MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, VIII, 2 – 1958

O ZÁKLADNÍCH VĚTÁCH VÍCEROZMĚRNÉ CENTRÁLNÍ AXOMETRIE II, III

VÁCLAV HAVEL, Brno

Tento článek je pokračováním stejnojmenného článku, otištěného v tomto časopise v ročníku 7 (1957), str. 94—107 (v dalším citováno jako I), je však stylisován nezávisle na I.

II. část

V I jsou dokázány dvě základní věty, které mají existenční význam při budování axonometrického promítání hyperspaciálního. První základní věta je vázána na neparalelní průměty souřadnicových konfigurací do regulárních desarguesovských konfigurací, kdežto druhá věta týká se současně paralelních i neparalelních průmětů obecných desarguesovských konfigurací. Na tyto věty navazují naše další úvahy. V § 1 je první základní věta zobecněna alespoň částečně též pro promítání do m-rozměrného podprostoru. V § 2 je pojednáno o perspektivní poloze dvou simplexů. V § 3 je zobecněna věta Pohlkeova—Schwarzova, zastupující pro paralelní promítání první základní větu. Úvahy z § 3 jsou syntetickým protějškem analytických úvah Naumannových.

§ 1. Problematika obou základních vět

V rozšířeném prostoru $\mathbf{E}_n$, $n \geqq 3$, je definována *l-ramenná m-rozměrná desarguesovská konfigurace* jako *konfigurace* bodů $O, A_1, \ldots, A_e, B_1, \ldots, B_e$, obsahující trojice kolineárních různých bodů O, A_i, B_i $(i = 1, \ldots, l)$, přičemž body $O, A_1, \ldots, A_m$ jsou lineárně nezávislé a vytvářejí vlastní podprostor, který obsahuje též body $A_{m+1}, \ldots, A_e$. Jsou-li navíc body $B_1, \ldots, B_{m+1}$ lineárně nezávislé, pak konfiguraci prohlásíme za *regulární.*[1]

Označme nyní $\mathfrak{D}$ takovou regulární konfiguraci a vyšetřujme obě posloupnosti $\mathfrak{A} = \{A_1, \ldots, A_{m+1}\}$, $\mathfrak{B} = \{B_1, \ldots, B_{m+1}\}$. Jsou-li body z $\mathfrak{A}$ lineárně nezávislé, pak $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ odpovídají si v perspektivní kolineaci o středu O a určují

[1] V I je desarguesovská konfigurace, resp. regulární desarguesovská konfigurace značena jako d-konfigurace, resp. d_1-konfigurace.

tedy jistý podprostor $\mathbf{p}$ jako „*osu*" této perspektivní kolineace. Jsou-li body z $\mathfrak{A}$ lineárně závislé, pak jimi vytvořený podprostor označme $\mathbf{p}$. Existuje právě jeden m-elipsoid, pro nějž $\mathfrak{B}$ je polárním simplexem a k $\mathbf{p}$ je polárně sdružen harmonický pól P podprostoru $\mathbf{p}$ vzhledem k $\mathfrak{B}$.[2] Tento m-elipsoid nazveme *přidruženým* k $\mathfrak{D}$.

Pro m-ramennou m-rozměrnou desarguesovskou konfiguraci $\mathfrak{D} = \{O, A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m\}$ položme $\mathfrak{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$, $\mathfrak{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$. Posloupnosti $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ odpovídají si v perspektivní kolineaci o středu O a určují tedy jistý $(m-1)$-prostor $\mathbf{p}$ jako „*osu*" perspektivní kolineace. Podprostoru $\mathbf{p}$ odpovídá harmonický pól P vzhledem k $\mathfrak{B}$. K $\mathfrak{D}$ *přidružený* $(m-1)$-elipsoid je určen polárním simplexem $\mathfrak{B}$ a polárním párem P, $\mathbf{p}$.

Jsou-li body z $\mathfrak{A}$ stejně vzdáleny od bodu O, jsou-li spojnice bodu O s body z $\mathfrak{A}$ navzájem kolmé a jsou-li body z $\mathfrak{B}$ nevlastní, pak konfiguraci prohlásíme za m-ramennou *souřadnicovou* konfiguraci.

Věta 1. *n-ramenná $(n-1)$-rozměrná regulární desarguesovská konfigurace je průmětem n-ramenné souřadnicové konfigurace tehdy a jen tehdy, má-li přidruženu $(n-1)$-sféru. Centrem promítání je bod, vzdálený od středu přidružené $(n-1)$-sféry i od její nadroviny o délku jejího poloměru.*

Důkaz viz I, str. 99—100, věta 4.

Věta 2. *Pro $m \geqq 3$ je m-ramenná m-rozměrná desarguesovská konfigurace $\mathfrak{D}$ průmětem m-ramenné souřadnicové konfigurace $\mathfrak{S}$ z jistého bodu C, právě když k $\mathfrak{D}$ je přidružena $(m-1)$-sféra.*

Důkaz. Nechť $\mathfrak{D}$ je průmětem souřadnicové konfigurace $\mathfrak{S}$ z centra C. Doplníme $\mathfrak{S}$ v n-ramennou souřadnicovou konfiguraci $\mathfrak{S}^*$, kterou promítneme z C do některé nadroviny, která obsahuje $\mathfrak{D}$ a neobsahuje C. Průmětem konfigurace $\mathfrak{S}^*$ je pak n-ramenná $(n-1)$-rozměrná desarguesovská konfigurace $\mathfrak{D}^*$ s přidruženou $(n-1)$-sférou σ. Posledních m bodů z $\mathfrak{D}$ vytvořuje $(m-1)$-prostor, který protíná σ v $(m-1)$-sféře, přidružené k $\mathfrak{D}$.

K důkazu postačující podmínky použijeme pomocnou větu: *Má-li hypersféra $\varkappa$ polární simplex $\mathfrak{P}$, pak existuje bod P a nadrovina $\mathbf{p}$ tak, že P je pólem nadroviny $\mathbf{p}$ vzhledem k $\varkappa$ a současně harmonickým pólem nadroviny $\mathbf{p}$ vzhledem k $\mathfrak{P}$.*

Důkaz této pomocné věty jen naznačíme. Ke každé dvojici různých indexů i, j stanovme společný bodový pár involuce o samodružných bodech P_i, P_j (kde $\mathfrak{P} = \{P_1, \ldots, P_{n+1}\}$) a involuce indukované na spojnici bodů P_i, P_j hypersférou $\varkappa$. Tento společný pár skládá se z různých reálných bodů V_{ij}, W_{ij}. Body $W_{12}, \ldots, W_{1,n+1}$ nechť vytvořují nadrovinu $\mathbf{p}$. Bod P, který je průsečíkem nadrovin vytvořených body $V_{1k}, P_2, \ldots, P_{n+1}$ pro $k = 2, \ldots, n+1$, je pólem nadroviny $\mathbf{p}$ vzhledem k $\varkappa$ i harmonickým pólem

[2] m-rozměrný podprostor označíme jako *m-prostor*, hyperkvadriku m-prostoru označíme jako *m-kvadriku*.

nadroviny $\mathbf{p}$ vzhledem k $\mathfrak{P}$. Detaily důkazu pomineme. Pro $n = 3$ srov. [2], odst. 3 na str. 168—171, resp. [3]; pro $n > 3$ srov. [4].

Položme $\mathfrak{D} = \{O, A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m\}$, $\mathfrak{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$, $\mathfrak{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$. Nechť $\mathfrak{D}$ má přidruženou $(m-1)$-sféru. Touto $(m-1)$-sférou proložme libovolnou hypersféru $\varkappa$ a doplňme vhodně $\mathfrak{D}$ na n-ramennou $(n-1)$-rozměrnou regulární desarguesovskou konfiguraci $\mathfrak{D}^* = \{O, A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n\}$, kde $\mathfrak{A}^* = \{A_1, \ldots, A_n\}$, $\mathfrak{B}^* = \{B_1, \ldots, B_n\}$. Podle pomocné věty sestrojíme nadrovinu $\mathbf{p}$ (pro $\mathfrak{P} = \mathfrak{B}$) tak, aby obsahovala osu perspektivní kolineace mezi $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$. Neleží-li $\mathfrak{A}$ v $\mathbf{p}$, pak doplníme $\mathfrak{A}^*$ podle perspektivní kolineace mezi $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$. Leží-li $\mathfrak{A}$ v $\mathbf{p}$, pak též $\mathfrak{A}^*$ leží v $\mathbf{p}$. — Z existence konfigurace $\mathfrak{D}^*$ plyne podle věty 1 zakončení důkazu.

Věta 3. *Nechť $2 \leqq m < n$. K dané n-ramenné m-rozměrné desarguesovské konfiguraci $\mathfrak{D}$ a n-ramenné n-rozměrné desarguesovské konfiguraci $\mathfrak{S}$ lze sestrojit právě jeden $(n-m-1)$-prostor $\mathbf{C}$ a lineární transformaci λ_X mezi podprostorem $\mathbf{D}$, vytvořeným konfigurací $\mathfrak{D}$, a libovolným vlastním, s $\mathbf{C}$ disjunktním podprostorem $\mathbf{X}$ tak, že v λ_X odpovídá konfiguraci $\mathfrak{D}$ průmět konfigurace $\mathfrak{S}$ z centra $\mathbf{C}$. — Je-li $\mathbf{C}$ vlastní, pak mezi λ_X náleží též afinity všech modulů.*[3] *— Je-li však $\mathbf{C}$ nevlastní, pak buďto žádné λ_X není afinitou anebo každé λ_X je afinitou, přičemž moduly těchto afinit nabývají všech hodnot větších či rovných modulu té z afinit λ_X, při níž $\mathbf{X}$ je kolmé k $\mathbf{C}$.*

Důkaz viz I, str. 103, věta 7. Pro $n = m + 1$ dokazuje část věty 3 V. N. Pervikova [21].

Věta 3 má celkem ukončenou podobu. Věta 1 takovou podobu nemá, neboť je vázána na promítání z bodu do nadroviny. Určité zobecnění věty 1 pro promítání z $(n-m-1)$-prostoru do m-prostoru bude podáno v následující větě.

Věta 4. *Nechť $2 \leqq m < n$. n-ramenná m-rozměrná regulární desarguesovská konfigurace je průmětem n-ramenné souřadnicové konfigurace, když přidružený m-elipsoid je m-sférou.*

Důkaz: Nechť daná n-ramenná m-rozměrná regulární desarguesovská konfigurace $\mathfrak{D} = \{O, A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n\}$ má přidruženu m-sféru. Omezme se na kterýkoliv $(m+1)$-prostor obsahující $\mathfrak{D}$ a položme $\mathfrak{D}^* = \{O, A_1, \ldots, A_{m+1}, B_1, \ldots, B_{m+1}\}$. Pak podle věty 1 existuje $(m+1)$-ramenná souřadnicová konfigurace $\mathfrak{S}^*$, promítající se z jistého bodu S_0 do $\mathfrak{D}^*$. Doplňme $\mathfrak{S}^*$ libovolným způsobem v n-ramennou souřadnicovou konfiguraci $\mathfrak{S} = \{O', A_1', \ldots, A_n', B_1', \ldots, B_n'\}$ a sestrojme průsečíky S_i přímek A_iA_i', B_iB_i' pro $i = m+2, \ldots, n$. Body $S_0, S_{m+2}, \ldots, S_n$ vytvářejí $(n-m-1)$-prostor, z něhož se $\mathfrak{S}$ promítá do $\mathfrak{D}$.

[3] *Modul* afinity mezi dvěma m-rozměrnými podprostory je objem m-rozměrného simplexu, který odpovídá m-rozměrnému simplexu jednotkového objemu.

Problematiku obou základních vět (totiž věty 1 a věty 3) lze objasnit z tohoto hlediska:

Nechť λ je lineární zobrazení daného prostoru $\mathbf{E}_n$ na vlastní m-prostor.

Problém 1. *Jest najít nutnou a postačující podmínku pro to, aby existovalo přemístění ω (t. j. shodné zobrazení) prostoru $\mathbf{E}_n$ na sebe tak, že $\mathbf{E}_n^{\omega^{-1}}$ a $\mathbf{E}_n^{\lambda}$ si odpovídají v lineárním zobrazení předepsaného typu T!*

Problém 2. *Jest najít nutnou a postačující podmínku pro to, aby existovalo lineární zobrazení σ přepsaného typu T_1 prostoru $\mathbf{E}_n$ na vlastní m-prostor, při čemž $\mathbf{E}_n^{\lambda}$ a $\mathbf{E}_n^{\sigma}$ si odpovídají v lineárním zobrazení předepsaného typu T_2!*

Obě formulace nejsou na sobě nezávislé. Uvedeme řešení některých specialisací obou problémů:

K problému 1.

Odst. a) Nechť λ je neafinní zobrazení. Nechť T je buďto lineární zobrazení s vlastním, silně samodružným bodem a vlastní, silně samodružnou rovinou při $n = m$ anebo nechť T je promítání z vlastního bodu na vlastní nadrovinu při $n = m + 1$.

První nutná a postačující podmínka: *Při volbě n-ramenné souřadnicové konfigurace $\mathfrak{S}$ v $\mathbf{E}_n$ jest k $\mathfrak{S}^{\lambda}$ přidružena $(n-1)$-sféra.* (Pro $n = m + 1$ viz větu 1; v případě $n = m$ jde o dosud nepublikovaný výsledek autorův.)

Druhá nutná a postačující podmínka: *Při volbě n-ramenné n-rozměrné desarguesovské konfigurace bodů $O, A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ takových, že $O, O^{\lambda}, A_1, \ldots, A_n, B_1^{\lambda}, \ldots, B_n^{\lambda}$ jsou vlastní a $B_1, \ldots, B_n, A_1^{\lambda}, \ldots, A_n^{\lambda}$ jsou nevlastní, jsou simplexy o vrcholech $A_1, \ldots, A_n$, resp. $B_1^{\lambda}, \ldots, B_n^{\lambda}$ podobné.* (Tento výsledek je nový; pro $n = 3$ srov. [13], [16], [17], [22], [23].)

Odst. b) Nechť λ je neafinní zobrazení. Nechť $n = m = 3$. Konečně nechť T je lineární zobrazení se dvěma vlastními silně samodružnými přímkami (disjunktními).

Příslušnou nutnou a postačující podmínku odvodil Kommerell [13].

K problému 2.

Odst. c) Nechť λ je afinní zobrazení. Nechť T_1 je buďto afinní zobrazení se silně samodružným vlastním d-prostorem a silně samodružným nevlastním $(n - d - 1)$-prostorem (s prvým disjunktním) při $n = m$ anebo nechť T_1 je paralelní promítání z nevlastního $(n - m - 1)$-prostoru na vlastní m-prostor při $n > m$. Konečně nechť T_2 je podobnost. Příslušná nutná a postačující podmínka pro případ $n > m$ vyplývá z věty 3, § 3; speciálně pro $n = m + 1$ srov. [26]; pro $n = m = d + 1$ viz větu 3, § 2. Jinou nutnou a postačující podmínku stanovil autor (pro $n = m$ i pro $n > m$) užitím charakteristických čísel Gramovy matice vektorů), které odpovídají v zobrazení λ kterékoliv ortonormální basi v $\mathbf{E}_n$; srov. poznámku v závěru § 3. Pro $n = 3$ srov. [6], [12], [14], [16], [28]; speciální případ $n = m = 3$, $d = 1$ vyšetřil Havelka [10].

Odst. d) Nechť λ je neafinní zobrazení. Nechť $n > m$. Nechť T_1 je promítání z vlastního $(n - m - 1)$-prostoru na vlastní m-prostor. Konečně nechť T_2 je afinní zobrazení předepsaného modulu η.

Příslušná podmínka je prázdná (viz větu 3); pro $n = 3 = m + 1$, $\eta = 1$ srov. [1]; pro $n = m + 1$, $\eta = 1$ srov. [21].

V článku [16], str. 178—179, zastává E. A. Mčedlišvili v polemice s N. M. Beskinem stanovisko, že Beskinův přístup, zobecněný ve formulaci problémů 1 a 2, je s hlediska deskriptivní geometrie nevhodný. E. A. Mčedlišvili pokládá za podstatné ty geometrické vlastnosti prostoru, které jsou invariantní při přechodu od regulárního lineárního zobrazení k degenerovanému (což se projeví ztrátou nejvyšší hodnosti u matice zobrazení). Autor pokládá hlediska problémů 1 a 2 za oprávněná. Na obranu N. M. Beskina dále dodává, že po vhodném doplnění je 1. základní věta Beskinova (t. j. v podstatě věta, užívající podmínky 1 z odst. a) pro $n = 3$) ekvivalentní se základní větou Mčedlišviliho (t. j. s větou, užívající podmínky 2 z odst. a) pro $n = 3$), a to i s hlediska invariace při přechodu od regulárního zobrazení k degenerovanému.

§ 2. Věta o perspektivní poloze dvou simplexů

Speciální případ nikoliv regulární desarguesovské konfigurace $\{O, A_1, \ldots, A_e, B_1, \ldots, B_e\}$ vznikne, jsou-li body $B_1, \ldots, B_e$ nevlastní. Konfigurace jest pak ovšem určena posloupností vlastních bodů $O, A_1, \ldots, A_e$, při čemž bod O je různý od bodů ostatních. Toto omezení se nám pro další nehodí.

Zavedeme si proto pojem *(n, m)-konfigurace* jako konfigurace $n + 1$ vlastních bodů, z nichž prvých $m + 1$ je lineárně nezávislých.

Perspektivní afinitou rozumíme v dalším afinitu daného n-prostoru, k níž existuje nadrovina samodružných bodů (*osová* nadrovina); následkem toho existuje též *střed*: je to bod, kolineární s každým párem odpovídajících si bodů.

Věta 1. *Hyperelipsoid odpovídá v některé perspektivní afinitě hypersféře, právě když obsahuje $(n-1)$-sféru.*

Důkaz.

a) Nechť hypersféra $\varkappa$ zobrazuje se v perspektivní afinitě α o vlastní osové nadrovině $\mathbf{M}$ do hyperelipsoidu $\varkappa_0$. Středem nadplochy $\varkappa_0$ veďme nadrovinu $\mathbf{M}_0$ rovnoběžnou s $\mathbf{M}$. Pak $\varkappa \cap \mathbf{M}_0^{\alpha^{-1}}$ je $(n-1)$-sféra, a tedy i $\varkappa^{\alpha} \cap \mathbf{M}_0^{\alpha^{-1}\alpha} = \varkappa_0 \cap \mathbf{M}_0$ je $(n-1)$-sféra. — Má-li perspektivní afinita A nevlastní osovou nadrovinu, pak je situace zřejmá.

b) Nechť hyperelipsoid $\varkappa_0$ obsahuje $(n-1)$-sféru μ^*, ležící v nadrovině $\mathbf{M}^*$. Středem O nadplochy $\varkappa_0$ veďme nadrovinu $\mathbf{M}$ rovnoběžnou s $\mathbf{M}^*$. Pak též $\mu = \varkappa_0 \cap \mathbf{M}$ je $(n-1)$-sféra. Označme $\varkappa$ hypersféru soustřednou s μ a obsahující μ. Dále označme L, resp. L_0 ten bod z $\varkappa$, resp. z $\varkappa_0$, jehož spojnice se středem O je sdružena k $\mathbf{M}$ vzhledem ke $\varkappa$, resp. ke $\varkappa_0$. Vhodnou volbou lze vždy docílit, aby body L, L_0 byly různé. V perspektivní afinitě o osové nadrovině $\mathbf{M}$ a páru odpovídajících si bodů L, L_0 odpovídá hyposféře $\varkappa$ daný hyperelipsoid $\varkappa_0$.

Věta 2. *Hyperelipsoid obsahuje $(n-1)$-sféru právě tehdy, je-li rotační vzhledem k hlavnímu 3-prostoru, který obsahuje nejdelší i nejkratší z hlavních poloměrů.*

Důkaz. Označme $\varkappa$ daný hyperelipsoid různý od hypersféry. Zřejmě $\varkappa$ obsahuje $(n-1)$-sféru právě tehdy, obsahuje-li dokonce soustřednou $(n-1)$-sféru. Nechť $\varkappa$ má rovnici

$$a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2 = 1,$$

kde

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n > 0. \tag{1}$$

Soustředná hypersféra nechť má rovnici

$$a_jx_1^2 + \ldots + a_jx_n^2 = 1. \tag{2_j}$$

$\varkappa$ obsahuje soustřednou $(n-1)$-sféru, právě když existuje index j tak, že $f = (a_1 - a_j)\,x_1^2 + (a_2 - a_j)\,x_2^2 + \ldots + (a_n - a_j)\,x_n^2$ je rozložitelná forma. Sestavme matici

$$\begin{pmatrix} a_1 - a_j & & & & & & \\ & a_2 - a_j & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & a_{j-1} - a_j & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & a_{j+1} - a_j & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & a_n - a_j \end{pmatrix}$$

kde všude mimo hlavní úhlopříčku jsou nuly. f je rozložitelné právě tehdy, je-li hodnost matice rovna jedné anebo je-li hodnost matice rovna dvěma a existuje-li současně subdeterminant $\begin{vmatrix} a_\alpha - a_j & 0 \\ 0 & a_\beta - a_j \end{vmatrix}$ o záporné hodnotě.

Syntetický důkaz bylo by možno vést úplnou indukcí podle n s využitím známé skutečnosti, že věta platí pro $n = 3$.[4]

Věta 3. *Ke dvěma daným (n, n)-konfiguracím $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ existuje perspektivní afinita, převádějící $\mathfrak{K}_1$ v konfiguraci podobnou s $\mathfrak{K}_2$ právě tehdy, když v afinitě, převádějící $\mathfrak{K}_2$ v $\mathfrak{K}_1$, odpovídá hypersféře hyperelipsoid obsahující $(n-1)$-sféru.*

Důkaz. Existuje afinita α, převádějící $\mathfrak{K}_2$ v $\mathfrak{K}_1$. Perspektivní afinita β mezi

[4] K předpokladům věty 5 z I nutno připojit: ...tak, že přidružená kvadrika obsahuje $(n-2)$-sféru...

$\mathfrak{K}_1$ a konfigurací $\mathfrak{K}_2'$ podobnou s $\mathfrak{K}_2$ existuje tehdy a jen tehdy, jestliže libovolné hypersféře $\varkappa$ odpovídá v α hyperelipsoid obsahující $(n-1)$-sféru. Pro podobnost mezi $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_1^\beta$ je totiž nutné i stačí, aby $\varkappa^{\alpha\beta}$ byla opět hypersféra.

Věta 3 je zobecněním známé věty o perspektivní poloze dvou čtyřstěnů v 3-prostoru; srov. [28], str. 209; [14], str. 49–51; [6], str. 46, [16], str. 128.

§ 3. Zobecnění věty Pohlkeovy–Schwarzovy

Věta 1.

a) *Je-li $n \geqq 2m - 1 > 3$, pak m-elipsoid je vždy kolmým průmětem m-sféry (při kolmém promítání z nevlastního $(n - m - 1)$-prostoru do m-prostoru).*

b) *Nechť $2 \leqq m < n < 2m - 1$. Pak m-elipsoid o hlavních poloměrech $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_m$[5] (kde $|\mathfrak{v}_1| = \ldots = |\mathfrak{v}_r| > |\mathfrak{v}_{r+1}| \geqq \ldots \geqq |\mathfrak{v}_m|$) je kolmým průmětem m-sféry, právě když $n \geqq 2m - r$. [Přitom jde opět o kolmé promítání z nevlastního $(n - m - 1)$-prostoru do m-prostoru.]*

Důkaz. Ve vhodně voleném souřadnicovém systému pravoúhlém položme $\mathfrak{v}_i = (v_{i,1}, \ldots, v_{i,m}, \overbrace{O, \ldots, O}^{n-m})$ pro $i = 1, \ldots, m$.

Dále položme $\mathfrak{w}_i = (v_{i,1}, \ldots, v_{i,m}, v_{i,m+1}, \ldots, v_{i,n})$, $\mathfrak{p}_i = (v_{i,m+1}, \ldots, v_{i,n})$ pro $i = 1, \ldots, m$. Vektory $\mathfrak{w}_1, \ldots, \mathfrak{w}_m$ jsou navzájem kolmé a stejně dlouhé, když a jen když jest:

$$\mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_j = 0 \text{ pro každou dvojici různých indexů } i, j, \text{ nabývajících hodnot } 1, \ldots, m \tag{3}$$

a když dále platí

$$\mathfrak{p}_i^2 = c - \mathfrak{v}_i^2 \text{ pro } i = 1, \ldots, m \text{ a pro jistou konstantu } c \geqq \mathfrak{v}_1^2. \tag{4}$$

Rozlišujme případy α) $n - m > m$, β) $n - m = m - 1$, γ) $m - r \leqq n - m < m - 1$, δ) $m - r > n - m < m - 1$.

K bodu α: Pro kterékoliv $c \geqq \mathfrak{v}_1^2$ lze soustavu (3), (4) splnit určitým systémem vektorů $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$.

K bodu β: Jenom nenulovými vektory $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ nelze soustavě (3) vyhovět. Avšak pro $|\mathfrak{p}_1| = 0$, $c = \mathfrak{v}_1^2$ lze (3), (4) splnit určitým systémem vektorů $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$. Část a) poučky 3 je tím dokázána. Přejdeme k důkazu části b).

Pouze nenulovými vektory $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ nelze ovšem soustavě (3), (4) vyhovět ani v případech γ) a δ). V případě γ) je však soustava (3), (4) řešitelná pro $c = \mathfrak{v}_1^2$, $|\mathfrak{p}_1| = \ldots = |\mathfrak{p}_r| = 0$. V případě δ) tato soustava řešitelná není. Důkaz je tím ukončen.

Věta 2. *Nechť jsou dány: (n, m)-konfigurace $\mathfrak{A}$ a (n, n)-konfigurace $\mathfrak{B}$. Lze sestrojit právě jeden nevlastní $(n - m - 1)$-prostor $\mathbf{C}$ a afinitu α_X mezi podpro-*

[5] Poloměry jsou pokládány za vektory.

storem vytvořeným konfigurací $\mathfrak{A}$ a libovolným, s $\mathbf{C}$ *disjunktním vlastním m-prostorem* $\mathbf{X}$ *tak, že v α_X odpovídá konfiguraci $\mathfrak{A}$ průmět konfigurace $\mathfrak{B}$ z centra* $\mathbf{C}$.

Důkaz. Afinita β nechť je určena tak, aby prvním $(m + 1)$-bodům konfigurace $\mathfrak{A}$ odpovídalo po řadě prvních $(m + 1)$-bodů konfigurace $\mathfrak{B}$. Pro každé $j = m + 2, \ldots, n + 1$ spojme j-tý bod z $\mathfrak{B}$ s bodem, který odpovídá v B j-tému bodu z $\mathfrak{A}$. Nevlastní body těchto $(n - m)$-přímek vytvořují nevlastní $(n - m - 1)$-prostor $\mathbf{C}$. Promítáním z $\mathbf{C}$ je mezi m-prostorem prvních $(m + 1)$-bodů z $\mathfrak{B}$ a mezi libovolným, s C disjunktním vlastním m-prostorem $\mathbf{X}$ zprostředkována afinita β_X tak, že $\mathfrak{A}^{\beta\beta_X}$ je průmětem konfigurace $\mathfrak{B}$ z centra $\mathbf{C}$. Naopak, je-li pro jistou afinitu α_X (mezi m-prostorem konfigurace $\mathfrak{A}$ a určitým m-prostorem $\mathbf{X}$) konfigurace $\mathfrak{A}^{\alpha_X}$ průmětem konfigurace $\mathfrak{B}$ z určitého nevlastního $(n - m - 1)$-prostoru $\mathbf{D}$, pak $\mathbf{D}$ splývá s $\mathbf{C}$. Věta 2 je tím dokázána.

Věta 3. *Nechť jsou dány (n, m)-konfigurace $\mathfrak{A}$ a (n, n)-konfigurace $\mathfrak{B}$ pro $2 \leqq m < n$. Nevlastní $(n - m - 1)$-prostoru* $\mathbf{C}$, *z něhož se $\mathfrak{B}$ promítá do konfigurace podobné s $\mathfrak{A}$, existuje vždy pro $n \geqq 2m - 1$. Pro $n < 2m - 1$ existuje pouze v případě $n \geqq 2m - r$ (je-li $\varkappa$ libovolná m-sféra, ležící v m-prostoru konfigurace $\mathfrak{A}$ a zvolíme-li v důkazu věty 3 prostor* $\mathbf{X}$ *kolmo k* $\mathbf{C}$, *pak r je násobnost nejdelšího hlavního poloměru m-elipsoidu $\varkappa^{\beta\beta_X}$).*

Důkaz vyplývá z věty 2 a z věty 1, aplikované na m-elipsoid, odpovídající libovolné m-sféře z m-prostoru konfigurace $\mathfrak{A}$ v afinitě mezi tímto m-prostorem a m-prostorem $\mathbf{X}$ kolmým k $\mathbf{C}$.

Věta 3 zobecňuje klasickou větu Pohlkeovu–Schwarzovu, která z ní vyplývá pro $n = 3 - m + 1$. Specialisací $n = m + 1$ dostaneme výsledek, ekvivalentní Stiefelovým větám 3, 4, 5 z [26]. Pro kolmé promítání souvisí naše výsledky s Hadwigerovou větou III z [7]. Je-li konfigurace $\mathfrak{B}$ z věty 3 rovnoramenným pravoúhlým simplexem, dostaneme z první části věty 3 Naumannovu větu 1.3 z článku [20].

V [9] podal autor předběžnou zprávu o větě, ekvivalentní s větou 3 (viz odst. 5, 4 citovaného článku). Pro vyjádření nutné a postačující podmínky existence promítání bylo užito charakteristických čísel jisté Gramovy matice analogicky s postupem Stiefelovým [26]. Autor odvodil větu analogickou větě 3, též pro případ, že (n, m)-konfigurace $\mathfrak{A}$ z věty 3 je nahrazena (n, n)-konfigurací a vztah paralelního promítání z $(n - m - 1)$- prostoru do m-prostoru vztahem kolineace, při níž existuje $(n - m - 1)$-prostor samodružných nevlastních bodů a vlastní m-prostor samodružných bodů.

Všimněme si, že studium (n, m)-konfigurací dovolovalo vyšetřovat i takové promítání, při němž některé „rameno" dané (n, m)-konfigurace leželo ve směru promítání. To byl také hlavní důvod, proč jsme (n, m)-konfiguraci nedefinovali jako zvláštní případ konfigurace desarguesovské.

Promítání desarguesovských konfigurací s některými „rameny" promítacími jsme do vyšetřování nezahrnuli. Tímto thematem zabýval se Kowalski [15] a Drs [4].

III. část

V předchozích dvou částech byla studována základní věta pro průmět souřadnicové konfigurace z vlastního centra, věta o paralelním průmětu souřadnicové konfigurace (zobecnění Pohlkeovy–Schwarzovy věty) a druhá základní věta pro průmět n-ramenné n-rozměrné desarguesovské konfigurace z libovolného centra. Též byla dokázána věta o perspektivní poloze dvou n-simplexů. Přitom šlo zásadně o promítání z $(n - m - 1)$-rozměrného podprostoru do m-rozměrného podprostoru; $2 \leqq m \leqq n - 1$. Tuto část věnujeme analogickým větám pro promítání n-rozměrné n-ramenné desarguesovské konfigurace z $(n - 2)$-rozměrného podprostoru do *přímky*.

V rozšířeném prostoru $\mathbf{E}_n$ je definována *l-ramenná m-rozměrná desarguesovská konfigurace* jako konfigurace bodů $O, A_1, A_2, \ldots, A_e, B_1, \ldots, B_e$, obsahující trojice různých kolineárních bodů O, A_i, B_i $(i = 1, 2, \ldots, e)$, přičemž body $O, A_1, \ldots, A_m$ jsou lineárně nezávislé a vytvářejí vlastní podprostor, v němž leží i body zbývající; $1 \leqq m < l \leqq n$.

Věta 1. *Nechť $2 \leqq n$. K dané n-ramenné jednorozměrné desarguesovské konfiguraci $\mathfrak{D}$ a n-ramenné n-rozměrné desarguesovské konfiguraci $\mathfrak{D}'$ lze sestrojit právě jeden $(n - 2)$-prostor* $\mathbf{C}$ *a projektivitu λ_x mezi přímkou d, na níž leží $\mathfrak{D}$ a libovolnou vlastní, s* $\mathbf{C}$ *disjunktní přímkou x tak, že v λ_x odpovídá konfiguraci $\mathfrak{D}$ průmět konfigurace $\mathfrak{D}'$ z centra* $\mathbf{C}$. *Je-li* $\mathbf{C}$ *vlastní, pak mezi λ_x náleží afinity všech modulů.* Je-li $\mathbf{C}$ nevlastní, pak buďto žádné *λ_x není afinitou anebo každé λ_x je afinitou, přičemž moduly těchto afinit nabývají hodnot větších nebo rovných modulu té afinity λ_x, při níž x je kolmé k* $\mathbf{C}$.

Důkaz. Položme $\mathfrak{D} = \{O, A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n\}$, $\mathfrak{D}' = \{O', A_1', \ldots, A_n', B_1', \ldots, B_n'\}$, $O'A_1' = d'$. Mezi d, d' je stanovena projektivita γ tak, že $O^\gamma = O'$, $A_1^\gamma = A_1'$, $B_1^\gamma = B_1'$. Body $A_j^\gamma A_j' \cap B_j^\gamma B_j'$, $j = 2, \ldots, n$, vytvářejí $(n - 2)$-prostor $\mathbf{C}$, z něhož se $\mathfrak{D}'$ promítá do libovolné s $\mathbf{C}$ disjunktní vlastní přímky x jakožto konfigurace $\mathfrak{D}_x$. Promítáním z $\mathbf{C}$ do x je mezi d', x zprostředkována projektivita λ_x tak, že $\mathfrak{D}^{\lambda_x} = \mathfrak{D}_x$. Má-li $(n - 2)$-prostor $\mathbf{S}$ tytéž vlastnosti jako $\mathbf{C}$ (t. j. z $\mathbf{S}$ promítá se $\mathfrak{D}'$ do libovolné, s $\mathbf{S}$ disjunktní vlastní přímky x jakožto konfigurace $\mathfrak{D}_x^*$ a existuje projektivita δ_x tak, že $\mathfrak{D}^{\delta_x} = \mathfrak{D}_x^*$), pak nutně $\mathbf{S}$ splývá s $\mathbf{C}$. — Nechť nyní $\mathbf{C}$ je vlastní. Nevlastní bod přímky d zobrazuje se projektivitou γ v bod Q přímky d'. Vyberme libovolnou rovinu $\mathbf{N}$ kolmou k $\mathbf{C}$. Nabývá-li přímka x všech poloh x_1 ležících v $\mathbf{N}$ a rovnoběžných s nadrovinou $\mathbf{C}Q$, pak průměty $\mathfrak{D}_{x_1}$ jsou homothetické podle $\mathbf{C} \cap \mathbf{N}$ a poměr homothetie nabývá všech dovolených hodnot. Tedy i moduly afinit $\gamma\lambda_{x_1}$ nabývají všech přípustných hodnot. — Nechť nyní $\mathbf{C}$ je nevlastní. Pak každé λ_x je afinitou. Není-li γ afinitou, pak ani žádné $\gamma\lambda_x$ není afinitou. Je-li však γ afinitou, pak každé $\gamma\lambda_x$ je afinitou. Vyberme mezi x přímku x_0 kolmou k $\mathbf{C}$; označme m_0 modul afinity $\gamma\lambda_{x_0}$. Střed promítání zprostředkuje mezi x_0 a libovolnou z přímek x afinitu; nabývá-li x všech dovolených poloh, pak modul předchozí afinity nabývá všech hodnot větších nebo rovných jedné. Tedy moduly afinit $\gamma\lambda_x$ nabývají všech hodnot větších nebo rovných m_0.

Věta 1 rozšiřuje platnost druhé základní věty (viz II, § 1, věta 3) i pro $m = 1$. První základní větu (viz II, § 1, věta 1) však přirozeným způsobem již zobecnit nelze, neboť definice přidruženého m-elipsoidu (viz II, § 1) ztrácí význam.

(n, m)-konfiguraci definujme jako posloupnost $n + 1$ vlastních bodů, ležících v témž m-prostoru, při čemž prvních $m + 1$-bodů je lineárně nezávislých; II, § 2.

Věta 2. *Nechť jsou dány $(n, 1)$-konfigurace $\mathfrak{A}$ a (n, n)-konfigurace $\mathfrak{B}$. Pak existuje právě jeden nevlastní $(n - 2)$-prostor $\mathbf{C}$, z něhož se $\mathfrak{B}$ promítá do konfigurace podobné s $\mathfrak{A}$.*

Důkaz. Položme $\mathfrak{A} = \{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$, $\mathfrak{B} = \{B_0, B_1, \ldots, B_n\}$, $A_0A_1 = a$, $B_0B_1 = b$. Mezi a, b je stanovena právě jedna afinita α tak, že $A_0^\alpha = B_0$, $A_1^\alpha = B_1$. Nevlastní body přímek $A_j^\alpha B_j$, $j = 2, \ldots, n$ vytvářejí podprostor $\mathbf{C}$, jehož dimense je, jak se snadno dokáže, $n - 2$. Z $\mathbf{C}$ promítá se $\mathfrak{B}$ do kterékoliv vlastní, s $\mathbf{C}$ disjunktní přímky x jako konfigurace $\mathfrak{A}_x$ podobná s $\mathfrak{A}$. Nechť $\mathbf{S}$ je nevlastní $(n - 2)$-prostor, z něhož se $\mathfrak{B}$ promítá do kterékoliv vlastní, s $\mathbf{S}$ disjunktní přímky x jako konfigurace $\mathfrak{A}_x^*$ podobná s $\mathfrak{A}$; z toho lehko plyne, že $\mathbf{S}$ splývá s $\mathbf{C}$. Centrum $\mathbf{C}$ je tedy určeno jednoznačně. — V příznivém případě lze zvolit x v přípustné poloze x_1 tak, že podobnost mezi $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_{x_1}$ je dokonce shodností. Přímka x_1 pak protíná nadroviny $\mathbf{C}B_0$, $\mathbf{C}B_1$ v úsečce kongruentní s úsečkou ohraničenou body A_0, A_1.

Věta 2 rozšiřuje platnost hlavní věty paralelní axonometrie (II, § 3, věta 3) též pro $m = 1$. Pro případ, že $\mathfrak{B}$ je rovnoramenný pravoúhlý simplex, dokazuje větu 2 F. Hohenberg (viz [11], Abt. I, Fall 3, Beisp. c, S. 61—62); důkaz provádí cestou analytickou. Promítání z $(n - 2)$-prostoru do přímky p nazývá *kótováním* (viz [11], Abt. I, S. 55), protože průměty bodů lze nahradit zadáním číselné souřadnice — *kóty* na přímce p. „*Kótované promítání*" skládá se pak z promítání do pevné nadroviny π a kótování vzhledem k přímce p různoběžné s π.

LITERATURA

[1] Н. М. Бескин, Основное предложение аксонометрии, Вопросы современной начертательной геометрии, Москва—Ленинград 1947, 55—126.

[2] L. Drs, O základní větě centrální axonometrie, Čas. pro pěst. mat. 82 (1957), 165—174.

[3] L. Drs, O centrální axonometrii, Čas. pro pěst. mat. 83 (1958), 2. číslo.

[4] L. Drs, Centrální axonometrie v n-dimensionálním prostoru, rukopis.

[5] И. С. Джапаридзе, Проективно-синтетическое доказательство теоремы Н. М.

Бескина, Методы начертательной геометрии и ее приложения, Москва 1955, 100—104.

[6] Е. А. Глазунов—Н. Ф. Четверухин, Аксонометрия, Москва 1953, str. 46.

[7] H. Hadwiger, Über ausgezeichnete Vektorsterne und reguläre Polytope, Comm. Mat. Helv. 13 (1940/41), 90—107.

[8] V. Havel, Základní věty centrální axonometrie, Čas. pro pěst. mat. 82 (1957), 175—180.

[9] V. Havel, Vztah kolmého promítání mezi $(n - 1)$-sférou a $(n - 1)$-elipsoidem v E_n, Sborník Vys. uč. techn. v Brně III (1957), 309—316.

[10] J. Havelka, Čtyrstěny odpovídající si v regulové afinitě, Sborník Vys. uč. techn. v Brně 1958 (v tisku).

[11] F. Hohenberg, Projektionen projektiver Räume, Monatsh. f. Math. 61 (1957), 54—66.

[12] F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, III. Aufl., II. Band: Geometrie, Berlin 1925, 75—89.

[13] K. Kommerell, Über nichtaffine Raumkollineationen, Jhrsbr. d. d. Math.-Ver. 29 (1920), 1—27.

[14] K. Kommerell, Affine Raumtransformationen und Affinoren, Jhrsbr. d. d. Math.-Ver. 30 (1921), 35—55.

[15] Zd. Kowalski, Poznámka o degenerované axonometrii, Sborník Vys. uč. techn. v Brně 1958 (v tisku).

[16] Е. А. Мчедлишвили, Проективные основания начертательной геометрии, Труды Груз. полит. инст. Тбилиси 19 (1949), 115—190.

[17] Е. А. Мчедлишвили, Элементарные доказательство основной теоремы центрального проектирования, Труды Тбил. гос. унив. Тбилиси 56 (1955), 141—144.

[18] E. Müller, Vorlesungen über darstellende Geometrie, I. Band: Die linearen Abbildungen, bearbeitet von E. Kruppa, Leipzig—Wien 1923.

[19] H. Naumann, Beliebige konvexe Polytope als Schnitte und Projektionen höherdimensionaler Würfel, Simplices und Maßpolytope, Math. Zeitr. 65 (1956), 91—103.

[20] H. Naumann, Über Vektorsterne und Parallelprojektionen regulärer Polytope, Math. Zeitschr. 67 (1957), 75—82.

[21] В. Н. Первикова, Обобщение основной теоремы центральной аксонометрии на пространство n измерений, Методы начертательной геометрии и её приложения, Москва 1955, 141—155.

[22] T. Reye, Geometrie der Lage II, Stuttgart 1907, 27.

[23] A. Schoenflies, Enzyklopädie der math. Wiss. III, 1, Leipzig 1907—1910, 426.

[24] P. H. Schoute, Mehrdimensionale Geometrie II, Leipzig 1905.

[25] O. Staude, Affinität und Kollineation im Raume, Jhrsbr. d. d. Math.-Ver. 32 (1923), 160—174.

[26] E. Stiefel, Zum Satz von Pohlke, Comm. Math. Helv. 10 (1937/38), 208—225.

[27] E. Stiefel, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Basel 1947, 135.

[28] R. Sturm, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften III, Leipzig—Berlin 1909, 201—212.

[29] J. Vojtěch, Geometrie projektivní, Praha 1932, 526—537.

Další literatura (psáno při korektuře 30. 4. 1958):

[30] H. Brauner, Kongruente Verlagerung kollinearer Räume in achsiale Lage, Monatsh. f. Math. 57 (1953), 75—87.

[31] H. Brauner, Kongruente Verlagerung kollinearer Räume in halbachsiale Lage, Monatsh. f. Math. 58 (1954), 13—26.

[32] L. Hofmann, Über die Herstellung achsialer Lagen von kollinearen Räumen bei Zugrundelegung einer elliptischen Metrik, Monatsh. f. Math. 58 (1954), 143—159.
[33] M. Jeger, Das axonometrische Prinzip im Lichte moderner Begriffsbildungen, El. d. Math. 13 (1958), 1—13.
[34] V. Havel, O singulární anfinitě a kolineaci, předloženo Časopisu pro pěstování matematiky.

Došlo 6. 7. 1957 a 27. 8. 1957.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie fakulty inženýrského stavitelství při Vysokém učení technickém v Brně

ОБ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМАХ МНОГОМЕРНОЙ ЦЕНТРАЛЬНОЙ АКСОНОМЕТРИИ II, III

(Продолжение ровноименной статьи, Mat.-fyz. čas. 7 [1957], 94—107)

ВАЦЛАВ ГАВЕЛ

Выводы

Часть II, § 1 содержит некоторые дополнения к обоим основным теоремам (см. Mat.-fyz. čas. 7 [1957], стр. 106—107). В § 2 исследуются условия, при которых два симплекса соответствуют себе в перспективной аффините с точностью до подобности. В § 3 обобщается синтетически один результат Г. Наумана (см. Math. Zeitschr. 67 [1957], теорема 1.3, стр. 78). В существе это обобщение классической теоремы Полке и Шварца. В части III. исследуется проекция конфитурации Дезарга так наз. (n, m)-конфигурации на приямую линию (см. Ф. Хохенберг, Monatsh. für Math. 61 [1957], 55).

FUNDAMENTALSÄTZE DER MEHRDIMENSIONALEN ZENTRALAXONOMETRIE II, III

(Fortsetzung des gleichlautenden Artikels, Mat.-fyz. čas. 7 [1957], S. 94—107)

VÁCLAV HAVEL

Zusammenfassung

Im Teil II, § 1 führt der Verfasser einige Ergänzungen zu den beiden Fundamentalsätzen an (siehe Mat.-fyz. čas. 7 [1957], S. 106—107). Im § 2 werden die Bedingungen, unter denen zwei Simplizes sich bis auf die Ähnlichkeit in einer perspektiven Affinität entsprechen, untersucht. Im § 3 wird ein Resultat von H. Naumann (siehe Math. Zeitschr. 67 [1957], Satz 1. 3, S. 78) synthetisch verallgemeinert. Es handelt sich im wesentlichen um eine Verallgemeinerung des klassischen Satzes von Pohlke und Schwarz. Im Teil III ist die Projektion der desarguesschen Konfiguration und der sog. (n, m)-Konfiguration in die Gerade (vergleiche F. Hohenberg, Monatsh. für Math. 61 [1957], S. 55) untersucht.