MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK VIII ČÍSLO 3

O KOMUTATÍVNYCH PERIODICKÝCH POLOGRUPÁCH

BLANKA KOLIBIAROVÁ, Bratislava

Periodickou pologrupou nazývame pologrupu S, ktorej každý prvok má konečný rád, t. j. pre každý prvok $x \in S$ existuje prirodzené číslo n také, že x^n je idempotent. V ďalšom sa budeme zaoberať štruktúrou komutatívnych periodických pologrúp.

Znak S bude označovať komutatívnu periodickú pologrupu.

1. Pologrupa idempotentov

Označme znakom $I(S)$ množinu idempotentov v S. Znakmi e s indexmi označujeme všade v ďalšom prvky z $I(S)$. Zrejme $I(S)$ je čiastočná pologrupa pologrupy S. Pretože pologrupa $I(S)$ je komutatívna a každý jej prvok je idempotentom, je to polosväz [6]. Čiastočné usporiadanie v tomto polosväze označme znakom ϱ. Platí teda pre $e_1, e_2 \in I(S)$ vzťah $e_1 \varrho e_2$ vtedy a len vtedy, keď $e_1 = e_2e_1$.

2. K-triedy

Definícia 1 (podľa [1]). *Nech e je idempotent v pologrupe S. Budeme hovoriť, že prvok $x \in S$ patrí k idempotentu e, ak existuje také prirodzené číslo n, že platí $x^n = e$. Množinu všetkých prvkov patriacich k idempotentu e budeme označovať $K^{(e)}$ a budeme ju volať K-triedou patriacou k idempotentu e.*

Zrejme každý prvok $x \in S$ patrí len k jednému idempotentu. Pre každé $K^{(e)}$ je $e \in K^{(e)}$.

Lemma 1 (podľa [1]). *K-triedy komutatívnej periodickej pologrupy sú navzájom disjunktné čiastočné pologrupy pologrupy S určujúce rozklad na pologrupe S.*

Veta 1. *Rozklad pologrupy S z lemmy 1 je vytvárajúcim rozkladom (t. j. rozklad určený kongruenciou) na S.*

Poznámka 1. Faktorovú pologrupu na S danú týmto vytvárajúcim rozkladom budeme označovať znakom $\mathscr{K}$. (Prvkami pologrupy $\mathscr{K}$ sú K-triedy.)

Dôkaz. Treba dokázať: ak $x \in K^{(e_i)}$, $y \in K^{(e_k)}$ a $e_ie_k = e_n$, tak $xy \in K^{(e_n)}$. Nech $K^{(e)}$ je trieda, do ktorej patrí xy. Teda existuje také prirodzené číslo m, že platí $(xy)^m = e$. Pre prvky x, y a pre isté prirodzené čísla s, t platí $x^s = e_i$, $y^t = e_k$. Potom $e = (xy)^{mst} = x^{mst}y^{mst} = e_ie_k$.

Zrejme platí:

Veta 2. *Faktorová pologrupa $\mathcal{K}$ daná vytvárajúcim rozkladom z vety 1 je polosväz izomorfný s polozväzom $I(S)$.*

Čiastočné usporiadanie v polosväze $\mathcal{K}$ označíme znakom ϱ. Platí teda $K^{(e_1)}\varrho K^{(e_2)}$ vtedy a len vtedy, ak $e_1\varrho e_2$.

V ďalšom budeme označovať znakom $G^{(e)}$ maximálnu grupu patriacu k idempotentu e [1]. (Zrejme $G^{(e)} \subset K^{(e)}$.)

Lemma 2. *Nech $x \in G^{(e_i)}$, $y \in G^{(e_k)}$, $e_ie_k = e_n$. Potom $xy \in G^{(e_n)}$.*

Dôkaz. Podľa vety 1 je $xy \in K^{(e_n)}$. Ďalej platí $xy = (xe_i)(e_ky) = xye_n$, čo značí, že prvok xy nemá predperiódu, teda podľa vety 7 [2] padne do $G^{(e_n)}$.

Lemma 3. *Nech $x \in G^{(e_n)}$, $y \in K^{(e_i)}$, pričom $K^{(e_n)}\varrho K^{(e_i)}$. Potom $xy \in G^{(e_n)}$.*

Dôkaz. Podľa vety 1 je $xy \in K^{(e_n)}$. Avšak $xe_n = x$, teda $xye_n = xy$, čo značí, že prvok xy nemá predperiódu, a teda podľa vety 7 [2] patrí do $G^{(e_n)}$.

Lemma 4. *Nech $x \in G^{(e_n)}$. Potom $x = xe_i$ pre všetky e_i, pre ktoré $e_n\varrho e_i$.*

Dôkaz. Nech $x \in G^{(e_n)}$, nech $e_n\varrho e_i$, t. j. $e_n = e_ie_n$. Potom $x = xe_n = xe_ne_i = xe_i$.

Zrejme platí:

Lemma 5. *Nech $x, y \in S$. Nech pre prirodzené čísla m, n platí $x^m = e_i$, $y^n = e_k$. Nech s je spoločný násobok m, n. Nech $e_ie_k = e_t$. Potom platí $(xy)^s = e_t$.*

3. F-triedy

Nech $x \in S$. Potom hlavný ideál $I = \{x\} \cup Sx$[1] nazývame hlavným ideálom vytvoreným prvkom x. V ďalšom budeme označovať hlavný ideál vytvorený prvkom x symbolom (x).

Definícia 2 (podľa [3]). *Množinu všetkých prvkov vytvárajúcich tenže hlavný ideál nazývame F-triedou.*

F-triedu obsahujúcu prvok x budeme označovať znakom F_x.

Poznámka 2 (podľa [1], veta 13). Každá maximálna grupa $G^{(e)}$ je sama osebe F-triedou.

Poznámka 3. Zrejme F-triedy tvoria rozklad na množine S. Ako vyplýva z práce [1], tento rozklad je zjemnením rozkladu vytvoreného K-triedami.

Lemma 6. *Nech I je hlavný ideál. Nech $x \in I$. Potom $F_x \subseteq I$.*

Dôkaz. Nech $x_1 \in F_x$, potom $(x_1) = (x)$. To značí, že platí alebo $x_1 = x$, alebo $x_1 = sx$ pre isté $s \in S$. V obidvoch prípadoch teda $x_1 \in I$.

Poznámka 4. Hlavný ideál je súčtom F-tried.

Lemma 7. *Nech $F_x \subseteq I$, potom $(x) \subseteq I$.*

Dôkaz. Podľa predpokladu $x \in I$, teda aj $Sx \subset I$ a teda $(x) \subseteq I$.

[1] Znakom $\cup$ označujeme množinový súčet.

V ďalšom bude pre dané e_i symbol $\bigcup_{e_l\varrho e_i} G^{(e_l)}$, značiť súčet všetkých grúp $G^{(e_l)}$, pre ktorých jednotky e_l platí $e_l\varrho e_i$.

Lemma 8. *Nech $x \in K^{(e_i)}$, potom $\bigcup_{e_l\varrho e_i} G^{(e_l)} \subseteq (x)$.*

Dôkaz. Nech $x \in K^{(e_i)}$, potom $xe_i \in G^{(e_i)}$. Podľa ods. 3 pozn. 2 je $G^{(e_i)}$ F-triedou, z čoho vzhľadom na lemmu 6 vyplýva $G^{(e_i)} \subset (x)$. Podľa odseku 1, ak $e_l\varrho e_i$, platí $e_l = e_ie_l$ a pretože $e_i \in (x)$, je $e_l \in (x)$. Potom však podľa lemmy 6 je $\bigcup_{e_l\varrho e_i} G^{(e_l)} \subseteq (x)$.

Lemma 9. *Nech $\bigcup_{e_l\varrho e_i} G^{(e_l)} = I$ je hlavný ideál v S. Potom e_i je jednotkou v I.*

Dôkaz. Nech $x \in I$, nech $x \in G^{(e_k)}$. Potom $x = xe_k = xe_ie_k = xe_i$.

Veta 3. *Rozklad daný F-triedami na S je vytvárajúcim rozkladom na S.*

Dôkaz. Treba ukázať, ak $x, y \in S$, $x_1 \in F_x$, $y_1 \in F_y$, potom $x_1y_1 \in F_{xy}$. Platí $(x) = (x_1)$, $(y) = (y_1)$, čo značí, že $(xy) = (x_1y)$, $(x_1y) = (x_1y_1)$, z čoho dostávame $(xy) = (x_1y_1)$.

Definícia 3. *V množine F-tried zavedieme reláciu $\leqq$ takto: $F_x \leqq F_y$ vtedy a len vtedy, keď $(x) \subseteq (y)$.*

Poznámka 5. Zrejme platí $F_{xy} \leqq F_x$, $F_{xy} \leqq F_y$.

Poznámka 6. Hlavný ideál (x) je súčtom všetkých tried F_z, pre ktoré platí $F_z \leqq F_x$.

Poznámka 7. Faktorovú pologrupu na S danú rozkladom z vety 3 budeme označovať znakom $\mathcal{F}$. Jej prvkami sú F-triedy a násobenie je definované takto: $F_xF_y = F_{xy}$.

Lemma 10. *Platí: a) Nech $F_x \subseteq K^{(e_i)}$, potom $G^{(e_i)} \leqq F_x$. (V zmysle poznámky 2 je $G^{(e_i)}$ F-triedou.) b) Nech $F_x \subseteq K^{(e_i)}$, $F_y \subseteq K^{(e_k)}$ a nech $K^{(e_i)}\varrho K^{(e_k)}$. Potom buď $F_x \leqq F_y$, buď F_x, F_y sú nezrovnateľné.*

Dôkaz vyplýva z vety 1, lemmy 2, 3 a 8.

Veta 4. *Nech $F_y \leqq F_x (x, y \in K)$. Rovnosť $F_{xy} = F_y$ platí vtedy a len vtedy, keď F_y je grupou.*

Dôkaz.

a) Nech $F_y \leqq F_x$, nech $F_{xy} = F_y$. Potom buď $y = sxy$ $(s \in S)$, buď $y = xy$. V prvom prípade $y = s^2x^2y = s^3x^3y = s^4x^4y = \ldots$ Pre isté prirodzené číslo m platí $x^m = e$, teda po m krokoch dostávame $y = s^mx^my = s^mey$, čo značí $(y) \subseteq (ey)$. Pretože $(ey) \subseteq (y)$, platí $(y) = (ey)$. Avšak podľa poznámky 2 je $F_y = F_{ey} = F_e = G^{(e)}$. V prípade $y = xy$ sa postupuje podobne.

b) Obrátené tvrdenie je zrejmé z lemmy 3 a 6.

Dôsledok. *Ak platí $F_x{}^n = F_x{}^{n+1}$, $F_x{}^n$ je grupa.*

Lemma 11. *Nech $F_x \subseteq K^{(e_i)}$. Potom existuje prirodzené číslo n také, že $F_x{}^n$ je grupa $G^{(e_i)}$.*

Dôkaz. Pretože S je periodická pologrupa, musí ku každému $x \in S$ existovať prirodzené číslo n také, že $x^n = e_i$, čo značí vzhľadom na poznámku 2, že $F_x{}^n = G^{(e_i)}$.

Lemma 12. *Nech $F_x \leqq F_y$, nech $z \in S$. Potom $F_{xz} \leqq F_{yz}$.*

Dôkaz. Z predpokladu vyplýva, že buď $x = y$, buď $x = sy$, kde $s \in S$. V prvom prípade je tvrdenie zrejmé. V prípade druhom $xz = syz$, z čoho vyplýva $(xz) \subseteq (yz)$, čiže $F_{xz} \leqq F_{yz}$.

Dôsledok. *Nech $F_z \leqq F_x$. Potom $F_{z^2} \leqq F_{x^2}$.*

Definícia 4. *Budeme hovoriť, že čiastočne usporiadaná množina M je orientovaná nadol, ak ku každej dvojici prvkov $a, b \in M$ existuje prvok $c \in M$ taký, že $c \leqq a$, $c \leqq b$.*[2]

Analogicky k pojmu multisväzu [5] zaveďme pojem multipolosväzu:

Definícia 5. *Nech P je čiastočne usporiadaná množina.* Budeme *hovoriť, že P je multipolosväz, ak je splnená axióma:*

Nech $a, b \in P$; ak existuje také $\omega \in P$, že $\omega \leqq a$, $\omega \leqq b$, existuje aj také $d \in P$, že $d \geqq \omega$, $d \leqq a$, $d \leqq b$ a že z podmienky $y \geqq d$, $y \leqq a$, $y \leqq b$ vyplýva $y = d$.

Veta 5. *Množina F-tried komutatívnej periodickej pologrupy tvorí vzhľadom na usporiadanie dané definíciou 3 množinu orientovanú nadol.*

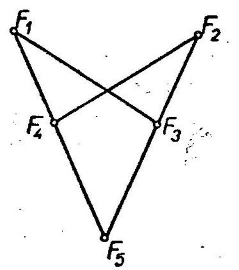
Dôkaz. Tvrdenie vyplýva z poznámky 5.

Poznámka 8. V prípade, že každý rastúci reťazec F-tried je konečný, je množina F-tried multipolosväzom, v ktorom pre každé a, b je množina prvkov d z definície 5 neprázdna (príklad 1), niekedy dokonca polosväzom (príklad 2).

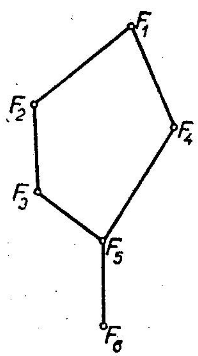
Príklad 1. Daná je množina prvkov $\{a, b, c, d, e\}$. Operácia násobenia je definovaná takto: $aa = bb = d$, $ab = c$, $cc = dd = ee = ac = bc = ad = bd = ae = be = de = ce = e$.

Ľahko sa preverí, že takto definovaná operácia dáva pologrupu a že F-triedy sú: $F_1 = \{a\}$, $F_2 = \{b\}$, $F_3 = \{c\}$, $F_4 = \{d\}$, $F_5 = \{e\}$. Čiastočne usporiadaná množina F-tried, ktorej diagram je na obr. 1 je multipolosväz.

Príklad 2. Množina celých čísel mod 12 s operáciou násobenia mod 12 tvorí pologrupu. F-triedami sú tieto množiny: $F_1 = \{1, 5, 7, 11\}$, $F_2 = \{2, 10\}$, $F_3 = \{4, 8\}$, $F_4 = \{3, 9\}$, $F_5 = \{6\}$, $F_6 = \{0\}$. Čiastočne usporiadaná množina F-tried je polosväzom, ktorého diagram je na obr. 2.



Obr. 1.



Obr. 2.

[2] Pozri napr. [6], § 3.

Poznámka 9. Pologrupy S, $\mathcal{F}$, $\mathcal{K}$, $I(S)$ sú v takomto vzájomnom vzťahu: Pologrupa $\mathcal{F}$ je homomorfným obrazom pologrupy S, ako vyplýva z vety 3. Pretože $\mathcal{K}$ je faktorová pologrupa na S (pozn. 1) a príslušný vytvárajúci rozklad pologrupy S je zákrytom vytvárajúceho rozkladu daného faktorovou pologrupou $\mathcal{F}$ (podľa pozn. 3), je pologrupa $\mathcal{K}$ homomorfným obrazom pologrupy $\mathcal{F}$. Príslušný homomorfizmus h je daný množinovou inklúziou. Podľa viet 2 a 5 sú množina $\mathcal{F}$ s reláciou $\leqq$ a množina $\mathcal{K}$ s reláciou ϱ čiastočne usporiadané množiny. Z lemmy 10 vyplýva, že zobrazenie h je súčasne aj homomorfným zobrazením čiastočne usporiadanej množiny $\mathcal{F}$ na čiastočne usporiadanú množinu $\mathcal{K}$. Pologrupa $I(S)$ je izomorfná s pologrupou $\mathcal{K}$.

Veta 6. *Ak v S každý klesajúci reťazec do seba zapadajúcich hlavných ideálov je konečný, je konečný aj každý klesajúci reťazec idempotentov (v zmysle čiastočného usporiadania).*

Dôkaz. Z predpokladov vyplýva, že každý klesajúci reťazec v čiastočne usporiadanej množine $\mathcal{F}$ je konečný. Tvrdenie vety vyplýva z toho, že polosväz $I(S)$ je homomorfným obrazom čiastočne usporiadanej množiny $\mathcal{F}$ (pozn. 9).

Obrátená veta neplatí: ak každý klesajúci reťazec idempotentov je konečný, nemusí byť konečný každý klesajúci reťazec hlavných ideálov.

Príklad. Nech S je pologrupa skladajúca sa z čísla 0 a čísel α tvaru: $\alpha = p_1p_2p_3 \dots p_n$, kde $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ sú navzájom rôzne prvočísla ($n = 1, 2, 3, \dots$). Násobenie je definované takto: $0 . \alpha = \alpha . 0 = 0$ pre každé $\alpha \in S$; pre $\alpha, \beta \not\equiv 0$ značí $\alpha . \beta$ súčin v obvyklom zmysle, ak čísla α, β sú nesúdeliteľné, v opačnom prípade $\alpha . \beta = 0$. Jediným idempotentom pologrupy je 0. Existuje však reťazec do seba zapadajúcich hlavných ideálov, napr.: $(p)_1) \supset (p_1p_2) \supset (p_1p_2p_3) \dots$, ktorý nie je konečný.

Podobná veta platí aj o rastúcich konečných reťazcoch a konečných reťazcoch idempotentov a ideálov.

Veta 7. *Nutná a postačujúca podmienka, aby komutatívna periodická pologrupa mala minimálny hlavný ideál n je, aby existoval idempotent $e \in S$ taký, že platí $e\varrho e_i$ pre všetky $e_i \in I(S)$. Potom sa n rovná grupe $G^{(e)}$.*

Dôkaz. Tvrdenie o podmienke postačujúcej vyplýva z lemmy 3, tvrdenie o podmienke nutnej sa dokáže nepriamo tiež pomocou lemmy 3 a poznámky 6.

Poznámka 10. Podmienka klesajúcich reťazcov pre idempotenty (v zmysle čiastočného usporiadania) je teda postačujúca pre existenciu minimálneho ideálu.

Veta 8. *Ak platí: $S = (x)$ pre isté $x \in S$, existuje idempotent $e \in S$ taký, že platí $e_i\varrho e$ pre všetky $e_i \in I(S)$. (T. j. pologrupa idempotentov má jednotku.)*

Dôkaz. Z podmienky vety vyplýva, že čiastočne usporiadaná množina $\mathcal{F}$ má najväčší prvok a teda to isté platí aj pre polosväz $I(S)$, ktorý je jej homomorfným obrazom.

Poznámka 11. Podmienka vo vete 8 je nutná, ale nie postačujúca pre to, aby platilo $S = (x)$ pre isté $x \in S$, ako ukazuje príklad pologrupy danej tabuľkou:

	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	a_2	a_2
a_2	a_2	a_2	a_2
a_3	a_2	a_2	a_2

Hlavné ideály sú: $(a_1) = \{a_1, a_2\}$; $(a_2) = \{a_2\}$; $(a_3) = \{a_2, a_3\}$. Neexistuje prvok, ktorý by vytváral ako hlavný ideál celú pologrupu.

Poznámka 12. Čiastočne usporiadaná množina $\mathscr{F}$ je izomorfná s množinou všetkých hlavných ideálov pologrupy S čiastočne usporiadanou množinovou inklúziou. Ak teda v $\mathscr{F}$ existuje najväčší prvok, existuje i hlavný ideál v S, ktorý obsahuje každý iný hlavný ideál. Z poznámky 6 vyplýva, že týmto hlavným ideálom je celá pologrupa S.

4. Homomorfizmy F-tried a K-tried

Veta 9. *Nech $e_n = e_i e_k$. Potom zobrazenie $x \to xe_k$ $(x \in K^{(e_i)})$ je homomorfné zobrazenie množiny $K^{(e_i)}$ do $K^{(e_n)}$. (Označíme ho φ_n^i).*

Dôkaz. Podľa vety 1 pre $x \in K^{(e_i)}$ platí $xe_k \in K^{(e_n)}$. Platí tiež $(x_1 e_k)(x_2 e_k) = (x_1 x_2) e_k$.

Poznámka 13. Nech $e_t \varrho e_s \varrho e_i$. Potom pre zobrazenia φ_s^i a φ_t^s zrejme platí $\varphi_t^s \varphi_s^i = \varphi_t^i$.

Veta 10. *Nech $e_i e_k = e_n$, $e_i e_s = e_n$, $e_k \varrho e_s$. Nech $\varphi_n^i(\overline{\varphi}_n^i)$ je homomorfné zobrazenie z vety 9 dané prvkom $e_k(e_s)$. Potom zobrazenia φ_n^i a $\overline{\varphi}_n^i$ sú na grupe $G^{(e_i)}$ totožné. (T. j. pre každé $x \in G^{(e_i)}$ je $xe_s = xe_k$).*

Dôkaz. $e_k \varrho e_s$ značí $e_k = e_s e_k$. Potom $xe_k = (xe_s) e_k$, z čoho podľa lemmy 4 vyplýva, že $xe_k = xe_s$.

Veta 11. *Nech e je idempotent v S. Potom pre (homomorfné) zobrazenie $x \to xe$ pologrupy S do seba (označme ho φ) platí: ku každej F-triede F existuje taká F-trieda F', že $\varphi F \subseteq F'$. Pritom je $F' \leq F$.*

Dôkaz. Nech $x, y \in F$. To značí, alebo $x = y$, alebo $y = sx$ $(s \in S)$. Ak $y = sx$, platí $ey = esx = sex$, čo značí $ey \in (ex)$. Teda $(ye) \subseteq (xe)$. Podobne sa ukáže $(xe) \subseteq (ye)$. Prípad $x = y$ je zrejmý. Vzťah $F' \leq F$ vyplýva zo vzťahu $(xe) \subseteq (x)$.

Veta 12. *Nech v S sú všetky K-triedy grupami. Nech zobrazenie Γ pologrupy S na S je automorfizmom na každej z nich. Nech pre všetky homomorfné zobrazenia φ_i^s (z vety 9) p [illegible] ${}_i^s\Gamma y = \Gamma \varphi_i^s$ (pre $y \in K^{(e_s)}$). Potom zobrazenie Γ je automorfizmom na pologrupe S.*

Dôkaz. Nech $x, y \in S$. Nech $K^{(e_k)}$, $(K^{(e_n)})$ je K-trieda obsahujúca

prvok $x(y)$. Označme $e_n e_k = e_i$. Potom použitím lemmy 2 a 4 dostávame:

$$\Gamma(xy) = \Gamma(xe_k e_n y) = \Gamma(xe_n y e_k) = \Gamma(\varphi_i^k x \varphi_i^n y) = \Gamma(\varphi_i^k x)\, \Gamma(\varphi_i^n y) =$$
$$= (\varphi_i^k \Gamma x)(\varphi_i^n \Gamma y) = \Gamma x e_n \Gamma y e_k = \Gamma x e_n \Gamma y e_n = \Gamma x \Gamma y.$$

Lemma 13. *Nech v S sú všetky K-triedy grupami. Nech $x \in G^{(e_i)}$, $y \in G^{(e_k)}$, $e_i e_k = e_n$. Potom platí $(\varphi_n^i x)(\varphi_n^k y) = xy$.*

Dôkaz. Z vety 9 a 10, ako aj lemmy 2 vyplýva $(\varphi_n^i x)(\varphi_n^k y) = (xe_k)(ye_i) = x(e_k y) e_i = (xy) e_i = xy$.

Posledná lemma nám ukazuje konštrukciu každej komutatívnej periodickej pologrupy, ktorej K-triedy sú grupy (uvedenú už v práci [4]). Veta 9 však ukazuje možnosť konštrukcie komutatívnych periodických pologrúp, ktorých K-triedy nemusia byť grupami. Konštrukcia je takáto:

Zvoľme reťazec R (usporiadanú množinu) prvkov, pre ktoré definujeme súčin vzhľadom na usporiadanie takto: ak $e_i \leq e_k$, tak $e_i e_k = e_k e_i = e_i$. Dostaneme tým pologrupu idempotentov $I(S)$. Každému prvku $e_i \in I(S)$ priraďme komutatívnu periodickú pologrupu s jediným idempotentom e_i; označme ju $K^{(e_i)}$. Ak $e_k \leq e_i$ priraďme pologrupe $K^{(e_i)}$ jej homomorfné zobrazenie φ_k^i do pologrupy $K^{(e_k)}$. Od takto zavedených homomorfizmov žiadajme, aby platil vzťah $\varphi_l^i \varphi_i^k = \varphi_l^k$. (V prípade, že medzi ľubovoľnými dvoma prvkami reťazca R je len konečný počet prvkov, dá sa podmienka ľahko splniť). Označme S množinový súčet všetkých množín $K^{(e_i)}$. Definujme na S násobenie takto: nech $x \in K^{(e_i)}$, $y \in K^{(e_i)}$, potom $x \cdot y = xy$ (súčin xy v $K^{(e_i)}$). Nech $x \in K^{(e_i)}$, $y \in K^{(e_k)}$, $e_i = e_k e_i$. Potom $x \cdot y = y \cdot x = (\varphi_i^k \cdot y)\, x$. Ľahko sa vidí, že takto dostávame komutatívnu periodickú pologrupu, ktorej K-triedami sú práve množiny $K^{(e_i)}$.

LITERATÚRA

[1] Š. Schwarz, К теории периодических полугрупп, Чехослов. мат. журнал 3 (78), (1953), 7—21.

[2] Š. Schwarz, Teoria pologrúp, sborník prác Prírodovedeckej fak. Slov. univerzity Bratislava, 6 (1943), 1—64.

[3] J. A. Green, On the structure of semigroups, Annals of Math. 54 (1951), 163—172.

[4] A. H. Clifford, Semigroups admitting relative inverses, Annals of Math., 42 (1941), 1037—1049.

[5] M. Benado, Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de Schreier II, Czechoslov. mat. journ. 5 (80), (1955), 308—344.

[6] H. Hermes, Einführung in die Verbandstheorie, Berlin 1955.

Došlo 26. 10. 1957.

Katedra matematiky Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave

О КОММУТАТИВНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОЛУГРУППАХ

БЛАНКА КОЛИБИАРОВА

Выводы

Пусть S периодическая коммутативная полугруппа. Множество идемпотентов полугруппы S образует частичную полугруппу $I(S)$ полугруппы S, которая является полуструктурой. (Соответствующее отношение частичного упорядочения обозначим через ϱ.)

Мы скажем, что элемент $s \in S$ принадлежит к данному идемпотенту e, если существует натуральное число n такое, что $s^n = e$. Множество всех элементов принадлежащих к идемпотенту e мы называем K-классом принадлежащим к идемпотенту e и обозначим его через $K^{(e)}$. Факторполугруппа $\mathscr{K}$ полугруппы S элементы, которой K-классы является полуструктурой. — Во второй части изучаются некоторые свойства полугруппы $\mathscr{K}$.

Мы скажем, что элемент x порождает главный идеал I, если имеет место $I = \{x\} \cup Sx$. Множество всех элементов $x \in S$ порождающих один и тот же идеал I, называется F-классом и обозначается F_x. Факторполугруппа $\mathscr{F}$ полугруппы S элементы которой F-классы, является направленным внизу множеством. (Соотвествующее отношение частичного упорядочения обозначим через $\leq$.) Если всякая возрастающая цепь F-классов конечна, то $\mathscr{F}$ является специальным частично упорядоченным множеством, названным мултиполуструктурой (натуральное обобщение понятия введённого в работе [5]), которая может являться и полуструктурой. — Существует гомоморфное отображение полугруппы S на $\mathscr{F}$ и гомоморфное отображение h $\mathscr{F}$ на $\mathscr{K}$. Полугруппы $I(S)$ и $\mathscr{K}$ изоморфны.

Содержанием третьей части является изучение полугруппы $\mathscr{F}$ и взаимной связи идеалов с полугруппами $\mathscr{F}$ и $I(S)$. Показывается например: **теорема** 4. Пусть $F_y \leqq F_x$. $F_{xy} = F_y$ тогда и только тогда, когда F_y группа. — **Теорема 6.** Если в S всякая убывающая цепь главных идеалов конечна, конечна тоже всякая убывающая цепь идемпотентов (в смысле выше указанного частичного упорядочения). Обратная теорема неверна, как показывает пример. — **Теорема 7.** Для того, чтобы коммутативная периодическая полугруппа имела главный минимальный идеал п, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого идемпотента $e \in S$ имело место отношение $e\varrho e_i$ для всякого $e_i \in I(S)$. При этом идеал п совпадает с группой $G^{(e)}$. — **Теорема 8.** Если $S = \{x\} \cup Sx$ для некоторого $x \in S$, то $I(S)$ обладает единицей. Обратная теорема неверна.

В части 4 изучаются некоторые свойства гомоморфного отображения $K^{(e_i)}$ в $K^{(e_n)}$ обозначенного через φ_n^i Имеет место например следующая теорема: **теорема 11.** Пусть $e \in S$ идемпотент. Для гомоморфного отображения $x \to xe$ (обозначим его через φ) имеет место: для всякого F-класса F существует F-класс $F' \leqq F$ для которого имеет место отношение $\varphi F \subseteq F'$.

Далее показана конструкция из данных коммутативных периодических полугрупп (упорядоченных в цепь) такой полугруппы S, которая имеет K-классами данные полугруппы.

ÜBER KOMMUTATIVE PERIODISCHE HALBGRUPPEN

BLANKA KOLIBIAROVÁ

Zusammenfassung

Sei S eine kommutative periodische Halbgruppe. Die Menge der Idempotente von S bildet eine Unterhalbgruppe $I(S)$ von S, die ein Halbverband ist. (Die angehörige Anordnungsrelation wird mit ϱ bezeichnet.)

Man sagt, daß ein Element $s \in S$ zum Idempotent $e \in S$ gehört, wenn es eine solche natürliche Zahl n gibt, daß $s^n = e$ gilt. Die Menge aller zum Idempotent e gehörigen Elemente wird eine zum Idempotent e gehörige K-Klasse genannt und mit $K^{(e)}$ bezeichnet. Die Faktorhalbgruppe $\mathscr{K}$ in S, deren Elemente die K-Klassen sind, ist ein Halbverband. Im Abteil 2 werden einige Eigenschaften von $\mathscr{K}$ betrachtet.

Man sagt, daß ein Hauptideal I durch das Element x erzeugt wird, wenn $I = \{x\} \cup Sx$ ist. Die Menge derjenigen Elemente $x \in S$ die dasselbe Hauptideal erzeugen wird eine F-Klasse genannt und mit F_x bezeichnet. Die Faktorhalbgruppe $\mathscr{F}$ in S, deren Elemente F-Klassen sind, bildet eine nach unten gerichtete Menge (die angehörige Anordnungsrelation wird mit $\leqq$ bezeichnet). Ist jede aufsteigende Kette der F-Klassen endlich, bildet $\mathscr{F}$ eine spezielle halbgeordnete Menge die wir Vielhalbverband nennen (eine natürliche Verallgemeinerung des von Benado [5] eingeführten Begriffs) der speziell auch ein Halbverband sein kann. — Es gibt eine homomorphe Abbildung von S auf $\mathscr{F}$ und eine homomorphe Abbildung h von $\mathscr{F}$ auf $\mathscr{K}$. Die Halbgruppe $I(S)$ ist zur Halbgruppe $\mathscr{K}$ isomorph.

Im Abteil 3 werden ferner einige Eigenschaften der Halbgruppe $\mathscr{F}$ und der Ideale im Zusammenhang mit $\mathscr{F}$ und $I(S)$ betrachtet, wie z. B.: **Satz 4.** Sei $F_y \leq F_x$. Dann gilt $F_{xy} = F_y$ genau dann, wenn F_y eine Gruppe ist. — **Satz 6.** Ist in S jede absteigende Kette von Hauptidealen endlich, so ist auch jede absteigende Kette von Idempotenten endlich (im Sinne der oben angegebenen Anordnung). Dieser Satz kann nicht umgekehrt werden wie es das Beispiel zeigt. — **Satz 7.** Damit die kommutative periodische Halbgruppe ein minimales Hauptideal п hat, ist notwendig und hinreichend, daß es ein Idempotent $e \in S$ gibt, das die Eigenschaft $e\varrho e_i$ für alle $e_i \in I(S)$ hat. Dann stimmt п mit der Gruppe $G^{(e)}$ überein. — **Satz 8.** Ist $S = \{x\} \cup Sx$ für ein $x \in S$, so besitzt die Halbgruppe $I(S)$ das Einselement. Dieser Satz kann nicht umgekehrt werden.

Im Abteil 4 wird eine mit φ_n^i bezeichnete homomorphe Abbildung von $K^{(e_i)}$ in $K^{(e_n)}$ betrachtet. Es gilt z. B.: **Satz 11.** Sei $e \in S$ ein Idempotent. Für die homomorphe Abbildung $x \to xe$ (bezeichnet mit φ) gilt: zu jeder F-Klasse F gibt es eine F-Klasse $F' \leq F$, die die Eigenschaft $\varphi F \subseteq F'$ hat.

Endlich wird gezeigt, wie aus gegebenen kommutativen periodischen Halbgruppen (die in eine Kette geordnet sind) eine neue Halbgruppe S, deren K-Klassen die gegebenen Halbgruppen sind, konstruiert werden kann.