MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, VIII, 3 — 1958

# POZNÁMKA K JEDNOMU PROBLÉMU O EULEROVSKÝCH GRAFECH

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

Oystein Ore [3] a F. Bäbler [1] se nedávno zabývali eulerovskými grafy, v nichž existuje uzel $c$ takový, že každá kružnice grafu prochází uzlem $c$. Tyto grafy totiž lze ve třídě souvislých eulerovských grafů charakterisovat také touto vlastností: Konstruujeme-li daný souvislý eulerovský graf jedním (uzavřeným) tahem, přičemž vycházíme z uzlu $c$, potom po každé, když se dostaneme do uzlu $c$ a nemůžeme už z něho ven, jsme prošli všemi hranami grafu. V tomto příspěvku chceme naznačit jisté zobecnění citovaného problému O. Oreho a F. Bäblera.

Budiž $G$ konečný neorientovaný graf bez smyček (v tomto příspěvku připouštíme též existenci isolovaných uzlů). Nechť $H_1$, $H_2$ jsou dva podgrafy grafu $G$ definované takto:

a) Množina uzlů grafu $H_i$ ($i = 1, 2$) je rovna množině uzlů grafu $G$.

b) Každá hrana grafu $G$ patří právě jednomu z grafů $H_1$, $H_2$.

Potom řekneme, že $H_1$, $H_2$ jsou *komplementární* podgrafy v grafu $G$.

Nechť $U \neq \emptyset$ je podmnožina množiny uzlů grafu $G$. Řekneme, že podgraf $H$ grafu $G$ je *úplný vzhledem k $U$*, platí-li:

a) Existuje eulerovský[1] podgraf $H'$ grafu $G$ takový, že $H$, $H'$ jsou komplementární podgrafy v $G$.

b) Pro každé $x \in U$ je keřík[2] $K_x$ podgrafem v $H$.

Zřejmě graf $G$ je sám svým podgrafem úplným vzhledem k libovolné neprázdné podmnožině $U$ množiny svých uzlů. V tomto případě mluvíme o *triviálním* podgrafu úplném vzhledem k $U$, ostatní případy úplných podgrafů nazveme *netriviálními*.

Přistupme nyní k zobecnění jedné věty O. Oreho a F. Bäblera.

**Věta 1.** *Nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby v konečném neorientovaném grafu $G$ existoval jen triviální podgraf úplný vzhledem k dané neprázdné*

---

[1] Slovům „eulerovský graf" zde ovšem dáváme širší náplň než König [2], neboť připouštíme také isolované uzly. Tak např. podgraf N grafu $G$, který obsahuje všechny uzly grafu $G$ a žádnou hranu, je eulerovský. Podgrafy $N$, $G$ jsou v $G$ komplementární.

[2] *Keřík* $K_x$ je podgraf grafu $G$, který obsahuje všechny hrany grafu $G$ incidující s uzlem $x$ a všechny koncové uzly všech těchto hran (viz [2], str. 128).

*podmnožině $U$ množiny uzlů grafu $G$, je, aby na každé kružnici grafu $G$ ležel aspoň jeden uzel $x \in U$.*

Důkaz. Nechť v grafu $G$ existuje jenom triviální podgraf úplný vzhledem k $U$ a nechť přitom existuje kružnice $O$, na které neleží žádný uzel množiny $U$. Sestrojme podgraf $H$ grafu $G$ tak, že z $G$ vynecháme všechnyh rany kružnice $O$. K podgrafu $H$ existuje v $G$ komplementární eulerovský podgraf $H'$ (složený ze všech uzlů grafu $G$ a ze všech hran kružnice $O$). Tím docházíme ke sporu, neboť $\varkappa$ je netriviální podgraf úplný vzhledem k $U$.

Nechť nyní obráceně existuje v grafu $G$ netriviální podgraf $\overline{H}$ úplný vzhledem k $U$; sestrojme k němu komplementární podgraf $\overline{H}'$. Protože množina hran (eulerovského) grafu $\overline{H}'$ není prázdná, můžeme v $\overline{H}'$ sestrojit kružnici $\Omega$ (viz König [2], str. 19, věta 1). Kdyby existoval uzel $x \in U$ ležící na $\Omega$, označme $h_1$, $h_2$ dvě hrany kružnice $\Omega$ incidující s uzlem $x$. Hrany $h_1$, $h_2$ by nepatřily ke grafu $\overline{H}$, tedy graf $\overline{H}$ by nebyl podgraf úplný vzhledem k $U$. Na kružnici $\Omega$ tedy neleží žádný uzel z množiny $U$. Důkaz je podán.

O. Ore a F. Bäbler se zabývali případem, kdy $G$ je souvislý eulerovský graf a $U$ je množina s jediným prvkem $c$. Pak ovšem podgraf $H$ úplný vzhledem k $U$ je eulerovský. Vyloučíme-li případ, že se $G$ redukuje na isolovaný uzel $c$, lze nutnou a postačující podmínku z věty 1 vyslovit tak, jak jsme uvedli na počátku tohoto článku. Každý souvislý eulerovský graf (s neprázdnou množinou hran) lze totiž — jak známo — konstruovat jedním uzavřeným tahem, takže triviálnímu podgrafu $H$ úplnému vzhledem k $U$ odpovídá tah konstruující celý graf $G$, netriviálnímu podgrafu $H$ pak tah konstruující jistý jeho vlastní podgraf.

Všimněme si ještě případu, kdy množina $U$ z věty 1 má jediný prvek, tedy $U = \{c\}$. Dříve však, než budeme zkoumat vlastnosti příslušného grafu $Z$, uvedeme bez důkazu jednu pomocnou větu, kterou dokazuje König [2] na str. 8 jako větu 7.

**Lemma 1.** *Jsou-li v daném grafu $W_1$ a $W_2$ dvě různé cesty, jež obě spojují dvojici různých uzlů $p$, $q$, pak je možno sestrojit kružnici $\Omega$, jejíž hrany patří buď cestě $W_1$, nebo $W_2$.*

K formulaci věty 2 potřebujeme ještě jeden pojem. Nechť $G_1$ a $G_2$ jsou dva grafy, které mají aspoň jeden uzel společný. Pak *maximálním společným podgrafem* grafů $G_1$ a $G_2$ rozumíme takový graf $P$, jenž je podgrafem grafu $G_1$ i grafu $G_2$, přičemž platí: Je-li graf $Q$ podgrafem v grafu $G_1$ i v grafu $G_2$, pak $Q$ je podgrafem v $P$. Existence a unicita maximálního společného podgrafu je zřejmá.

**Věta 2.** *Nechť $Z$ je graf, v němž existuje uzel $c$ takový, že každá kružnice grafu $Z$ prochází uzlem $c$. Buďte $O'$ a $O''$ dvě různé kružnice grafu $Z$ a nechť $P$ je jejich maximální společný podgraf. Potom platí: Je-li $P$ souvislý, je $P$ buď isolovaný uzel nebo cesta v grafu $Z$, přičemž uzel $c$ není vnitřním uzlem této cesty. Není-li $P$ souvislý, má právě dvě komponenty, z nichž jedna je tvořena isolovaným uzlem $c$.*[3]



Důkaz. Ze souvislosti grafu $P$ plyne, že je to buď isolovaný uzel nebo cesta v grafu $Z$; nechť $c$ je vnitřním uzlem této cesty. Odstraníme z kružnice $O'$ (resp. $O''$) všechny hrany a všechny vnitřní uzly cesty $P$ (tedy i uzel $c$); vznikne tak cesta $W_1$ (resp. $W_2$) v grafu $G$. Podle lemmatu 1 je možné sestrojit kružnici $\Omega$, jejíž hrany patří buď cestě $W_1$ nebo cestě $W_2$, tedy $\Omega$ neprochází uzlem $c$ (spor).

Nechť nyní $P$ má aspoň dvě komponenty; jedna z nich (označme ji $P_1$) obsahuje uzel $c$. Nechť $P$ má ještě aspoň dvě další různé komponenty $P_2$ a $P_3$; zvolme v každé z nich jeden uzel $p \in P_2$, $q \in P_3$. Uzly $p, q$ dělí kružnici $O'$ (resp. $O''$) na dvě části (cesty); budiž $W_1$ (resp. $W_2$) ta z nich, jež neobsahuje uzel $c$. Sestrojme nyní opět podle lemmatu 1 kružnici $\Omega$; ta však neprochází uzlem $c$ (spor). Má tedy $P$ právě dvě komponenty $P_1$ a $P_2$. Zbývá ještě dokázat, že $P_1$ má jen jediný uzel $c$. Nechť $P_1$ má kromě uzlu $c$ ještě uzel $\overline{p}$. Zvolme dále uzel $\overline{q} \in P_2$. Pomocí uzlů $\overline{p}$, $\overline{q}$ lze na kružnici $O'$ (resp. $O''$) opět definovat dvě cesty; označíme-li $W_1$ (resp. $W_2$) zase tu, která neprochází uzlem $c$, odvodíme z lemmatu 1 analogicky jako výše existenci kružnice $\Omega$ neprocházející uzlem $c$ (spor). Důkaz je tím podán.

Závěrem chceme poznamenat, že jednoduchá zobecnění připouštějí ještě další věty, jež O. Ore a F. Bäbler uvádějí ve svých pracích.

## LITERATURA


[1] F. Bäbler, Über eine spezielle Klasse Euler'scher Graphen, Commentarii Math. Helvet. (1953), 81—100.

[2] D. König, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936.

[3] O. Ore, A problem regarding the tracing of graphs, Elemente d. Math., Bd. VI (1951), Nr. 3, 49—53.


Došlo 21. 12. 1957.

*Matematický ústav Československé akademie věd v Praze*

# ЗАМЕТКА К ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ОБ ЭЙЛЕРСКИХ ГРАФАХ

ИРЖИ СЕДЛАЧЕК


Выводы

О. Оре и Ф. Беблер занимались эйлерскими графами $G$, в которых существует вершина, лежащая на каждой окружности графа $G$. Заметка показывает возможность обобщения этой проблемы.


[3] Část tvrzení naší věty 2 uvádí F. Bäbler [1] na str. 83 v poznámce 3 pro speciálnější případ eulerovského grafu $Z$ bez důkazu.

# EINE BEMERKUNG ÜBER EULER'SCHE GRAPHEN

JIŘÍ SEDLÁČEK

Zusammenfassung

O. Ore und F. Bäbler studierten eine spezielle Klasse Euler'scher Graphen $G$, wo ein auf jedem Kreise des Graphes $G$ liegende Knotenpunkt existiert. Diese Bemerkung zeigt, daß man die erwähnte Aufgabe leicht verallgemeinern kann.