlnových funkcií) je napríklad v [4] a podobne (pre lagrangián s deriváciami druhého rádu) je v [5].

§ 1. Označenia

Priestoročasové súradnice označíme $x = x_1, y = x_2, z = x_3, t = \frac{x_4}{ic}$ a vlnové funkcie $\psi_\alpha(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, A)$. Derivácie funkcie ψ_α označíme takto:

$$\frac{\partial \psi_\alpha(x_\mu)}{\partial x_\mu} = \partial_\mu \psi_\alpha, \qquad \frac{\partial \psi'_\alpha(x'_\mu)}{\partial x'_\mu} = \partial'_\mu \psi'_\alpha;$$

$$\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_\mu} \cdot \psi_\beta = \partial_\mu \psi_\alpha \cdot \psi_\beta, \qquad \frac{\partial \psi_\alpha \psi_\beta}{\partial x_\mu} = \partial_\mu(\psi_\alpha \psi_\beta) \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4).$$

O funkciách, ktoré v tejto práci vystupujú, predpokladáme, že majú také vlastnosti, aby užívané operácie mali zmysel (stačí, keď sú uvažované funkcie spojité, konečné a jednoznačné).

Vzťah medzi účinkom S a lagrangiánom L je nasledovný

$$S = \int_Q L \,\mathrm{d}(x), \tag{1}$$

kde

$$\mathrm{d}(x) = dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 \tag{2}$$

(Q je určitá 4-rozmerná oblasť integrovania). Predpokladáme, že v lagrangiáne sa vyskytuje derivácia funkcie ψ_α rádu $\sigma = \sigma(\alpha) \equiv \sigma_\alpha$. Označíme

$$\frac{\partial^{\sigma_\alpha}\psi_\alpha}{\partial x_1^a \partial x_2^b \partial x_3^c \partial x_4^d} = \partial^{\sigma_\alpha}\psi_\alpha,$$

pritom a, b, c, d sú všetky také štvorice nezáporných celých čísiel, ktoré spĺňajú vzťah $a + b + c + d = \sigma_\alpha$ (pre dané σ_α existuje $\frac{1}{6}(\sigma_\alpha + 1)(\sigma_\alpha + 2)(\sigma_\alpha + 3)$ takýchto štvoríc). Zo zavedenia tohto označenia vyplýva $\partial^1 \equiv \partial_\mu$ a pod.

V lagrangiáne L sa môžu vyskytovať derivácie funkcie ψ_α až do rádu τ_α. Ak stotožníme nultú deriváciu funkcie so samou funkciou, prebieha index σ_α hodnotami $\sigma_\alpha = 0, 1, \ldots, \tau_\alpha$. Potom môžeme lagrangián L písať v tvare

$$L(x) = L(x_\mu, \partial^{\sigma_\alpha}\psi_\alpha), \tag{3}$$

kde $\mu = 1, 2, 3, 4$; $\alpha = 1, 2, \ldots, A$; $\sigma_\alpha = 0, 1, \ldots, \tau_\alpha$.[1]

Aplikovaním variačnej metódy na účinok (1) možno obvyklým postupom odvodiť pohybové rovnice. Ak sa obmedzíme na prípady, pri ktorých sa nemení oblasť integrovania, pričom na jej hraniciach identicky vymiznú variácie vlnových funkcií, získame Euler—Lagrangeove rovnice v tvare

$$\sum_{\sigma_\alpha = 0}^{\tau_\alpha} (-1)^{\sigma_\alpha} \partial^{\sigma_\alpha} \frac{\partial L}{\partial \partial^{\sigma_\alpha}\psi_\alpha} \equiv [L]_\alpha = 0 \tag{4}$$

($[L]_\alpha$ budeme nazývať Lagrangeovým výrazom).

§ 2. Infinitezimálne transformácie

A. Nech transformácia súradníc x_μ obsahuje konečný počet n nezávislých parametrov e_i ($i = 1, 2, \ldots, n$)

$$x_\mu \to x'_\mu = x'_\mu(x_\nu, e_i).$$

[1] Sčitovanie podľa indexu σ_α vždy explicitne vypíšeme. Pre indexy μ, ν, α, β dodržíme dohodu o sčitovaní. (Pri sčitovaní podľa indexov α, β treba sčítať cez všetky navzájom nezávislé vlnové funkcie.)

Ak tieto transformácie tvoria grupu (označíme ju G_n), môžeme v ďalšom uvažovať iba infinitezimálne transformácie

$$x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu, \tag{5}$$

kde

$$\delta x_\mu = p_{\mu i}\,\delta e_i \tag{6}$$

(pre indexy i dodržíme dohodu o sčitovaní). Funkcie $p_{\mu i}$ úplne určujú uvažované transformácie.

Infinitezimálnu transformáciu vlnových funkcií, ktorá odpovedá transformácii (5), zapíšeme v tvare

$$\psi'_\alpha(x'_\mu) = \psi_\alpha(x_\mu) + \delta\psi_\alpha, \tag{7}$$

pričom je

$$\delta\psi_\alpha = r_{\alpha i}\,\delta e_i \tag{8}$$

($r_{\alpha i}$ sú určité funkcie). Z uvedeného vidieť, že až na veličiny vyššieho rádu platí

$$\delta\psi_\alpha(x'_\mu) = \delta\psi_\alpha(x_\mu). \tag{9}$$

Pre ďalší postup je výhodné zaviesť (podľa Pauliho) tzv. lokálnu variáciu $\delta^*\psi_\alpha$ (pozri napríklad v [4]—[7]). Vzťah medzi $\delta\psi_\alpha$ a $\delta^*\psi_\alpha$ je

$$\delta\psi_\alpha = \delta^*\psi_\alpha + \partial_\nu\psi_\alpha \,.\, \delta x_\nu. \tag{10}$$

Pritom $\delta\psi_\alpha$ udáva zmenu funkcie ψ_α v dôsledku zmeny jej tvaru i zmeny jej argumentu, a $\delta^*\psi_\alpha$ udáva len zmenu tvaru funkcie ψ_α. Pre deriváciu funkcie ψ_α platí

$$\delta\partial_\mu\psi_\alpha = \delta^*\partial_\mu\psi_\alpha + \partial_\mu\partial_\nu\psi_\alpha \,.\, \delta x_\nu. \tag{11}$$

Dá sa dokázať ďalej [4], že platí

$$\partial_\mu\delta^*\psi_\alpha = \delta^*\partial_\mu\psi_\alpha.$$

V našom prípade zavedieme i transformáciu vyšších derivácií vlnových funkcií

$$\partial'^{\sigma_\alpha}\psi'_\alpha(x'_\mu) = \partial^{\sigma_\alpha}\psi_\alpha(x_\mu) + \delta\partial^{\sigma_\alpha}\psi_\alpha. \tag{12}$$

Dá sa ukázať, že pre lokálnu variáciu, zavedenú podobne ako v prípade prvej derivácie vlnovej funkcie, platí jednak

$$\delta^*\partial^{\sigma_\alpha}\psi_\alpha = \partial^{\sigma_\alpha}\delta^*\psi_\alpha \tag{13}$$

a jednak (analogicky k (11))

$$\delta\partial^{\sigma_\alpha}\psi_\alpha = \delta^*\partial^{\sigma_\alpha}\psi_\alpha + \partial^{\sigma_\alpha}\partial_\nu\psi_\alpha \,.\, \delta x_\nu. \tag{14}$$

B. Nech transformácia premenných x_μ obsahuje N ľubovoľných a nezávislých funkcií E_k a ich derivácie až do rádu τ_k, t. j. nech

$$x_\mu \to x'_\mu = x'_\mu(x_\nu, \partial^{\sigma_k} E_k), \tag{15}$$

pričom pre dané E_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ je $\sigma_k = 0, 1, \ldots, \tau_k$. (Ďalšie úvahy sa nezmenia, ak predpokladáme $E_k = E_k(x_\mu, \partial^{\sigma_\alpha}\psi_\alpha)$, [1].) Pre index k dodržíme dohodu o sčitovaní; pre index σ_k vždy vypíšeme explicitne sumačný symbol. Nech transformácia (15) tvorí grupu (označíme ju $G_{\infty N}$). V tomto prípade zasa môžeme uvažovať infinitezimálnu transformáciu tvaru (5), pričom

$$\delta x_\mu = \sum_{\sigma_k = 0}^{\tau_k} P^{\sigma_k}_{\mu k} \partial^{\sigma_k} \delta E_k, \tag{16}$$

kde δE_k značí prírastok (nekonečne malý prvého rádu) funkcie E_k. Tomuto odpovedá infinitezimálna transformácia vlnových funkcií tvaru (7), pričom

$$\delta \psi_\alpha = \sum_{\sigma_k = 0}^{\tau_k} R^{\sigma_k}_{\alpha k} \partial^{\sigma_k} \delta E_k. \tag{17}$$

Výrazy $P^{\sigma_k}_{\mu k}$, $R^{\sigma_k}_{\alpha k}$ značia určité funkcie.

C. Ľahko sa zistí, že sa pri transformácii (5) objemový element (2) transformuje podľa vzťahu

$$\mathrm{d}(x') = \Delta\, \mathrm{d}(x) = (1 + \partial_\mu \delta x_\mu)\, \mathrm{d}(x). \tag{18}$$

Ak sa objemový element netransformuje, platí pre jakobián Δ:

$$\Delta = 1. \tag{19}$$

§ 3. Transformácia lagrangiánu

V ďalšom budeme uvažovať iba tie transformácie súradníc a vlnových funkcií, voči ktorým sú Euler—Lagrangeove rovnice (4): $[L]_\alpha = 0$ invariantné. Lagrangián sa pritom môže transformovať takto

$$L'(x') = kL(x) + L_0(x).$$

1° Transformácie, pri ktorých sa funkcionálny tvar lagrangiánu nezmení (t. j. $L' = L$), nazývajú sa symetrické. Hovoríme tu o tzv. tvarovej (alebo absolútnej) invariancii [1].

2° V prípade, že lagrangián priberie faktor (t. j. $L' = kL$, pričom môže byť $k = k(x_\mu)$), hovoríme o relatívnej invariancii.

3° Ak $L' = L + L_0$, musí byť $[L_0]_\alpha \equiv 0$. Pre to je nutné a stačí, aby sa funkcia L_0 dala písať v tvare divergencie, t. j. $L_0 = \partial_\mu \Omega_\mu$. V prípade infinitezimálnych transformácií dostaneme $\delta L_0 = \partial_\mu \delta \Omega_\mu$. Ak uvažujeme lagrangián v tvare (3), nemožno všeobecne zvoliť funkcie Ω_μ tak, aby v nich vystupovali derivácie len nižších rádov, než vystupujú v lagrangiáne [8]. Transformácie, pri ktorých sa lagrangián transformuje až na divergenciu, nazývajú sa divergenčné. V tomto prípade hovoríme o invariancii až na divergenciu.

Úhrnom môžeme povedať toľko: Nech sa pri transformácii (5) a (12) transformuje účinok takto

$$S = \int_Q L(x)\, \mathrm{d}(x) \to S' = \int_{Q'} L'(x')\, \mathrm{d}(x').$$

Ak sa obmedzíme na transformácie, pri ktorých sú Euler—Lagrangeove rovnice invariantné, môžeme lagrangián transformovať podľa vzťahu[2]

$$L'(x') = (1 + \delta k)\, L(x) + \partial_\mu \delta \Omega_\mu.$$

Pre funkcionálnu variáciu, zavedenú vzťahom $\delta S = S' - S$, dostaneme potom vyjadrenie

$$\delta S = \int_{Q'} L(x')\, \mathrm{d}(x') - \int L(x)\, \mathrm{d}(x). \tag{20}$$

Zo vzťahu (20) vidíme, že pre to, aby pri uvažovaných transformáciách bol účinok invariantný (t. j. aby platilo $\delta S = 0$), treba:

a) ak sa objemový element netransformuje [teda platí (19)], aby bol lagrangián absolútne (resp. až na divergenciu) invariantný;

b) ak sa $\mathrm{d}(x)$ transformuje [podľa (18)], aby bol lagrangián relatívne (resp. až na divergenciu) invariantný. V tomto prípade musí platiť

$$L(x') = \Delta^{-1} L(x). \tag{21}$$

§ 4. Prvá veta Noetherovej

Premenné, ktoré sa vyskytujú v účinku (1) [s ohľadom na (3)] podrobíme infinitezimálnej transformácii (5) a (12). Zo vzťahu (20) dostaneme pomocou Taylorovho rozvoja

$$\delta S = \int_Q \left\{ L\partial_\mu \delta x_\mu + \partial_\mu L \,.\, \delta x_\mu + \sum_{\sigma_\alpha = 0}^{\tau_\alpha} \frac{\partial L}{\partial \partial^{\sigma_\alpha} \psi_\alpha} \delta \partial^{\sigma_\alpha} \psi_\alpha \right\} \mathrm{d}(x).$$

V ďalšom zavedieme lokálnu variáciu. Použitím vzťahu (14) dostaneme ohľadom na (13)]:

$$\delta S = \int_Q \left\{ \partial_\mu (L \delta x_\mu) + \sum_{\sigma_\alpha = 0}^{\tau_\alpha} \frac{\partial L}{\partial \partial^{\sigma_\alpha} \psi_\alpha} \partial^{\sigma_\alpha} \delta^* \psi_\alpha \right\} \mathrm{d}(x) \tag{22}$$

[2] V ďalšom nebudeme explicitne vypisovať divergenčný člen $\partial_\mu \delta \Omega_\mu$, ale ho zahrnieme do výrazov V_μ, resp. $V_{\mu i}$ (pozri ďalšie paragrafy).

(symbol ∂_μ značí v (22) totálnu deriváciu). Aby sme mohli v ďalšom vyjadriť integrand rovnice (22) v tvare divergencie [až na additívny člen, pozri (25)], použijeme identitu:

$$\frac{\partial L}{\partial \partial^{\sigma_\alpha} \psi_\alpha} \cdot \partial^{\sigma_\alpha} \delta^* \psi_\iota =$$

$$= \sum_{\varrho_\alpha = 0}^{\sigma_\alpha} (-1)^{\varrho_\alpha} \binom{\sigma_\alpha}{\varrho_\alpha} \partial_\mu \partial^{\sigma_\alpha - 1 - \varrho_\alpha} \left(\partial^{\varrho_\alpha} \frac{\partial L}{\partial \partial^{\sigma_\alpha - 1 - \varrho_\alpha} \partial^{\varrho_\alpha} \partial_\mu \psi_\alpha} \cdot \delta^* \psi_\alpha \right), \quad (23)$$

pričom je $\binom{\sigma_\alpha}{\varrho_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha!}{\varrho_\alpha!(\sigma_\alpha - \varrho_\alpha)!}$. V poslednom člene rovnice (22) treba sčítať výraz (23) ešte podľa σ_α. Ak použijeme vzťah

$$\sum_{\sigma_\alpha=0}^{\tau_\alpha} \sum_{\varrho_\alpha=0}^{\sigma_\alpha} = \sum_{\sigma_\alpha=1}^{\tau_\alpha} \sum_{\varrho_\alpha=0}^{\sigma_\alpha - 1} + \sum_{\sigma_\alpha=0}^{\tau_\alpha} \sum_{\varrho_\alpha=\sigma_\alpha}^{\sigma_\alpha}, \quad (24)$$

môžeme (22) prepísať do tvaru

$$\delta S = \int_Q \Bigg\{ \partial_\mu \Bigg[L \delta x_\mu + \sum_{\sigma_\alpha=1}^{\tau_\alpha} \sum_{\varrho_\alpha=0}^{\sigma_\alpha - 1} (-1)^{\varrho_\alpha} \binom{\sigma_\alpha}{\varrho_\alpha} \partial^{\sigma_\alpha - 1 - \varrho_\alpha} \left(\partial^{\varrho_\alpha} \frac{\partial L}{\partial \partial^{\sigma_\alpha - 1 - \varrho_\alpha} \partial^{\varrho_\alpha} \partial_\mu \psi_\alpha} \cdot \delta^* \psi_\alpha \right) \Bigg] + [L]_\alpha \cdot \delta^* \psi_\alpha \Bigg\} \, \mathrm{d}(x). \quad (25)$$

Pomocou vzťahu (10) môžeme dosiahnuť to, že v rovnici (25) vystúpia iba prírastky δx_μ a $\delta \psi_\alpha$; v prípade konečnej grupy ich vyjadríme pomocou vzťahov (6) a (8). Opätovným použitím vzťahu (24) môžeme (25) previesť do tvaru

$$\delta S = \int_Q \{\partial_\mu V_{\mu i} + [L]_\alpha (r_{\alpha i} - \partial_\mu \psi_\alpha \cdot p_{\mu i})\} \cdot \delta e_i \, \mathrm{d}(x), \quad (26)$$

kde[3]

$$V_{\mu i} = T_{\nu \mu} p_{\nu i} + A_{\mu i},$$

pričom

$$T_{\nu \mu} = L \delta_{\nu \mu} + \sum_{\sigma_\alpha=1}^{\tau_\alpha} (-1)^{\sigma_\alpha} \cdot \sigma_\alpha \cdot \partial_\nu \psi_\alpha \cdot \partial^{\sigma_\alpha - 1} \frac{\partial L}{\partial \partial^{\sigma_\alpha - 1} \partial_\mu \psi_\alpha}$$

[3] Veličiny $V_{\mu i}$ sa dajú určiť napríklad aj takým spôsobom, ktorý užíva G. Marx [7], pri zavádzaní energie, momentu hybnosti a spinu (pomocou kanonického formalizmu) v prípade, že lagrangián obsahuje i vyššie derivácie.

a

$$A_{\mu i} = \sum_{\sigma_\alpha=2}^{\tau_\alpha} \sum_{\varrho_\alpha=0}^{\sigma_\alpha - 2} (-1)^{\varrho_\alpha + 1} \binom{\sigma_\alpha}{\varrho_\alpha} \partial^{\sigma_\alpha - 1 - \varrho_\alpha} \left(\partial^{\varrho_\alpha} \frac{\partial L}{\partial \partial^{\sigma_\alpha - 1 - \varrho_\alpha} \partial^{\varrho_\alpha} \partial_\mu \psi_\alpha} \cdot \partial_\nu \psi_\alpha \cdot p_{\nu i} \right) + \sum_{\sigma_\alpha=1}^{\tau_\alpha} \sum_{\varrho_\alpha=0}^{\sigma_\alpha - 1} (-1)^{\varrho_\alpha} \binom{\sigma_\alpha}{\varrho_\alpha} \partial^{\sigma_\alpha - 1 - \varrho_\alpha} \left(\partial^{\varrho_\alpha} \frac{\partial L}{\partial \partial^{\sigma_\alpha - 1 - \varrho_\alpha} \partial^{\varrho_\alpha} \partial_\mu \psi_\alpha} \cdot r_{\alpha i} \right).$$

Zo vzťahu (26) môžeme získať tento výsledok:

Ak je účinok (resp. lagrangián, pozri bližšie § 3) invariantný voči grupe G_n, t. j. ak $\delta S = 0$, potom (δe_i sú ľubovoľné) musí platiť podľa (26)

$$[L]_\alpha \cdot (\partial_\mu \psi_\alpha \cdot p_{\mu i} - r_{\alpha i}) = \partial_\mu V_{\mu i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \quad (27)$$

Teda n lineárnych kombinácií Lagrangeových výrazov (4) dá sa písať v tvare divergencie. (Pre to stačí požadovať invarianciu elementu účinku.) Ak sú súčasne splnené i pohybové rovnice, t. j. platí $[L]_\alpha = 0$, potom z (27) vyplývajú zákony o zachovaní v tvare

$$\partial_\mu V_{\mu i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \quad (28)$$

Z existencie zákonov o zachovaní (28) dajú sa určiť prírastky δx_μ a $\delta \psi_\alpha$ [1]. Získané výsledky môžeme zhrnúť takto:

Nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby v uvažovanom fyzikálnom systéme bolo splnených n zákonov o zachovaní [tvaru (28)], je:

1° aby sa dal nájsť taký lagrangián, že vývoj tohto systému prebieha podľa príslušnej Euler—Lagrangeovej požiadavky (4) a

2° aby účinok (lagrangián) uvažovaného systému bol invariantný (v zmysle § 3) voči spojitej grupe transformácií o n parametroch (G_n).

Uvedené výsledky platia i v medznom prípade nekonečne mnohých parametrov [1].

§ 5. Druhá veta Noetherovej

Vyšetríme chovanie sa účinku (1) voči grupe $G_{\infty N}$. Analogickým postupom ako v § 4 získame vzťah (25). Prírastky δx_μ a $\delta \psi_\alpha$ vyjadríme v tomto prípade pomocou (16) a (17). Miesto rovnice (26) dostaneme

$$\delta S = \int_Q \left\{ \partial_\mu V_\mu + [L]_\alpha \sum_{\sigma_k=0}^{\tau_k} (R^{\sigma_k}_{\alpha k} - \partial_\mu \psi_\alpha \cdot P^{\sigma_k}_{\mu k}) \partial^{\sigma_k} \delta E_k \right\} \mathrm{d}(x) \quad (29)$$

[výraz V_μ odpovedá členu $V_{\mu i} \delta e_i$ v (26)].

Pretože pre ľubovoľnú veličinu $A^{\sigma_k}_k$ je splnená identita

$$A^{\sigma_k}_k \partial^{\sigma_k} E_k = (-1)^{\sigma_k} E_k \partial^{\sigma_k} A^{\sigma_k}_k + \partial_\mu D_\mu, \quad (30)$$

spĺňa ju i koeficient pri $\partial^{\sigma_k}\delta E_k$ v rovnici (29). Vzťah (30) hovorí, že keď vymeníme výrazy, ktoré derivujeme, musíme pridať určitý člen, ktorý možno písať v tvare divergencie [a faktor $(-1)^{\sigma_k}$]. Veličiny D_μ netreba poznať v explicitnom tvare. Aplikujme vzťah (30) na posledný člen rovnice (29). Funkcie, ktoré sa vyskytujú vo výraze $V_\mu + D_\mu$, volíme tak, aby na okraji oblasti Q boli nulové. Pomocou Gaussovej vety môžeme previesť integrál cez divergenciu na integrály cez 3-rozmerné nadplochy, ktoré sú však pre uvedenú voľbu okrajových podmienok nulové. Ak predpokladáme invarianciu účinku, dostaneme z (29) (E_k sú ľubovoľné nezávislé funkcie a koeficient pri δE_k je spojitý v Q) vzťah:

$$\sum_{\sigma_k=0}^{\tau_k} (-1)^{\sigma_k} \partial^{\sigma_k} \{[L]_\alpha (R^{\sigma_k}_{\alpha k} - \partial_\mu \psi_\alpha \, . \, P^{\sigma_k}_{\mu k})\} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{31}$$

Opačným postupom možno získať z platnosti rovnice (31) invarianciu účinku voči grupe $G_{\infty N}$, ktorú možno potom skonštruovať. Uvedené výsledky možno sformulovať takto:

1° Ak pre uvažovaný fyzikálny systém existuje lagrangián (a teda i Lagrangeove výrazy $[L_\alpha]$) a

2° ak je účinok (resp. lagrangián) uvažovaného systému invariantný (v zmysle § 3) voči spojitej grupe ($G_{\infty N}$), obsahujúcej N ľubovoľných a nezávislých funkcií E_k a ich derivácie až do rádu τ_k,

potom existuje N lineárne nezávislých kombinácií medzi Lagrangeovými výrazmi $[L]_\alpha$ a ich deriváciami (až do rádu τ_k). A naopak.

Poznámka 1. Nech sa v grupe $G_{\infty N}$ nevyskytujú derivácie funkcií E_k (t. j. $\tau_k = 0$).

a) Ak je počet vlnových funkcií ψ_α väčší ako počet funkcií E_k ($\alpha = 1, 2, \ldots, A$; $k = 1, 2, \ldots, N$), t. j. $A > N$, je iba $A - N$ Lagrangeových výrazov nezávislých. V prípade, že ide o jednu nezávisle premennú (napr. čas), dostaneme závislosť prvých integrálov pohybových rovníc [1].

b) Pre $A = N$ dostaneme z (31) N lineárne nezávislých homogénnych rovníc, o ktorých však vieme, že majú nulové riešenie (totiž $[L]_\alpha = 0$). Z toho vyplýva pre determinant sústavy podmienka

$$|R_{\alpha k} - \partial_\mu \psi_\alpha \, . \, P_{\mu k}| \neq 0. \tag{32}$$

Poznámka 2. V prípade, že $\sigma_k = \tau_k = 1$, dostaneme z (31) vzťah

$$\partial_\nu \{[L]_\alpha (R^\nu_{\alpha k} - \partial_\mu \psi_\alpha \, . \, P^\nu_{\mu k})\} = 0,$$

resp. ak sa súradnice netransformujú ($P^\nu_{\mu k} \equiv 0$):

$$\partial_\nu \{[L]_\alpha R^\nu_{\alpha k}\} = 0. \tag{33}$$

Poznámka 3. V prípade zmiešanej grupy (obsahuje nielen n nezávislých parametrov e_i, ale aj N nezávislých funkcií E_k) sú δx_μ a $\delta \psi_\alpha$ lineárnymi kombi-

náciami prírastkov δe_i a funkcií δE_k (a ich derivácií). Ak dosadíme raz $E_k = 0$ a druhý raz $e_i = 0$, dostaneme jednak divergenčné vzťahy a jednak závislosti (31), [1].

§ 6. Príklady

Ak uvažujeme (vlastnú) Lorentzovu (nehomogénnu) grupu transformácií, stačí pre platnosť viet Noetherovej vyžadovať (okrem existencie aj) absolútnu invarianciu lagrangiánu (resp. až na divergenciu), keďže pri transláciách a rotáciách sa objemový element netransformuje. V prípade konformnej grupy sa však objemový element transformuje (je $\partial_\mu \delta x_\mu \neq 0$) a teda lagrangián musí byť relatívne invariantný (resp. až na divergenciu) — podľa § 3.

V ďalšom ukážeme na niekoľkých elementárnych prípadoch častíc s nulovou kľudovou hmotou použitie viet Noetherovej (známejšie príklady sú napr. v [4] a [5]). Použijeme pritom Gaussovu sústavu jednotiek.

Uvažované lagrangiány môžeme získať vhodnou voľbou koeficientov $k_{\sigma_\alpha \sigma_\beta \alpha \beta}$ z lagrangiánu

$$L = \sum_{\sigma_\alpha, \sigma_\beta} \sum_{\alpha, \beta} k_{\sigma_\alpha \sigma_\beta \alpha \beta} \, \partial^{\sigma_\alpha} \psi_\alpha \, . \, \partial^{\sigma_\beta} \psi_\beta .$$

1. Pre skalárne komplexné pole, odpovedajúce častici s nulovou kľudovou hmotou, môžeme písať lagrangián v tvare $L = -\frac{1}{4\pi} \partial_\mu \varphi^* \, . \, \partial_\mu \varphi$ (φ^* je komplexne združená funkcia k φ). Účinok je v tomto prípade konformne invariantný, ak vlnové funkcie φ, φ^* transformujeme tak, že $\delta\varphi = -\frac{1}{4} \varphi \partial_\mu \delta x_\mu$ a $\delta\varphi^* = -\frac{1}{4} \varphi^* \partial_\mu \delta x_\mu$ (δx_μ sú prírastky súradníc pri transformáciách konformnej grupy). Lagrangián tohto poľa je v prípade inverzií (pozri príkl. 3) relatívne invariantný až na divergenciu. (Napríklad v prípade klasickej izolovanej sústavy hmotných bodov je lagrangián voči Galileiho transformácii absolútne invariantný až na divergenciu.)

2. V prípade elektromagnetického poľa je

$$L = -\frac{1}{16\pi} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2.$$

Ak transformujeme potenciály A_μ napríklad tak, že je $\delta A_\mu = \partial_\mu A_\nu \, . \, \delta x_\nu$ (pozri E. Bessel—Hagen, c. d.), kde δx_ν majú podobný význam ako v predchádzajúcom príklade, je účinok elmg poľa konformne invariantný.

Lagrangián je v tomto prípade invariantný i voči ciachovacím transformáciám 2. druhu, pri ktorých je $\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda$ (Λ je ľubovoľná funkcia, spĺňajúca vzťah $\partial_\mu \partial_\mu \Lambda = 0$) a $\delta x_\mu = 0$. V tomto prípade nadobudne vzťah (33) tvar $\partial_\mu [L]_\mu = 0$, keďže je $R^\mu_\alpha = \delta_{\alpha\mu}$. V prípade častíc s vyššími celočíselnými spinmi a nulovou kľudovou hmotou získame túto identitu v podobnom tvare (napr. pre spin 2 : $\partial_\mu \partial_\nu [L]_{\mu\nu} = 0$).

3. Pre neutrinové pole je lagrangián.

$$L = -\frac{1}{2}\hbar c(\psi^+\gamma_\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \psi^+ . \gamma_\mu \psi)$$

($\psi^+ = i\psi^*\gamma_4$; ψ^* je komplexne združená vlnová funkcia k ψ a γ_μ sú Diracove matice). Pri dilatáciách ($\delta x_\mu = x_\mu \delta e$, $d(x') = (1 + 4\delta e)\, d(x)$) stačí vlnové funkcie transformovať:

$$\delta\psi = -\frac{3}{2}\psi\delta e, \qquad \delta\psi^+ = -\frac{3}{2}\psi^+\delta e,$$

resp. v prípade inverzií ($\delta x_\mu = (x_\lambda x_\lambda \delta_{\mu\nu} - 2x_\mu x_\nu)\,\delta e_\nu$, $d(x') = (1 - 8x_\nu \delta e_\nu) \cdot d(x)$):

$$\delta\psi = (\gamma_\mu\gamma_\nu + 2\delta_{\mu\nu})\, x_\nu \delta e_\mu \cdot \psi, \qquad \delta\psi^+ = \psi^+ .(\gamma_\nu\gamma_\mu + 2\delta_{\mu\nu})\, x_\nu \delta e_\mu,$$

aby účinok bol konformne invariantný.

Odvodenie príslušných zákonov o zachovaní prenechávame čitateľovi.

Záverom ďakujem dr. M. Petrášovi za jeho záujem a pripomienky k tejto práci.

LITERATÚRA

[1] E. Noether, Göttinger Nachrichten 1918, 235.
[2] E. Bessel—Hagen, Math. Annalen 1921, 258.
[3] H. Schöpf, Ann. d. Physik 18 (1956), 278.
[4] E. L. Hill, Rev. Mod. Phys. 23 (1951), 253.
[5] P. Román, Acta Phys. Hung. 5 (1955), 143.
[6] W. Pauli, Rev. Mod. Phys. 13 (1941), 203 (článok je preložený do ruštiny).
[7] G. Marx, Acta Phys. Hung. 1 (1952), 209.
[8] R. Courant und D. Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik I. (je preklad i do ruštiny).

Došlo 10. 2. 1958.

Katedra fyziky Prírodovedeckej fakulty
Univerzity Komenského v Bratislave

ПРИМЕЧАНИЕ К ТЕОРЕМАМ НЭТЭР

МИКУЛАШ БЛАЖЕК

Выводы

В настоящей работе говорится об обеих теоремах Э. Нэтэр (E. Noether), уважая случай, когда в лагранжиане следованной системы выступают производные высших порядков от волновых функций. В этом случае показаны законы сохранения (если имеет место инвариантность функции действия относительно конечной непрерывной группы преобразований) и тождественные свойства лагранжевых выражений и их производных (для инвариантности относительно бесконечной группы). При этом лагранжиан преобразуется по принципу эквивалентности Эйлер—Лагранжевых уравнений „движения". Далее показано, когда требуется абсолютная (или релятивная) инвариантность лагранжиана к тому, чтобы был i в силе теоремы Нэтэр. Наконец, в нескольких простых примерах, показано использование обеих теорем Нэтэр.

REMARKS ON THE NOETHER'S THEOREMS

MIKULÁŠ BLAŽEK

Summary

The present paper deals with the both E. Noether's theorems for the higher order's derivatives of wave functions containing lagrangians (lagrangian density functions). For the physical system under discussion there are established the conservation theorems (when the invariance over a finit continuous group of transformations is required) and the identity relations between the Euler—Lagrange's expressions and their derivatives respectively (when the requirement of invariance over a infinit group is fulfiled). In this case the lagrangian is transformed according to the principle of equivalence of the Euler—Lagrange's equations of motion. For the validity of these theorems it is shown when we have to require the absolute (or the relative) invariance of the lagrangian. In the last section in any simple examples we can shown the use of the both Noether's theorems.