MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK VIII ČÍSLO 2

CYKLOGRAFICKÉ ZOBRAZENIE V ROVINE

VÁCLAV MEDEK, Bratislava

P. Hohenberg poukázal vo svojom podnetnom článku [1] na rozličné možnosti zovšeobecnenia premietacích metód n-rozmerných priestorov. Jedna možnosť je zovšeobecnenie cyklografického zobrazenia v rovine (pozri [2]).

1. Budeme zobrazovať body rozšírenej reálnej euklidovskej roviny ϱ na usporiadané dvojice bodov euklidovskej priamky p (doplnenej nevlastným bodom) roviny ϱ.

Zvoľme dva rôzne body ${}^1O$, ${}^2O$, ktoré ležia v rovine ϱ, ale neprislúchajú priamke p. Ľubovoľnému bodu $A \neq {}^iO$ ($i = 1, 2$) roviny ϱ priradíme usporiadanú dvojicu bodov (${}^1A$, ${}^2A$), kde ${}^iA$ je priesečník spojnice ${}^iOA$ s priamkou p. Ak bod A splýva s bodom ${}^1O$, priradíme mu len bod ${}^2A$, ktorý je zároveň priesečníkom spojnice o bodov ${}^1O$, ${}^2O$ s priamkou p. Podobne bodu A, ktorý splýva s bodom ${}^2O$, priradíme iba bod ${}^1A$. Bodom ${}^1A$ budeme hovoriť prvé a bodom ${}^2A$ druhé priemety bodov A. Vidíme, že každý bod roviny, s výnimkou bodov ${}^1O$, ${}^2O$ (prvého a druhého stredu premietania), má obidva priemety. Bod ${}^1O$ má len druhý a bod ${}^2O$ len prvý priemet.

Ak zvolíme body ${}^1O$, ${}^2O$ v nevlastných bodoch dvoch navzájom kolmých priamok ${}^1o$, ${}^2o$ a priamku p v jednej zo symetrál uhla priamok ${}^1o$, ${}^2o$, dostaneme zobrazenie opísané v [2].

Duálne môžeme zaviesť zobrazenie priamok roviny ϱ na usporiadané dvojice priamok prechádzajúce bodom P. Nech žiadna z rôznych priamok ${}^1o$, ${}^2o$ neprechádza bodom P. Nech ľubovoľná priamka $a \neq {}^io$ pretína priamky ${}^1o$, ${}^2o$ v bodoch ${}^1A$, ${}^2A$. Potom priamke a priradíme priamky ${}^1a \equiv P{}^1A$ a ${}^2a \equiv P{}^2A$. Ak priamka a splýva s niektorou z priamok ${}^io$, pokračujeme duálne k predchádzajúcemu prípadu. Priamkam ${}^1a$, ${}^2a$ budeme hovoriť duálne priemety priamky a a priamkam ${}^1o$, ${}^2o$ duálne stredy premietania.

Nech bod R je priesečník priamok op. Potom ľubovoľnej usporiadanej dvojici bodov (${}^1A$, ${}^2A$) priamky p, ak ani jeden z bodov ${}^1A$, ${}^2A$ nesplýva s bodom R, odpovedá jediný bod A taký, že body ${}^1A$, ${}^2A$ sú jeho prvým a druhým priemetom. Skutočne, spojnice ${}^1O{}^1A$, ${}^2O{}^2A$ sa pretínajú v jedinom bode, hľadanom bode A. Ak body ${}^1A$, ${}^2A$ splývajú, ale sú rôzne od bodu R, splýva s nimi aj bod A. Ak body ${}^1A$, ${}^2A$ splývajú s bodom R_i, tak touto dvojicou sú charakterizované všetky body priamky o (s výnimkou bodov ${}^1O$, ${}^2O$). Body ${}^1O$, ${}^2O$ majú iba po jednom priemete, ktorý splýva s bodom R_i, ich druhé priemety neexistujú.

Podobné vzťahy platia pre duálne zobrazenie.

Vymeňme teraz navzájom body ${}^1A$, ${}^2A$ a hľadajme vzťah medzi bodmi A, $\bar{A}$, pričom bod A má priemety ${}^1A$, ${}^2A$ a bod $\bar{A}$ má priemety ${}^1\bar{A} \equiv {}^2A$, ${}^2\bar{A} \equiv {}^1A$. Z vlastností úplného štvorrohu ${}^1O$, ${}^2O$, ${}^1A$, ${}^2A$ priamo vyplýva, že vzťah medzi bodmi A, $\bar{A}$ je involutórna kolineácia pre stred v bode S na priamke o, pričom $({}^1O{}^2ORS) = -1$, a os v priamke p. Skutočne: 1. Štvorroh ${}^1O$, ${}^2O$, ${}^1A$ ${}^2A$ má diagonálne vrcholy A, $\bar{A}$, R a teda spojnice $A\bar{A}$ prechádzajú vždy bodom S. Ak spojnica $A\bar{A}$ pretína priamku p v bode α, platí $(S\alpha A\bar{A}) = -1$. Jednému bodu A zodpovedá jediný bod $\bar{A}$ a naopak. 2. Nech a je ľubovoľná priamka prechádzajúca bodom A a nech pretína priamku p v bode A'. Spojnicu $A'\bar{A}$ označme $\bar{a}$. Potom zrejme každému bodu priamky a odpovedá bod priamky $\bar{a}$ a priamky $\bar{a}$, a sa pretínajú na osi kolineácie. 3. Ak bod A leží na priamke a, bod $\bar{A}$ leží na priamke $\bar{a}$. Ak bod A leží na priamke p, zrejme $A \equiv \bar{A}$.

2. Nech a je ľubovoľná priamka roviny ϱ, ktorá neprechádza ani jedným z bodov ${}^1O$, ${}^2O$. Body A priamky a premietajú sa z bodov ${}^1O$, ${}^2O$ dvoma perspektívnymi zväzkami priamok a medzi bodovými radmi ${}^1A$, ${}^2A$ na priamke p je projektívny vzťah ${}^a\Pi$. Samodružné body projektivity ${}^a\Pi$ sú bod R, ktorý je priemetom priesečníka ${}^aU$ priamok ao a priesečník P (stopník) priamky a s priamkou p (ak priamka a splýva s priamkou p, projektivita ${}^p\Pi$ je identitou). Nech bod A priamky a nesplýva so žiadnym z bodov P, ${}^aU$. Body ${}^1O$, ${}^2O$, ${}^aU$, R priamky o premietajú sa vtedy z bodu A na priamku p do bodov ${}^1A$, ${}^2A$, P, R. Preto dvojpomery $({}^1O{}^2O{}^aUR)$ a $({}^1A{}^2APR)$ sú rovnaké a sú rovné charakteristickému dvojpomeru projektivity ${}^a\Pi$. Naopak, ak samodružné body projektivity ${}^a\Pi$ nesplývajú, je nimi a charakteristickým dvojpomerom priamka a jednoznačne určená.

Ak priamka a prechádza bodom R a nesplýva ani s jednou z priamok o, p, definuje na priamke p projektivitu ${}^a\Pi$ s jediným samodružným bodom R.

Ak priamka a prechádza napr. bodom ${}^1O$ a nesplýva s priamkou o, tak projektivita ${}^a\Pi$ je singulárna I. druhu so singulárnym bodom 1. druhu v bode R a singulárny bod 2. druhu je stopník P priamky a [3].

Priamke o priraďujeme singulárnu projektivitu II. druhu so singulárnym bodom v bode R.

(Singulárna projektivita I. druhu má jeden bod — singulárny bod 1. druhu —, ktorému nezodpovedá žiaden bod, a jeden bod — singulárny bod 2. druhu —, ktorý zodpovedá všetkým ostatným bodom a je rôzny od predchádzajúceho bodu. Pre singulárnu projektivitu II. druhu obidva tieto body splývajú.)

3. Zvoľme súradnicový systém v rovine ϱ taký, že priamka p má rovnicu $x_3 = 0$, bod ${}^1O$ má súradnice $(0, 0, 1)$ a bod ${}^2O$ má súradnice $(1, 1, 1)$. Potom bod

$A(a_1, a_2, a_3)$ má priemety ${}^1A(a_1, a_2, 0)$, ${}^2A(a_3 - a_1, a_3 - a_2, 0)$. Bod R má súradnice $(1, 1, 0)$.

Ľubovoľná priamka a nech má rovnicu $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$. Ľubovoľná priamka ${}^1a$ bodom ${}^1O$ má rovnicu $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = 0$ a priamka ${}^2a$ bodom ${}^2O$ má rovnicu $\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 - (\eta_1 + \eta_2) x_3 = 0$. Ak priamky ${}^1a{}^2a$ majú prechádzať tým istým bodom priamky a, musí

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & -\eta_1 - \eta_2 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{1}$$

čiže

$$\varrho\zeta_1 = (\xi_1 + \xi_3)\,\eta_1 + \xi_1\eta_2, \quad \varrho\zeta_2 = \xi_2\eta_1 + (\xi_2 + \xi_3)\,\eta_2. \tag{2}$$

Pre súradnice ${}^1x_1$; ${}^1x_2$ priesečníka ${}^1A$ priamky ${}^1a$ s priamkou p platí ${}^1x_1 : {}^1x_2 = -\zeta_2 : \zeta_1$ a pre súradnice ${}^2x_1$, ${}^2x_2$ priesečníka ${}^2A$ priamky ${}^2a$ s priamkou p platí ${}^2x_1 : {}^2x_2 = -\eta_2 : \eta_1$. Z rovníc (2) vyplýva potom vzťah medzi súradnicami bodov ${}^1A{}^2A$:

$$\sigma{}^1x_1 = (\xi_2 + \xi_3){}^2x_1 - \xi_2{}^2x_2, \quad \sigma{}^1x_2 = -\xi_1{}^2x_1 + (\xi_1 + \xi_3){}^2x_2. \tag{3}$$

Rovnice (3) sú rovnicami projektivity ${}^a\Pi$. Determinant tejto projektivity má hodnotu $\xi_3(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)$ a je teda rovný nule, ak priamka a prechádza niektorým z bodov ${}^1O$, ${}^2O$; potom je projektivita ${}^a\Pi$ singulárna.

Z tvaru rovníc (3) priamo vyplýva, že zväzku priamok bude zodpovedať zväzok projektivít na priamke p [3]. Naopak, podľa typu tohto zväzku projektivít môžeme usúdiť na polohu uvažovaného zväzku priamok vzhľadom na body ${}^1O$, ${}^2O$ a priamku p. Sú tieto možnosti:

a) (Zväzok typu I 1.) Zväzok projektivít tvoria projektivity s dvoma pevnými rôznymi samodružnými bodmi P, R, ďalej dve singulárne projektivity I. druhu, ktoré majú body P, R za singulárne body a identická projektivita. Zväzok priamok má stred na priamke p v bode $P \not\equiv R$.

b) (Zväzok typu I 2.) Zväzok projektivít obsahuje projektivity s jedným pevným samodružným bodom R, singulárnu projektivitu II. druhu so singulárnym bodom v bode R a identickú projektivitu. Zväzok priamok má stred v bode R.

c) (Zväzok typu III 1, resp. 2.) Zväzok obsahuje okrem jednej singulárnej projektivity II. druhu samé singulárne projektivity I. druhu s pevným singulárnym bodom 1. druhu, resp. 2. druhu. Zväzok priamok má stred v bode ${}^2O$, resp. ${}^1O$.

d) (Zväzok typu IV 2b.) Zväzok projektivít obsahuje samé hyperbolické projektivity a jednu singulárnu projektivitu II. druhu. Zväzok priamok má stred na priamke o rôzny od bodov ${}^1O$, ${}^2O$, R.

e) (Zväzok typu IV 2c.) Zväzok projektivít obsahuje hyperbolické projektivity, jednu parabolickú a dve singulárne projektivity I. druhu. Zväzok priamok má stred, ktorý neleží ani na spojnici ${}^1O{}^2O$ ani na priamke p.

4. Zaoberajme sa teraz kužeľosečkami, ktoré prechádzajú bodmi ${}^1O$, ${}^2O$ (budeme ich nazývať o-kužeľosečkami). Body K takejto kužeľosečky sa premietajú z bodov ${}^1O$, ${}^2O$ projektívnymi zväzkami priamok a teda medzi prvými a druhými priemetmi bodov o-kužeľosečky bude projektívny vzťah. V opísanom súradnicovom systéme bude mať o-kužeľosečka k rovnicu

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 - (a_{11} + a_{22} + 2a_{12} + 2a_{13})\, x_2x_3 = 0. \tag{4}$$

Nech prvý priemet bodu K o-kužeľosečky k má súradnice $({}^1x_1, {}^1x_2, 0)$. Bod K bude mať potom súradnice k_1, k_2, k_3, kde

$$\begin{aligned} k_1 &= (a_{11} + a_{22} + 2a_{12} + 2a_{13})\, {}^1x_1{}^1x_2 - 2a_{13}{}^1x_1^2, \\ k_2 &= (a_{11} + a_{22} + 2a_{12} + 2a_{13})\, {}^1x_2^2 - 2a_{13}{}^1x_1{}^1x_2, \\ k_3 &= a_{11}{}^1x_1^2 + a_{22}{}^1x_2^2 + 2a_{12}{}^1x_1{}^1x_2. \end{aligned} \tag{5}$$

Druhý priemet bodu K má potom súradnice ${}^2x_1$, ${}^2x_2$, 0, kde

$$\begin{aligned} \varrho\, {}^2x_1 &= (a_{11} + 2a_{13}){}^1x_1^2 - (a_{11} + a_{22} + 2a_{13})\, {}^1x_1{}^1x_2 + a_{22}{}^1x_2^2 = \\ &= ({}^1x_1 - {}^1x_2)\, [a_{11}{}^1x_1 + (a_{11} + 2a_{12} + 2a_{13})\, {}^1x_2], \\ \varrho\, {}^2x_2 &= a_{11}{}^1x_1^2 + 2(a_{12} + a_{13})\, {}^1x_1{}^1x_2 - (a_{11} + 2a_{12} + 2a_{13})\, {}^1x_2^2 = \\ &= ({}^1x_1 - {}^1x_2)\, [(a_{11} + 2a_{13})\, {}^1x_1 - a_{22}{}^1x_2]. \end{aligned} \tag{6}$$

Za predpokladu ${}^1x_1 \neq {}^1x_2$ môžeme teda písať

$$\begin{aligned} \varrho\, {}^2x_1 &= (a_{11} + 2a_{13})\, {}^1x_1 - a_{22}{}^1x_2, \\ \varrho\, {}^2x_2 &= a_{11}{}^1x_1 + (a_{11} + 2a_{12} + 2a_{13})\, {}^1x_2. \end{aligned} \tag{7}$$

Ak ${}^1x_1 = {}^1x_2$, bod ${}^1K$ splýva s bodom R. Potom môžu nastať tieto prípady: a) o-kužeľosečka k je pravá; potom rovnice (7) priraďujú bodu R práve priesečník jej tangenty v bode ${}^2O$ s priamkou p. b) o-kužeľosečka k sa skladá z dvoch priamok, z ktorých ani jedna nesplýva so spojnicou ${}^1O{}^2O$; potom rovnice (7) priraďujú bodu R priesečník priamky prechádzajúcej bodom ${}^2O$ s priamkou p. c) o-kužeľosečka sa skladá zo spojnice ${}^1O{}^2O$ a z priamky m bodom ${}^2O$; potom rovnice (7) priraďujú bodu R priesečník priamok mp. d) Ak sa o-kužeľosečka k rozpadá v spojnicu ${}^1O{}^2O$ a priamku bodom ${}^1O$, priraďujú rovnice (7) bodu R ten istý bod. e) Ak sa o-kužeľosečka k rozpadá v dvojnásobne počítanú priamku o, nepriraďujú rovnice (7) bodu R žiaden bod.

Rovnice (7) vystihujú teda v plnom rozsahu vlastnosti žiadanej projektívnej príbuznosti na priamke p, a teda môžeme nimi nahradiť rovnice (6).

Projektívna príbuznosť (7) je singulárna, ak jej determinant Δ je rovný nule:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} + 2a_{13} & -a_{22} \\ a_{11} & a_{11} + 2a_{12} + 2a_{13} \end{vmatrix} = \\ = (a_{11} + a_{22} + 2a_{12} + 2a_{13})(a_{11} + 2a_{13}) - 2a_{13}a_{22} = 0. \tag{8}$$

Môžu nastať dva prípady: a) $a_{11} + 2a_{13} = 0$, $b)$ $a_{11} + 2a_{13} \neq 0$. V prípade a) musí alebo α) $a_{13} = 0$, alebo β) $a_{22} = 0$. Pre prípad aα) je rovnica o-kužeľosečky

$$x_2[2a_{12}x_1 + a_{22}x_2 - (a_{22} + 2a_{12})\, x_3] = 0$$

a táto o-kužeľosečka sa rozpadá vo dve priamky, z ktorých jedna prechádza bodom ${}^1O$ a druhá bodom ${}^2O$.

Pre prípad aβ) je rovnica o-kužeľosečky

$$(a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2)\,(x_1 - x_3) = 0$$

a táto o-kužeľosečka sa rozpadá ako v predchádzajúcom prípade.

Pre prípad b) môžeme písať

$$-2A_{23} = a_{11} + a_{22} + 2a_{12} + 2a_{13} = \frac{2a_{13}a_{22}}{a_{11} + 2a_{13}}.$$

Diskriminant A o-kužeľosečky je

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & A_{23} \\ a_{13} & A_{23} & 0 \end{vmatrix} = -a_{11}A_{23}^2 + 2a_{12}a_{13}A_{23} - a_{13}^2a_{22} =$$

$$= -a_{11}\frac{a_{13}^2\, a_{22}^2}{(a_{11} + 2a_{13})^2} - 2\frac{a_{13}^2a_{12}a_{22}}{a_{11} + 2a_{13}} - a_{13}^2a_{22} = -\frac{a_{13}^2\, a_{22}}{(a_{11} + 2a_{13})^2}\Delta = 0$$

a o-kužeľosečka opäť degeneruje.

Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že ak projektívna príbuznosť (7) je singulárna, degeneruje aj príslušná o-kužeľosečka. Opačné tvrdenie nie je správne.

5. Z tvaru rovníc (7) priamo vyplýva, že zväzku o-kužeľosečiek je priradený zväzok príslušných projektivít na priamke p. Naopak, podľa typu tohto zväzku projektivít môžeme usúdiť na typ príslušného zväzku o-kužeľosečiek. Sú tieto možnosti pre typ zväzku:

a) (Zväzok typu I 1.) Zväzok o-kužeľosečiek má okrem bodov ${}^1O{}^2O$ ďalšie dva rôzne základné body M, N na priamke p rôzne od bodu R.

b) (Zväzok typu I 2.) Body M, N splývajú na priamke p, $M \neq R$, priamka p je spoločnou tangentou o-kužeľosečiek zväzku.

c) (Zväzok typu I 3.) Zväzok projektivít tvoria, okrem identickej projektivity, eliptické projektivity charakterizované jedinou eliptickou involúciou obsiahnutou vo zväzku. o-kužeľosečky zväzku nemajú okrem bodov ${}^1O$, ${}^2O$ žiaden spoločný bod a jedna degenerovaná kužeľosečka zväzku sa skladá z priamok o, p.

d) (Zväzok typu II 1.) Zväzok projektivít obsahuje projektivity s jedným pevným samodružným bodom a danou hodnotou charakteristického dvojpomeru a jednu singulárnu projektivitu II. druhu. Zväzok o-kužeľosečiek je určený bodom M priamky p a tangentou v bode M, ktorá neprechádza žiadnym z bodov ${}^1O{}^2OR$.

e) (Zväzok typu II 2a.) Zväzok projektivít obsahuje okrem dvoch singulárnych projektivít II. druhu eliptické a hyperbolické involúcie, pričom samodružné body hyperbolických involúcií tvoria involúciu. Zväzok o-kužeľosečiek je určený rôznymi bodmi MN, ktoré neležia na priamke p, ale spojnice ${}^1OM$ a ${}^2ON$ a taktiež spojnice ${}^1ON$ a ${}^2OM$ sa pretínajú na priamke p. Priamka p je teda diagonálnou stranou úplného štvorrohu ${}^1O$, ${}^2O$, M, N protiľahlou k diagonálnemu vrcholu. ktorý je priesečníkom spojníc ${}^1O{}^2O$ a MN.

f) (Zväzok typu II 2b.) Zväzok projektivít obsahuje jednu singulárnu projektivitu II. druhu a hyperbolické involúcie s jedným pevným samodružným bodom. Zväzok o-kužeľosečiek je určený bodom M na priamke p a tangentou m v bode M. Ak M' je priesečníkom tangenty m s priamkou o, platí $({}^1O{}^2OM'R) = -1$.

g) (Zväzok typu II 2c.) Zväzok projektivít obsahuje len hyperbolické involúcie, ktorých samodružné body tvoria opäť involúciu. o-kužeľosečky zväzku nemajú okrem bodov ${}^1O$, ${}^2O$ žiaden spoločný bod a jedna degenerovaná kužeľosečka zväzku sa skladá zo spojnice ${}^1O{}^2O$ a z priamky $m \neq p$ neprechádzajúcej žiadnym z bodov ${}^1O$, ${}^2O$. Ak M je priesečník priamky m s priamkou o, priamka p je spoločná polára všetkých kužeľosečiek zväzku vzhľadom na pól M.

h) (Zväzok typu III 1.) Všetky kužeľosečky zväzku sú degenerované a skladajú sa z jednej pevnej priamky bodom ${}^1O$ a z priamok prechádzajúcich bodom ${}^2O$.

i) (Zväzok typu III 2.) Všetky kužeľosečky zväzku sú degenerované a skladajú sa z jednej pevnej priamky bodom ${}^2O$ a z priamok prechádzajúcich bodom ${}^1O$.

j) (Zväzok typu IV 1.) Zväzok projektivít obsahuje hyperbolické, eliptické a dve parabolické projektivity; samodružné body hyperbolických projektivít tvoria hyperbolickú involúciu. Zväzok o-kužeľosečiek indukuje na priamke p hyperbolickú involúciu a neobsahuje žiadne degenerované kužeľosečky, ktoré by sa skladali z priamky o a z priamky bodom ${}^1O$, resp. ${}^2O$.

k) l) (Zväzky typov IV 1a, b.) Zväzky projektivít sa líšia od predchádzajúceho tým, že obsahujú ešte 2, resp. 1 singulárnu projektivitu I. druhu. Zväzky o-kužeľosečiek obsahujú dve degenerované kužeľosečky typu opísaného v j) (pritom sa priamky bodmi ${}^1O{}^2O$ nepretínajú na priamke p), resp. len jednu takú degenerovanú kužeľosečku.

m) (Zväzok typu IV 1c.) Zväzok projektivít sa líši od zväzku IV 1 tým, že obsahuje jednu singulárnu projektivitu II. druhu a jednu I. druhu. Zväzok o-kužeľosečiek sa líši od zväzku j) tým, že obsahuje jednu degenerovanú kužeľosečku skladajúcu sa z priamok ${}^1o$, ${}^2o$ bodmi ${}^1O$, ${}^2O$ takých, že sa pretínajú na priamke p a druhú skladajúcu sa z priamky o a priamky bodom ${}^1O$, resp. ${}^2O$.

n) (Zväzok typu IV 2a.) Zväzok projektivít tvoria hyperbolické projektivity a jedna parabolická. Zväzok o-kužeľosečiek má práve jeden zo základných bodov na priamke p. Zväzok má štyri rôzne základné body.

o) (Zväzok typu IV 2b.) Zväzok o-kužeľosečiek je určený dvoma tangentami v bodoch ${}^1O$, ${}^2O$, ktoré sa nepretínajú na priamke p.

p) (Zväzok typu IV 2c.) Zväzok degenerovaných kužeľosečiek skladajúcich sa z priamky o a priamok bodom M, ktorý neleží na žiadnej z priamok o, p.

q) (Zväzok typu IV 3a.) Zväzok projektivít obsahuje samé hyperbolické projektivity; samodružné body týchto projektivít tvoria eliptickú involúciu. Zväzok o-kužeľosečiek obsahuje jedinú degenerovanú kužeľosečku skladajúcu sa z priamky o a priamky m neprechádzajúcej žiadnym z bodov ${}^1O$, ${}^2O$, R. Ani jedna kužeľosečka zväzku nepretína priamku m.

r) s) (Zväzky typov IV 3b, c.) Zväzky projektivít sa líšia od predchádzajúceho iba tým, že obsahujú jednu, resp. dve singulárne projektivity I. druhu. Zväzok o-kužeľosečiek je určený okrem bodov ${}^1O$, ${}^2O$ ešte tangentou s bodom dotyku, resp. dvoma bodmi, pričom zväzok indukuje na priamke p eliptickú involúciu.

LITERATÚRA

[1] Hohenberg, Projektionen projektiver Räume, Monatshefte für Mathematik, 1957.

[2] Müller—Krames, Vorlesungen über darstellende Geometrie II, 1929.

[3] Medek, Lineárne systémy projektívnych príbuzností na priamke, Matematicko-fyzikálny časopis VI (1956), 98—108.

Došlo 13. 5. 1957.

Katedra deskriptívnej geometrie
Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave

ЦЫКЛОГРАФИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ В ПЛОСКОСТИ

ВАЦЛАВ МЕДЕК

Выводы

В этой статьи автор занимается частным случаем отображения точек проективной плоскости ϱ на упорядоченные пары точек прямой линии p. Всякой прямой линии плоскости ϱ отвечает потом некоторое проективное соответствие точек прямой линии p. В плоскости ϱ существуют линии второго порядка обладающие тем-же свойством. Исследуются пучки прямых линии и этих кривых второго порядка и соответствующие пучки проективных соответствий прямой линии p.

ZYKLOGRAPHISCHE ABBILDUNG IN DER EBENE

VÁCLAV MEDEK

Zusammenfassung

In dieser Abhandlung ist eine spezielle Abbildung der Punkte projektiver Ebene ϱ auf angeordnete Punktepaare einer Geraden p untersucht. Jeder Geraden der Ebene ϱ ist dann eine projektive Verwandtschaft von Punkten der Geraden p zugeordnet. Es gibt auch gewisse Kegelschnitte (o-Kegelschnitte), welche dieselbe Eigenschaft besitzen. Man untersucht dann Büschel von Geraden und o-Kegelschnitten und zugehörige Büschel von projektiven Verwandtschaften auf der Geraden p.