MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, VIII, 2 – 1958

O DIFERENCIÁLNÍ ROVNICI $y''' + 2A(x)\, y' + [A'(x) + \omega(x)]\, y = 0$

MILOŠ RÁB, Brno

Úvod

Diferenciální rovnice

$$z''' + 3p_1(x)\, z'' + 3p_2(x)\, z' + p_3(x)\, z = 0,$$

jejíž koeficienty $p_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ jsou funkce spojité v intervalu $J = \langle x_0, \infty)$ se svými derivacemi až do řádu $3 - i$, se transformuje substitucí

$$z = \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)\, \mathrm{d}t\right\} y$$

v diferenciální rovnici

$$y''' + 3P_2(x)\, y' + P_3(x)\, y = 0,$$

kde

$$P_3(x) = p_3(x) - 3p_1(x)\, p_2(x) + 2p_1^3(x) - p_1''(x),\ P_2(x) = p_2(x) - p_1^2(x) - p_1'(x).$$

Položíme-li

$$A(x) = \frac{3}{2} P_2(x),\ \omega(x) = P_3(x) - \frac{3}{2} P_2'(x),$$

obdržíme diferenciální rovnici

$$y''' + 2A(x)\, y' + [A'(x) + \omega(x)]\, y = 0, \tag{1}$$

jejíž koeficienty $A(x)$ a $\omega(x)$ jsou funkce spojité v intervalu J.

Jestliže $A(x)$ a $\omega(x)$ jsou konstanty, $A(x) = A$, $\omega(x) = \omega$, má diferenciální rovnice (1) v případě $27\omega^2 + 32A^3 > 0$, $\omega > 0$ obecné řešení tvaru

$$y = C_1\, \mathrm{e}^{-\alpha x} + C_2\, \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2} x} \sin\, [\beta x + C_3],\ \alpha > 0, \beta \text{ konstanty.}$$

Každé neoscilující řešení $\{C_2 = 0\}$ konverguje s rostoucím x k nule, nemá ani jeden nulový bod a patří do prostoru $L^2(x_0, \infty)$. Je-li $C_2 \neq 0$, řešení osciluje[1] a dosti vzdálené nulové body každých dvou nezávislých oscilujících

[1] Oscilujícím budeme nazývat integrál, který v každém intervalu (a, ∞), $a > x_0$ nabývá kladných i záporných hodnot.

integrálů se oddělují buď po jednom (na př. $y_1 = e^{\frac{\alpha}{2}x} \sin \beta x$, $y_2 = e^{\frac{\alpha}{2}x} \cos \beta x$) nebo po dvou (na př. $y_1 = e^{\frac{\alpha}{2}x} \sin \beta x - e^{-\alpha x}$, $y_2 = e^{\frac{\alpha}{2}x} \sin \beta x$).

Je-li $27\omega^2 + 32A^3 > 0$, $\omega < 0$ má diferenciální rovnice (1) obecné řešení tvaru

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\frac{\alpha}{2}x} \sin [\beta x + C_3],\ \alpha > 0,\ \beta \text{ konstanty.}$$

Každé řešení jest buďto neoscilatorické v J $\{C_1 \neq 0\}$ a diverguje k $\pm\infty$, nebo osciluje $\{C_1 = 0\}$ a nulové body každých dvou nezávislých oscilujících integrálů se oddělují po jednom. Každý oscilující integrál patří do prostoru $L^2(x_0, \infty)$.

V dalších odstavcích budeme studovat případy $A(x) \not\equiv A$, $\omega(x) \not\equiv \omega$, kdy mají integrály diferenciální rovnice (1) právě popsané vlastnosti. Podobným problémem se zabýval Zlámal [4].

I

V tomto odstavci uvedeme čtyři pomocné věty.

Pomocná věta 1. *Fundamentální systém řešení diferenciální rovnice* $y''' + 2A(x)\,y' + A'(x)\,y = 0$ *jest tvaru*

$$y_1 = u^2,\ y_2 = uv,\ y_3 = v^2,$$

kde u a v značí dva libovolné nezávislé integrály diferenciální rovnice

$$y'' + \frac{1}{2}A(x)\,y = 0. \tag{2}$$

([3], díl I, str. 97.)

Pomocná věta 2. *Integrály diferenciální rovnice* (1) *vyhovují Mammanově identitě*

$$L[y(x)] \equiv y(x)\,y''(x) - \frac{1}{2}y'^2(x) + A(x)\,y^2(x) = -\int_{x_0}^{x} \omega(t)\,y^2(t)\,dt + L[y(x_0)]. \tag{3}$$

([1], str. 221.)

O správnosti se snadno přesvědčíme tak, že rovnici (1) násobíme $y(x)$ a integrujeme od x_0 do x.

Pomocná věta 3. *Buď* $\omega(x) \leqq 0$ $\{\omega(x) \geqq 0\}$ *pro* $x \in J$ *a nechť* $\omega(x) \not\equiv 0$ *v žádném částečném intervalu. Každý integrál $y(x)$ diferenciální rovnice* (1), *který splňuje v nějakém čísle $x_1 \in J$ počáteční podmínky* $y(x_1) = y'(x_1) = 0$, $y''(x_1) \neq 0$ *nemá napravo* $\{$*nalevo*$\}$ *od x_1 žádný nulový bod.*

Vskutku, kdyby pro $x_2 > x_1$ bylo $y(x_2) = 0$, bylo by podle (3) $-y'^2(x_2) = -\int_{x_0}^{x} \omega(t)\,y^2(t)\,dt$, což jest spor, neboť na levé straně jest nekladné, na pravé kladné číslo.

Analogicky se dokáže tvrzení v případě $\omega(x) \geqq 0$.

Pomocná věta 4. *Buďte dány dvě diferenciální rovnice*

$$z''' + 2A(x)\,z' + [A'(x) + \omega_1(x)]\,z = 0, \tag{4}$$

$$Z''' + 2A(x)\,Z' + [A'(x) + \omega_2(x)]\,Z = 0. \tag{5}$$

Nechť funkce $A'(x)$, $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ jsou spojité v intervalu J a nechť $\omega_2(x) \leqq 0$, $\omega_2(x) \leqq \omega_1(x)$, *při čemž není v žádném částečném intervalu* $\omega_1(x) \equiv \omega_2(x)$. *Označíme-li $z(x)$, resp. $Z(x)$ integrál diferenciální rovnice* (4), *resp.* (5), *při čemž*

$$z(x_0) = Z(x_0),\ z'(x_0) = Z'(x_0),\ z''(x_0) = Z''(x_0); \tag{6}$$

pak jest $|\,z(x)\,| < |\,Z(x)\,|$ *v každém intervalu* $(x_0, \bar{x})$, *v němž $z(x)$ nemění znaménko.*

Důkaz. Položme $\omega_1(x) - \omega_2(x) = \varepsilon(x) \geqq 0$.

Pak můžeme diferenciální rovnici (4) psát ve tvaru

$$z''' + 2A(x)\,z' + [A'(x) + \omega_2(x)]\,z = -\varepsilon(x)\,z.$$

Methodou variace konstant obdržíme integrální rovnici

$$z(x) = Z(x) - \int_{x_0}^{x} \varepsilon(t)\,\frac{W(x, t)}{W(t)}\,z(t)\,dt, \tag{7}$$

při čemž $Z(x)$ je integrál diferenciální rovnice (5) určený v čísle x_0 počátečními podmínkami (6), $W(t)$ je wronskien fundamentální soustavy řešení Z_1, Z_2, Z_3 diferenciální rovnice (5) a

$$W(x, t) = \begin{vmatrix} Z_1(x), & Z_2(x), & Z_3(x) \\ Z_1(t), & Z_2(t), & Z_3(t) \\ Z_1'(t), & Z_2'(t), & Z_3'(t) \end{vmatrix}.$$

Při pevně zvoleném t jest $\dfrac{W(x, t)}{W(t)}$ integrálem diferenciální rovnice (5) splňujícím v čísle $x = t$ počáteční podmínky

$$\frac{W(t, t)}{W(t)} = 0,\quad \frac{W_x'(t, t)}{W(t)} = 0,\quad \frac{W_x''(t, t)}{W(t)} = 1.$$

Podle pomocné věty 3 jest $\dfrac{W(x, t)}{W(t)} > 0$ pro všechna $x > t$.

Tvrzení věty plyne bezprostředně ze vztahu (7).

II

Vlastnosti integrálů diferenciální rovnice (1) v případě $\omega(x) \geqq 0$

Věta 1. *Nechť diferenciální rovnice (2) jest oscilatorická v J. Nechť $A'(x)$ a $\omega(x)$ jsou funkce spojité v J a $\omega(x) \geqq 0$ pro $x \in J$, při čemž není v žádném částečném intervalu $\omega(x) \equiv 0$.*

Je-li každý integrál diferenciální rovnice (2) ohraničený {konverguje s rostoucím x k nule}, pak platí tato tvrzení:

a) Každý integrál diferenciální rovnice (1) buďto osciluje v J, nebo je ohraničený {konverguje s rostoucím x k nule} a nemá ani jeden nulový bod.

b) Dostatečně vzdálené nulové body dvou nezávislých oscilujících integrálů se oddělují buď po jednom nebo po dvou.

c) Je-li $\omega(x) \geqq \varepsilon > 0$, patří každý neoscilující integrál do prostoru $L^2(x_0, \infty)$.

Důkaz. *a)* Funkce $L[y(x)]$ jest klesající v J, jak jest patrno z (3). Buď existuje $x_1 \geqq x_0$ takové, že $L[y(x_1)] = 0$, pak jest $L[y(x)] < 0$ pro všechna $x > x_1$ a $y(x)$ osciluje ([2], str. 355), nebo jest v celém intervalu $J L[y(x)] > 0$ a $y(x)$ nemá ani jeden nulový bod. Kdyby totiž integrál $y(x)$ měl nulový bod $\bar{x} \in J$, bylo by $L[y(\bar{x})] = -\frac{1}{2} y'^2(\bar{x}) \leqq 0$, což je ve sporu s předpokladem.

Označme $Z(x)$ integrál diferenciální rovnice $Z''' + 2A(x) Z' + A'(x) Z = 0$, který splňuje v čísle x_0 tytéž cauchyovské počáteční podmínky jako $y(x)$. Podle pomocné věty 4 $\{\omega_2(x) \equiv 0,\ \omega_1(x) \equiv \omega(x),\ z(x) \equiv y(x)\}$ jest $|Z(x)| > |y(x)|$ pro všechna $x > x_0$. Odtud plyne, že $y(x)$ je ohraničený {konverguje k nule}, neboť podle pomocné věty 1 jest $Z(x) = C_1 u^2(x) + C_2 u(x) v(x) + C_3 v^2(x)$, kde C_1, C_2, C_3 jsou vhodné konstanty, $u(x)$ a $v(x)$ dva libovolné nezávislé integrály diferenciální rovnice (2), které jsou podle předpokladu ohraničené {konvergují k nule}.

Tvrzení *b)* je dokázáno v práci [2].

Nechť konečně $\omega(x) \geqq \varepsilon > 0$. Je-li $y(x)$ libovolný neoscilující integrál diferenciální rovnice (1), jest $L[y(x)] > 0$ pro všechna $x \geqq x_0$.

Tvrzení *c)* plyne ze vztahu (3), neboť kdyby $\int_{x_0}^{\infty} y^2(t)\, dt = \infty$, byla by limita $\lim_{x \to \infty} L[y(x)] = -\infty$, což je ve sporu s tím, že $L[y(x)] > 0$.

III

Vlastnosti integrálů diferenciální rovnice (1) v případě $\omega(x) \leqq 0$

Věta 2. *Nechť $A'(x)$, $\omega(x)$ jsou funkce spojité v J a nechť $A(x) \leqq \varepsilon < 0$, $\omega(x) \leqq 0$ pro $x \in J$.*

Nechť má diferenciální rovnice (1) alespoň jeden oscilující integrál $y_1(x)$. Pak platí tato tvrzení:

1. Diferenciální rovnice (1) má také neoscilující integrály. Každý neoscilující integrál diverguje s rostoucím x monotonně k $\pm\infty$.

2. Je-li $\omega(x) \leqq \delta < 0$, patří každý oscilující integrál do prostoru $L^2(x_0, \infty)$.

3. Nulové body každých dvou nezávislých oscilujících integrálů se oddělují po jednom.

Důkaz. 1. Ukážeme především, že každý integrál $y(x)$, který splňuje v nějakém čísle $x_1 \in J$ počáteční podmínky $y(x_1) = y'(x_1) = 0$, $y''(x_1) \neq 0$, diverguje s rostoucím x monotonně k $\pm\infty$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $y''(x_1) > 0$. Pak jest $y''(x) > 0$ v jistém okolí zprava bodu x_1. Ukážeme, že jest $y''(x) > 0$ pro všechna $x > x_1$. Předpokládejme, že tomu tak není a označme ξ minimum všech $x > x_1$, pro něž $y''(x) \leqq 0$. Pak jest $y''(\xi) = 0$ a z Mammanovy identity (3) plyne

$$L[y(\xi)] = -\frac{1}{2} y'^2(\xi) + A(\xi)\, y^2(\xi) = -\int_{x_1}^{\xi} \omega(t)\, y^2(t)\, dt,$$

což je spor, neboť na levé straně jest záporné, na pravé nezáporné číslo. Jest tedy $y''(x) > 0$ pro všechna $x > x_1$, takže $y'(x)$ roste, a protože $y'(x_1) = 0$, platí od jistého $x_2 > x_1$ nerovnost $y'(x) \geqq k > 0$, kde k je vhodná konstanta. Z poslední nerovnosti plyne, že $y(x)$ je monotonní a $y(x) \geqq k(x - x_2) + y(x_2)$, takže jest $\lim_{x \to \infty} y(x) = \infty$. Analogicky se dokáže, že $\lim_{x \to \infty} y(x) = -\infty$, když $y''(x_1) < 0$.

Buď nyní $y(x)$ libovolný neoscilující integrál. Zvolme $x_1 \in J$ tak velké, aby $y(x) \neq 0$ pro $x > x_1$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $y(x) > 0$ pro $x > x_1$. Ukážeme, že $y(x)$ je neohraničený.

Předpokládejme, že existuje takové M, že $y(x) < M$ pro všechna $x > x_1$. Buď $y_1(x)$ oscilující integrál diferenciální rovnice (1). Zvolme dva po sobě jdoucí nulové body $\eta > \zeta > x_1$ tak, aby $y_1'(\zeta) > 0$, $y_1'(\eta) < 0$. Funkce $F(x) = y(x)\, y_1'(x) - y'(x)\, y_1(x)$ jest spojitá v intervalu $\langle \zeta, \eta \rangle$ a jest $F(\zeta) = y(\zeta) y_1'(\zeta) > 0$, $F(\eta) = y(\eta)\, y_1'(\eta) < 0$. Existuje tedy uvnitř intervalu (ζ, η) číslo ξ takové, že $F(\xi) = 0$. Systém rovnic

$$c_1 y(\xi) + c_2 y_1(\xi) = 0,$$
$$c_1 y'(\xi) + c_2 y_1'(\xi) = 0$$

má tedy nenulové řešení c_1, c_2, neboť determinant soustavy $F(\xi)$ je roven nule. Funkce $y(x) = c_1 y(x) + c_2 y_1(x)$ jest řešením diferenciální rovnice (1) a má v čísle ξ dvojnásobný nulový bod. Podle hořejšího jest $\lim_{x \to \infty} y(x) = \infty$, což jest spor, neboť v nulových bodech x_k integrálu $y_1(x)$ jest $y(x_k) = c_1 y(x_k) < c_1 M$. Jest tedy každý neoscilující integrál $y(x)$ neohraničený. K dokončení důkazu tvrzení 1 stačí ukázat, že $y(x)$ nemůže mít nekonečně mnoho maxim a minim. Důkaz provedeme opět sporem. Označme ξ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ body, v nichž nabývá $y(x)$ maxima. Protože je $y(x)$ neohraničený, existují ke každému číslu $L > 0$ indexy k takové, že $y(\xi_k) > L$. Z Mammanovy identity (3) plyne

$$y(\xi_k)\, y''(\xi_k) + A(\xi_k)\, y^2(\xi_k) = -\int_{x_1}^{\xi_k} \omega(t)\, y^2(t)\, dt + L[y(x_1)].$$

Pravá strana je zdola ohraničená, neboť $\omega(x) \leqq 0$ pro $x > x_1$, kdežto na levé straně máme $y(\xi_k)\, y''(\xi_k) + A(\xi_k)\, y^2(\xi_k) < A(\xi_k)\, y^2(\xi_k) \leqq \varepsilon y^2(\xi_k)$, takže levá strana nabývá libovolně velkých záporných hodnot, a to je spor.

2. Z předpokladu $\omega(x) \leqq \delta < 0$ a z (3) plyne, že $L[y(x)]$ jest rostoucí funkce, která je záporná pro každý oscilující integrál v celém intervalu J. Jest totiž v každém nulovém bodě x_k integrálu $y(x)$ $L[y(x_k)] = -\frac{1}{2} y'^2(x_k) < 0$. Jest tedy podle (3)

$$-L[y(x_0)] > \int_{x_0}^{x} |\, \omega(t)\, |\, y^2(t)\, dt \geqq |\, \delta\, | \int_{x_0}^{x} y^2(t)\, dt, \tag{8}$$

což jest tvrzení 2.

Abychom dokázali tvrzení 3, stačí ukázat: označíme-li $y_1(x)$ a $y_2(x)$ dva libovolné nezávislé oscilující integrály diferenciální rovnice (1), pak nemohou mít žádný společný nulový bod a mezi každé dva po sobě jdoucí nulové body x_1 a x_2 jednoho integrálu $\{$na př. $y_2\}$ padne alespoň jeden nulový bod druhého integrálu $\{y_1\}$.

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že v intervalu (x_1, x_2) neleží ani jeden nulový bod integrálu $y_1(x)$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $y_1(x) > 0$, $y_2(x) > 0$ pro $x \in (x_1, x_2)$, takže $y_2(x_1) = y_2(x_2) = 0$, $y_2'(x_1) > 0$, $y_2'(x_2) < 0$. [Nemůže být $y_2'(x_1) = 0$ ani $y_2'(x_2) = 0$, neboť integrál $y_2(x)$ by byl neoscilující podle pomocné věty 3.] Stejnou úvahou jako při důkazu tvrzení 1 se ukáže, že tento předpoklad vede k existenci integrálu $y(x)$ diferenciální rovnice (1), který má v čísle $\xi \in (x_1, x_2)$ dvojnásobný nulový bod. Podle pomocné věty 3 $y(x)$ neosciluje a podle tvrzení 1 věty 2 jest

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \pm\, \infty. \tag{9}$$

Na druhé straně však $y(x)$ jako lineární kombinace dvou oscilujících integrálů je ohraničený, neboť každý oscilující integrál je ohraničený.

Vskutku, buď $z(x)$ oscilující integrál. $L[z(x)]$ je neklesající, záporná a označíme-li x_k body, v nichž má $z(x)$ lokální kladné maximum nebo záporné minimum, jest $z(x_k)\, z''(x_k) \leqq 0$, $L[z(x_k)] \leqq A(x_k)\, z^2(x_k) \leqq \varepsilon z^2(x_k) \leqq 0$, takže posloupnost $\{z(x_k)\}$ je ohraničená. To však je ve sporu s (9). Leží tedy mezi x_1 a x_2 alespoň jeden nulový bod integrálu y_1. V intervalu (x_1, x_2) však nemůže ležet více nulových bodů integrálu y_1, neboť kdyby zde ležely alespoň dva, $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$, pak by mezi nimi podle právě dokázaného ležel alespoň jeden nulový bod integrálu y_2, čemuž tak není.

Zbývá ukázat, že integrály $y_1(x)$ a $y_2(x)$ nemohou mít žádný společný nulový bod ξ.

Vskutku, kdyby tomu tak bylo, existovalo by takové číslo $k \neq 0$, že $y_1'(\xi) = k y_2'(\xi)$ a funkce $y(x) = y_1(x) - k y_2(x)$, která je řešením diferenciální rovnice (1), by měla v čísle ξ dvojnásobný nulový bod, takže by platilo (9), a to je ve sporu s tím, že y_1 a y_2 jsou ohraničené. Tím je tvrzení 3 dokázáno.

LITERATURA

[1] G. Mammana, Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in prodotti di fattori simbolici e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenziali lineari. Math. Zeitschrift 33 (1931), 186—231.

[2] M. Ráb, Oscilační vlastnosti integrálů diferenciální lineární rovnice 3. řádu. Práce Brněnské zákl. ČSAV XXVII (1955), 349—360.

[3] Г. Сансоне, Обыкновенные дифференциальные уравнения. I, II. Москва 1953.

[4] M. Zlámal, Asymptotic properties of the solutions of the third order linear differential equations. Spisy přír. fak. MU 329 (1951), 159—167.

Došlo 6. 9. 1957.

Katedra matematiky na přírodovědecké fakultě Masarykovy university v Brně

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ $y''' + 2A(x)\, y' + [A'(x) + \omega(x)]\, y = 0$

МИЛОШ РАБ

Выводы

В этой статьи решается вопрос, когда решения дифференциального уравнения

$$y''' + 2A(x)\, y' + [A'(x) + \omega(x)]\, y = 0 \tag{1}$$

обладают свойствами подобными как решения уравнения с постоянными коэффициентами.

Теорема 1. Пусть дифференциальное уравнение

$$y'' + \frac{1}{2} A(x)\, y = 0 \tag{2}$$

в интеграле $J = \langle x_0, \infty)$ колеблющееся. Пусть функции $A'(x)$ и $\omega(x) \geqq 0$ непрерывны в интеграле J и пусть $\omega(x) \not\equiv 0$ в всяком интервале $j \subset J$.

Если всякое решение уравнения (2) ограниченно (или стремится к нулю при $x \to \infty$), то справедливы утверждения:

1. Всякое решение уравнения (1) в интервале J или колеблется или ограниченно (стремится к нулю) и нет у него корня в J.

2. Достаточно удаленные нули двух независимых колеблющихся решений чередуются по одном или по двух.

3. Если $\omega(x) \geqq \varepsilon > 0$ в J, то всякое неколеблющееся решение принадлежит классу $L^2(x_0, \infty)$.

Теорема 2. Пусть функции $A'(x)$ и $\omega(x)$ в интервале J непрерывны и пусть $A(x) \leqq \varepsilon < 0$, $\omega(x) \leqq 0$, для $x \in J$.

Если уравнение (1) обладает колеблющимся решением, справедливы утверждения:

1. Уравнение (1) обладает тоже неколеблющимся решением. Всякое неколеблющееся решение расходится $k \pm\infty$ при $x \to \infty$.

2. Если $\omega(x) \leqq \delta < 0$, всякое колеблющееся решение принадлежит классу $L^2(x_0, \infty)$.

3. Между всякими двумя нулями одного из двух независимых колеблющихся решений лежит один и только один нуль второго решения.

ÜBER DIE DIFFERENTIALGLEICHUNG $y''' + 2A(x)\, y' + [A'(x) + \omega(x)]\, y = 0$

MILOŠ RÁB

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden die Fälle studiert, in welchen die Lösungen der Differentialgleichung

$$y''' + 2A(x)\, y + [A'(x) + \omega(x)]\, y = 0 \tag{1}$$

ähnliche Eigenschaften wie die der Differentialgleichung mit den konstanten Koeffizienten haben.

Folgende Sätze werden bewiesen:

Satz 1. Die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{2} A(x)\, y = 0 \tag{2}$$

sei im Intervalle $J = \langle x_0, \infty)$ oszillatorisch. Die Funktionen $A'(x)$ und $\omega(x) \geqq 0$ seien in J stetig und es sei $\omega(x) \not\equiv 0$ in jedem Teilintervalle $j \subset J$.

Wenn jede Lösung der Differentialgleichung (2) beschränkt ist (oder mit wachsendem x gegen Null konvergiert), dann gilt:

1. Jede Lösung der Differentialgleichung (1) ist in J entweder oszillatorisch oder beschränkt (konvergiert gegen Null) und hat keine Nullstelle in J.

2. Hinreichend entfernte Nullstellen zweier unabhängigen oszillatorischen Lösungen trennen sich zu eins oder zu zwei.

3. Wenn $\omega(x) \geqq \varepsilon > 0$ in J gilt, ist jede nichtoszillatorische Lösung der Klasse $L^2(x_0, \infty)$.

Satz 2. Die Funktionen $A'(x)$ und $\omega(x)$ seien in J stetig und es sei $A(x) \leqq \varepsilon < 0$, $\omega(x) \leqq 0$ für $x \in J$.

Wenn die Differentialgleichung (1) mindestens eine oszillatorische Lösung $y_1(x)$ besitzt, dann gilt:

1. Die Differentialgleichung (1) hat auch nichtoszillatorische Lösungen. Jede nichtoszillatorische Lösung divergiert mit wachsendem x gegen $\pm\infty$.

2. Wenn $\omega(x) \leqq \delta < 0$ gilt, ist jede oszillatorische Lösung der Klasse $L^2(x_0, \infty)$.

3. Die Nullstellen zweier unabhängigen oszillatorischen Lösungen trennen sich zu eins.