O NĚKTERÝCH VLASTNOSTECH PICARDOVÝCH POSLOUPNOSTÍ

ZDENĚK HUSTÝ, Brno

1. V diferenciální rovnici

$$y' = f(x, y) \tag{1.1}$$

učiňme o funkci $f(x, y)$ předpoklad, že je spojitá a monotonní vzhledem k y v dvojrozměrném intervalu $D: |x| \leqq a,\ |y| \leqq b$, kde $a = \text{konst} > 0$, $b = \text{konst} > 0$. Uvažujme o řešeních diferenciální rovnice (1.1), která procházejí počátkem a jsou definována *jen* pro $x \geqq 0$.

Rovnicemi

$$y_k(x) = \int_0^x f[t, y_{k-1}(t)]\, dt, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{1.2}$$

je určena v jistém intervalu $J \equiv \langle 0, \varrho \rangle$ $(\varrho \leqq a)$ Picardova posloupnost funkcí, patřících k diferenciální rovnici (1.1), k bodu (0, 0) a k libovolně zvolené výchozí funkci $y_0(x)$, která má v čísle 0 hodnotu 0, má všude derivaci a její hodnoty leží vesměs v intervalu $\langle -b, b \rangle$.

Nechť značí $\{Z_i^{nk}\}$, $\{\Delta_i^{nk}\}$ (n přirozené, $k = 1, 2, \ldots, i = 1, 2, \ldots, n$) posloupnosti funkcí definovaných v intervalu J takto:

$$\begin{aligned}
Z_0^{nk} &= y_0'(x) - f[x, y_{n-1}(x)],\\
Z_i^{nk} &= f[x, y_{(k-1)n+i-1}] - f[x, y_{kn+i-1}], \quad k = 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots n,\\
\Delta_i^{nk} &= \int_0^x Z_{i-1}^{nk}\, dt = y_{(k-1)n+i-1} - y_{kn+i-1}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

2. Předpokládejme nejdříve, že funkce $f(x, y)$ v intervalu D vzhledem k y neklesá. Jestliže v nějakém intervalu $J' \subset J$ je

$$Z_{i-1}^{nk} \geqq 0 \qquad (Z_{i-1}^{nk} \leqq 0),$$

pak podle (1.3) platí v J' nerovnosti

$$\Delta_i^{nk} \geqq 0 \qquad (\Delta_i^{nk} \leqq 0),$$
$$Z_i^{nk} \geqq 0 \qquad (Z_i^{nk} \leqq 0).$$

Učiňme tedy předpoklad, že pro pevné n platí v J'

$$y_0' \geqq f[x, y_{n-1}(x)] \qquad (y_0' \leqq f[x, y_{n-1}(x)]). \tag{2.1}$$

Potom částečné posloupnosti

$$\{y_{\nu n}\}, \quad \{y_{\nu n+1}\}, \quad \{y_{\nu n+2}\}, \ldots, \quad \{y_{\nu n+n-1}\}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

jsou monotónní, takže existuje v J' stejnoměrně

$$\lim_{\nu \to \infty} y_{\nu n+s} = Y_s(x), \qquad s = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \text{ (viz na př. [4]).}$$

Funkce $Y_s(x)$ vyhovují systému diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} Y_1' &= f[x, Y_0], \\ Y_2' &= f[x, Y_1], \\ &\cdots\cdot \\ Y_{n-1}' &= f[x, Y_{n-2}], \\ Y_0' &= f[x, Y_{n-1}]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ukažme, že systém (2.3) má jenom řešení tvaru $Y_0 = Y_1 = \ldots = Y_{n-1} = y(x)$, kde $y(x)$ je řešení rovnice (1.1). Předpokládejme tedy, že všechny funkce $Y_s(x)$ v intervalu J' nesplývají a bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že $Y_0(x) - Y_1(x) \not\equiv 0$. Existuje bod $0 \neq c \in J'$ takový, že na př. $Y_0(c) > Y_1(c)$. Vzhledem k spojitosti obou funkcí existuje dále největší interval $\langle x_0, c\rangle$ takový, že $0 \leqq x_0 < c$, $Y_0(x_0) = Y_1(x_0)$, $Y_0(x) \geqq Y_1(x)$ pro $x \in \langle x_0, c\rangle$. Integrací rovnice

$$Y_1' - Y_2' = f[x, Y_0(x)] - f[x, Y_1(x)]$$

v intervalu $\langle x_0, c\rangle$ dojdeme k nerovnosti

$$Y_1(c) \geqq Y_2(c).$$

Podobným způsobem odvodíme spornou relaci

$$Y_0(c) > Y_1(c) \geqq Y_2(c) \geqq \ldots \geqq Y_{n-1}(c) \geqq Y_0(c).$$

Došli jsme k tomuto výsledku:

Když funkce $f(x, y)$ v intervalu D vzhledem k y neklesá a mezi dvěma funkcemi $y_0(x)$, $y_{n-1}(x)$ Picardovy posloupnosti (1.2) platí v nějakém intervalu $J' \subset J$ nerovnost (2.1), pak Picardova posloupnost v intervalu J' stejnoměrně konverguje k řešení diferenciální rovnice (1.1).

Poznámka 2.1. Z důkazu je patrné, že místo (2.1) můžeme předpokládat

$$f[x, y_\nu(x)] \geqq f[x, y_{\nu+n}(x)] \qquad (f[x, y_\nu(x)] \leqq f[x, y_{\nu+n}(x)]), \tag{2.4}$$

eventuálně

$$y_\nu(x) \geqq y_{\nu+n}(x) \qquad (y_\nu(x) \leqq y_{\nu+n}(x)),$$

ν = libovolné přirozené číslo.

3. Nechť funkce $f(x, y)$ v intervalu D vzhledem k y neroste. Jestliže v nějakém intervalu $J' \subset J$ je

$$Z_{i-1}^{nk} \geqq 0 \qquad (Z_{i-1}^{nk} \leqq 0),$$

pak podle (1.3) platí v J' nerovnosti

$$\Delta_i^{nk} \geqq 0 \qquad (\Delta_i^{nk} \leqq 0),$$

$$Z_i^{nk} \leqq 0 \qquad (Z_i^{nk} \geqq 0).$$

Předpokládejme tedy, že platí (2.1). Je-li n sudé, pak částečné posloupnosti (2.2) jsou monotonní, stejnoměrně konvergují v intervalu J' a jejich limity vyhovují systému (2.3). Jestliže systém (2.3) má řešení, kde $Y_i(x) \not\equiv Y_j(x)$, $i \neq j$, $i, j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, pak Picardova posloupnost, patřící k diferenciální rovnici (1.1), k bodu (0, 0) a k výchozí funkci $Y_i(x)$ je periodická. Jestliže systém (2.3) má pouze jediné řešení, pak $Y_0 = Y_1 = \ldots = Y_{n-1} = y(x)$, kde $y(x)$ je jediné řešení diferenciální rovnice (1.1) (viz [5], str. 89) a posloupnost (1.2) stejnoměrně v J' konverguje.

Poznámka 3.1. Opět místo (2.1) můžeme předpokládat (2.4).

4. V dalších úvahách se omezíme na případ $n = 2$. Předpokládáme tedy, že mezi některou funkcí $y_\nu(x)$ Picardovy posloupnosti (1.2) a následující funkcí $y_{\nu+1}(x)$ platí v nějakém intervalu $J' \equiv \langle 0, \alpha\rangle$ nerovnost

$$y_\nu'(x) \geqq f[x, y_{\nu+1}(x)] \qquad (y_\nu'(x) \leqq f[x, y_{\nu+1}(x)]) \tag{4.1}$$

a že funkce $f(x, y)$ vzhledem k y v intervalu $\langle -b, b\rangle$ neroste. Pak částečná Picardova posloupnost funkcí o sudých [lichých] indexech v intervalu J' stejnoměrně konverguje monotonně shora nebo zdola [zdola nebo shora] k jisté funkci $Y_0(x)$ [$Y_1(x)$], viz [3]. Funkce $Y_0(x)$, $Y_1(x)$ jsou řešením systému diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} Y_0' &= f[x, Y_1], \\ Y_1' &= f[x, Y_0]. \end{aligned} \tag{4.2}$$

a mají v bodě 0 hodnotu 0. Uvedeme některé vlastnosti funkcí Y_0, Y_1:

1° Jestliže v některém bodě $c \in (0, \alpha)$ je $Y_0(c) \neq Y_1(c)$, pak $Y_0(x) \not\equiv y_1(x)$ pro všechna $x \in \langle c, \alpha\rangle$.

V opačném případě existuje $x_0 \in (c, \alpha)$ takové, že $Y_0(x_0) = Y_1(x_0)$ $Y_0(x) \neq Y_1(x)$ pro $x \in \langle c, x_0)$. Předpokládejme, že platí na př. nerovnost

$$Y_0(x) > Y_1(x) \qquad \text{pro } x \in \langle c, x_0). \tag{4.3}$$

Pak

$$f[x, Y_0(x)] \leqq f[x, Y_1(x)],$$

$$Y_1(x_0) - Y_1(c) = \int_c^{x_0} f[x, Y_0(x)]\,\mathrm{d}x \leqq \int_c^{x_0} f[x, Y_1(x)]\,\mathrm{d}x = Y_0(x_0) - Y_0(c).$$

Poslední nerovnosti jsou vzhledem k (4.3) nemožné.

2° Jestliže v některém bodě $c \in (0, \alpha\rangle$ je $Y_0(c) > Y_1(c)$, pak

$$Y_0(x) \geqq Y_1(x) \qquad \text{pro všechna } x \in \langle 0, \alpha\rangle. \tag{4.4}$$

Neplatí-li nerovnost (4.4) pro všechna $x \in (0, \alpha\rangle$, pak množina čísel, pro něž (4.4) neplatí, má dolní hranici $m \in \langle 0, \alpha\rangle$ a vzhledem k spojitosti funkcí $Y_0(x)$, $Y_1(x)$ je $Y_0(m) = Y_1(m)$. Je $m < \alpha$ a podle 1° je také $m < c$. Zvolme $0 < \varepsilon < c - m$. Podle definice čísla m existuje v intervalu $(m, m + \varepsilon)$ aspoň jedno číslo $\bar{x}$ takové, že $Y_0(\bar{x}) < Y_1(\bar{x})$, což podle 1° není možné.

Poznámka 4.1. Jestliže platí $Y_0(c) > Y_1(c)$ pro $c \in (0, \alpha\rangle$, pak existuje největší interval $\langle x_0, \alpha\rangle$ takový, že $0 \leqq x_0 < c$, $Y_0(x_0) = Y_1(x_0)$, $Y_0(x) > Y_1(x)$ pro $x \in (x_0, \alpha\rangle$, $Y_0(x) = Y_1(x)$ pro $x \in \langle 0, x_0\rangle$. Jestliže $x_0 \neq 0$, pak Picardova posloupnost (1.2) v intervalu $\langle 0, x_0\rangle$ konverguje. Vyloučíme-li tuto možnost, pak můžeme stále předpokládat, že

$$Y_0(x) > Y_1(x) \qquad \text{pro } x \in (0, \alpha\rangle. \tag{4.5}$$

Nyní učiníme doplňující předpoklad, že funkce $f(x, y)$ vzhledem k y v intervalu $\langle -b, b\rangle$ klesá.

3° Jestliže v nějakém bodě $c \in (0, \alpha)$ platí $Y_0(c) > y(c)$, pak $Y_0(x) \geqq y(x)$ pro všechna $x \in \langle c, \alpha\rangle$ [$y(x)$ je jediné řešení diferenciální rovnice (1.1)].

Předpokládejme opak. Podle Perronovy metody indukce v kontinuu existuje číslo $m \in (c, \alpha)$ takové, že

$$\begin{aligned} Y_0(m) &= y(m),\\ Y_0'(m) &\leqq y'(m). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Avšak s ohledem na (4.5) je

$$Y_0'(m) = f[m, Y_1(m)] > f[m, Y_0(m)] = f[m, y(m)] = y'(m),$$

což není podle (4.6) možné.

4° Platí aspoň jedna z nerovností

$$Y_0(x) \geqq y(x), \tag{4.7}$$

$$Y_1(x) \leqq y(x) \qquad \text{pro všechna } x \in \langle 0, \alpha\rangle. \tag{4.8}$$

Jestliže neplatí ani jedna z nerovností (4.7) [(4.8)], pak množina těch bodů, pro které neplatí (4.7) [(4.8)], má jistou dolní hranici $m_1 < \alpha$ [$m_2 < \alpha$]. Podle Perronovy indukce v kontinuu je

$$\begin{aligned} Y_0(m_1) &= y(m_1),\\ Y_0'(m_1) &\leqq y'(m_1), \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1(m_2) = y(m_2) \\ Y_1'(m_2) \geqq y'(m_2) \end{bmatrix}. \tag{4.10}$$

Musí být $m_1 = 0$ [$m_2 = 0$], neboť v opačném případě je s ohledem na (4,5)

$$Y_0'(m_1) = f[m_1, Y_1(m_1)] > f[m_1, Y_0(m_1)] = f[m_1, y(m_1)] = y'(m_1),$$

$$[Y_1'(m_2) = f[m_2, Y_0(m_2)] < f[m_2, Y_1(m_2)] = f[m_2, y(m_2)] = y'(m_2)].$$

Tyto nerovnosti dávají spor vzhledem k (4,9), (4,10).

Zvolme $0 < \varepsilon < \alpha$. Podle definice čísla $m_1 = 0$ existuje číslo $x_1 \in (0, \varepsilon)$ takové, že

$$Y_0(x_1) < y(x_1). \tag{4.11}$$

Podle definice čísla $m_2 = 0$ existuje číslo $x_2 \in (0, x_1)$ takové, že

$$Y_1(x_2) > y(x_2).$$

Podle (4,5) je také

$$Y_0(x_2) > y(x_2),$$

takže (4.11) je ve sporu s tvrzením odstavce 3°, neboť $x_2 < x_1$.

5° Obě nerovnosti (4.7), (4.8) platí současně. Nechť na př. platí (4.7). V bodech, ve kterých se vyskytuje znaménko rovnosti, je nerovnost (4.8) podle (4.5) splněna. Nuže jak vypadá situace v libovolném bodě $c \in (0, \alpha)$, v němž je

$$Y_0(c) > y(c).$$

Pro všechna $x \in \langle 0, c\rangle$ je podle (4.7)

$$Y_1'(x) = f[x, Y_0(x)] \leqq f[x, y(x)] = y'(x),$$

takže

$$Y_1(c) = \int_0^c f[x, Y_0(x)] < \int_0^c f[x, y(x)] = y(c).$$

Poznámka 4.2. Z důkazu odst. 5° vyplývá, že pro všechna $x \in (0, \alpha\rangle$ platí nerovnosti $Y_0(x) > y(x) > Y_1(x)$.

Poznámka 4.3. Jestliže $f(x, 0) = 0$ pro všechna $x \in \langle 0, \alpha\rangle$, pak funkce $Y_0(x)$ [$Y_1(x)$] je pro $x \in (0, \alpha\rangle$ stále kladná [záporná] a roste [klesá].

Poznámka 4.4. Nechť funkce $f(x, y)$ splňuje tyto předpoklady:

a) $f(x, 0) = 0$ pro $x \in \langle 0, \alpha \rangle$;

b) pro $y < 0$ [$y > 0$] v intervalu D vzhledem k y klesá nebo roste [roste nebo klesá].

Jestliže platí v intervalu $\langle 0, \alpha \rangle$ nerovnosti (4.1), pak Picardova posloupnost (1.2) v intervalu $\langle 0, \alpha \rangle$ konverguje.

Z předpokladu plyne, že funkce $f[x, y]$ je v intervalu D buď stále nezáporná nebo nekladná. Jsou tedy obě funkce $Y_0(x)$, $Y_1(x)$ současně nezáporné nebo nekladné. Stačí tedy uvažovat o řešení systému (4.2) buď v intervalu D_1: $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$ nebo D_2: $0 \leqq x \leqq a$, $0 \geqq y \geqq -b$. Jestliže funkce v D_1 roste, pak podle výsledku odst. 2 je $Y_0(x) = Y_1(x)$. Jestliže funkce v D_1 klesá, pak podle pozn. 4.2 je $Y_0(x) = Y_1(x) = 0$. Stejný závěr platí pro interval D_2.

Poznámka 4.5. Nechť funkce $f(x, y)$ splňuje tyto předpoklady:

a) vzhledem k y v intervalu D klesá;

b) vzhledem k y je v intervalu D lichou funkcí.

Každé řešení $Y_0(x)$, $Y_1(x)$ systému (4.2) vyhovuje rovnici

$$Y_1(x) = -Y_0(x). \tag{4.12}$$

Jestliže $Y_0(x)$, $Y_1(x)$ je řešení systému (4.2), kde funkce $f(x, y)$ vzhledem k y klesá, pak funkce $\overline{Y}_0 = -Y_0$, Y_1 jsou řešením systému

$$\overline{Y}_0' = -f[x, Y_1],$$
$$Y_1' = -f[x, \overline{Y}_0],$$

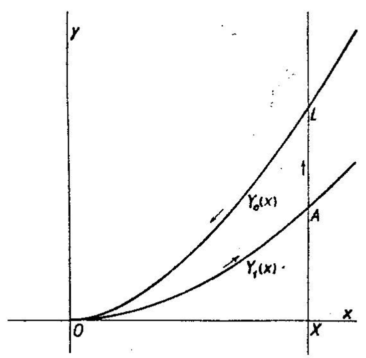
kde funkce $-f(x, y)$ vzhledem k y roste. Podle odst. 2 je $\overline{Y}_0(x) = Y_1(x) = y(x)$, kde $y(x)$ je řešení diferenciální rovnice $y' = -f(x, y)$.

Odtud vyplývá postačující podmínka pro periodičnost Picardovy posloupnosti: Picardova posloupnost, patřící k funkci $f(x, y)$ [jež vzhledem k y je lichou funkcí a klesá v intervalu D], k bodu (0,0) a k výchozí funkci $y_0(x)$ [jež je řešením diferenciální rovnice $y' = -f(x, y)$], je tvaru

$$y_0(x),\ y_1(x),\ y_0(x),\ y_1(x),\ \ldots,$$

kde

$$y_1(x) = \int_0^x f[t, y_0(t)]\,dt.$$



Obr. 1

5. Předpokládejme, že funkce $f(x, y)$, která vzhledem k y klesá, má spojitou parciální derivaci podle x v intervalu D a nechť

$$\varphi(x, y) = \int_0^y f_x'(x, t)\,dt.$$

Potom

$$\int_{K=\widehat{OABO}} \varphi(x, y)\,dx + f(x, y)\,dy = 0, \tag{5.1}$$

kde orientace křivky K byla zvolena podle obr. 1, při čemž funkce $Y_0(x)$, $Y_1(x)$ jsou řešením systému (4.2) a mají vlastnost uvedenou v poznámce 4.2.

Rovnici (5.1) můžeme upravit na tvar

$$\int_0^x dt \int_{Y_1(t)}^{Y_0(t)} f_t'(t, u)\,du = \int_{Y_1(x)}^{Y_0(x)} f(x, y)\,dy. \tag{5.2}$$

Vidíme, že složky řešení systému (4.2) můžeme hledat mezi funkcemi, které vyhovují rovnici (5.2). V dalších odstavcích ukážeme, že v některých případech můžeme hledat složky řešení systému (4.2) mezi funkcemi, které vyhovují jednodušší rovnici, než je (5.2). Připomeňme, že se zajímáme pouze o řešení systému (4.2), která procházejí počátkem a jsou definována pro $x \geqq 0$.

1° Nechť funkce $y(x)$, $z(x)$ jsou řešením systému (4.2). Potom

$$\int_{z(x)}^{y(x)} f_x'(x, u)\,du = 0 \Leftrightarrow \int_{z(x)}^{y(x)} f(x, u)\,du = 0.$$

Tvrzení vyplývá z rovnice (5.2).

2° Položme

$$G(x, y) = \int_0^y f(x, t)\,dt$$

a uvažujme o rovnici

$$F(x, y, z) = G(x, y) - G(x, z) = 0. \tag{5.3}$$

Předpokládejme, že existuje spojitá funkce

$$z = \varphi(x, y), \tag{5.4}$$

definovaná v intervalu $\overline{D}: 0 \leqq x \leqq \alpha \leqq a$, $|y| \leqq \beta$, $0 < \beta = \text{konst} \leqq b$, která v intervalu $\overline{D}$ splňuje rovnice

$$F[x, y, \varphi(x, y)] = 0, \qquad \varphi(0, 0) = 0. \tag{5.5}$$

Nechť $y(x)$ je řešení diferenciální rovnice

$$y' = f[x, \varphi(x, y)], \tag{5.6}$$

vyhovující počáteční podmínce $y(0) = 0$ a nechť

$$z(x) = \varphi[x, y(x)]. \tag{5.7}$$

Poznámka 5.1. V rovnici (5.7) předpokládáme, že $|y(x)| \leqq \beta$, $|z(x)| \leqq b$ pro $x \in \langle 0, \alpha \rangle$. Tento předpoklad zajisté nečiní naše úvahy méně obecnými.

Rovnice (5.7) je podle (5.3) v intervalu $\langle 0, \alpha \rangle$ ekvivalentní s rovnicí

$$G[x, y(x)] = G[x, z(x)]. \tag{5,8}$$

Jestliže funkce $y(x)$, $z(x)$ splňují ještě podmínku

$$\int_{z(x)}^{y(x)} f'_x(x, u)\, du = 0, \qquad x \in \langle 0, \alpha \rangle, \tag{5.9}$$

pak derivací (5.8) s ohledem na (5.9), (5.6) obdržíme vztah

$$f[x, \varphi(x, y(x))] \,.\, \{z'(x) - f[x, y(x)]\} = 0. \tag{5.10}$$

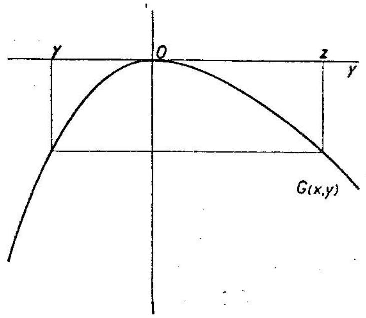
Rovnice (5.10) ovšem vyžaduje existenci funkce $z'(x)$.

Jestliže pomocí rovnice (5.10) dojdeme k závěru, že pro $0 \leqq x \leqq \alpha$ platí

$$z'(x) = f[x, y(x)],$$

pak funkce $y(x), z(x)$ [definované rovnicemi $\int_z^y f(x, u)\, du = 0$, (5.6), (5.7), (5.9)] jsou v intervalu $\langle 0, \alpha \rangle$ řešením systému (4.2).

Poznámka 5.2. Rovnice (5.3) má vždy triviální řešení $z = y$, které splňuje podmínky (5.5). Jestliže $y_0(x)$ je řešení diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$, pak funkce $y(x)$, $z(x)$, kde $y(x) = z(x) = y_0(x)$, jsou řešením systému (4.2).



Obr. 2

V dalších odstavcích se budeme zajímat hlavně o existenci netriviálního řešení rovnice (5.3).

3° Je-li $f(x, 0) \neq 0$, pro všechna $x \in \langle 0, \alpha \rangle$, má rovnice (5.3) pouze triviální řešení $y = z$ (viz [1], odst. 220, str. 342).

4° Nechť $f(x, 0) = 0$ pro všechna $x \in \langle 0, \alpha \rangle$. Pak platí tato **tvrzení:**

A. *Rovnice* (5.3) *má jediné netriviální řešení* (5.4).

B. *Funkce* (5.4) *je spojitá.*

C. *Jestliže funkce* $y(x)$, $z(x)$ [*kde* $y(x) = 0$, $z(x) = \varphi[x, y(x)]$] *splňují podmínku* (5.9), *pak jsou řešením systému* (4.2).

Poznámka 5.3. Všimněme si, že $f(x, y) > 0 (< 0)$ pro $y < 0\ (> 0)$. Funkce $G(x, y)$ pro $y < 0\ (> 0)$ při pevném $x \in \langle 0, \alpha \rangle$ vzhledem k y roste (klesá), při čemž $G(x, 0) = 0$.

Důkaz tvrzení A.

Buď (x, y) libovolný bod v jistém vhodném dvojrozměrném intervalu $\overline{D}_1$: $0 \leqq x \leqq \alpha$, $-b_1 \leqq y \leqq b_2$, $0 < b_i = \text{konst.} \leqq b$, $i = 1,2$. Pak můžeme najít jedinou hodnotu $z \in \langle -b_1, b_2 \rangle$, která má tyto vlastnosti (viz obr. 2):

a) $G(x, y) = G(x, z)$,
b) $y \gtrless 0 \Leftrightarrow z \lessgtr 0$,
c) $y = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Odtud plyne, že rovnice (5.3) má v intervalu $\overline{D}_1$ jediné netriviální řešení (5.4), které splňuje (5.5) a podmínku:

$$z = \varphi(x, y) \gtrless 0 \Leftrightarrow y \lessgtr 0,$$

při čemž

$$0 \neq \varphi(x, y) \neq y \quad \text{pro} \quad y \neq 0.$$

Důkaz tvrzení B. rozdělme na dvě části.

α) Funkce $\varphi(x, y)$ je spojitá v každém bodě $(x_1, y_1) \in \overline{D}_1$, který neleží na ose x, t. j. $y_1 \neq 0$. Označme $z_1 = \varphi(x_1, y_1)$. Podle věty o implicitních funkcích (viz [1], l. c.) existuje právě jedna funkce $\overline{z} = \overline{\varphi}(x, y)$, definovaná v jistém okolí $\mathfrak{O} \subset \overline{D}_1$ bodu (x_1, y_1), která splňuje podmínku:

$$F[x, y, \overline{\varphi}(x, y)] = 0 \quad \text{pro} \quad x, y \in \mathfrak{O}, \quad \overline{\varphi}(x_1, y_1) = z_1.$$

Vzhledem k odstavci A. platí identicky $\varphi(x, y) = \overline{\varphi}(x, y)$ pro všechna $x, y \in \mathfrak{O}$. Podle věty o implicitních funkcích je funkce $\overline{\varphi}(x, y)$ spojitá v $\mathfrak{O}$.

β) Zvolme $\varepsilon > 0$ a nechť $G(x, -\varepsilon) = -\Delta_1(x)$, $G(x, \varepsilon) = -\Delta_2(x)$, $\Delta_1(x) > 0$, $\Delta_2(x) > 0$.

Funkce $\Delta_1(x)$, $\Delta_2(x)$ jsou spojité pro všechna $0 \leqq x \leqq \alpha$ a nabývají pro $\varepsilon > 0$ jen kladných hodnot. Nechť $\Delta_1 > 0$, $[\Delta_2 > 0]$ značí minimum funkce $\Delta_1(x) [\Delta_2(x)]$ v intervalu $\langle 0, \alpha \rangle$ a buď $\Delta = \min [\Delta_1, \Delta_2]$. Platí implikace

$$|\, G(x, y) \,| < \Delta \Rightarrow |\, y \,| < \varepsilon.$$

Rovnicí

$$G(x, y) + \Delta = 0$$

je definována pro $y \in (0, \varepsilon\rangle$ $[y \in \langle -\varepsilon, 0)]$ v intervalu $\langle 0, \alpha \rangle$ právě jedna kladná [záporná] spojitá funkce $y = \eta_1(x)$ $[y = \eta_2(x)]$ (viz [1], l. c.). Označme $\eta_1 > 0$, $[\eta_2 > 0]$ minimum funkce $\eta_1(x)$ $[\,|\,\eta_2(x)\,|\,]$, v intervalu $\langle 0, \alpha \rangle$ a nechť $\eta = \min [\eta_1, \eta_2]$. Pak je pro $|\, y \,| < \eta$ a všechna $x \in \langle 0, \alpha \rangle$

$$|\, G(x, y) \,| = |\, G(x, z) \,| < \Delta,$$

takže

$$|\, z \,| = |\, \varphi(x, y) \,| < \varepsilon.$$

Existuje tedy k libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ číslo $\eta > 0$ takové, že pro všechna $x \in \langle 0, \alpha \rangle$, $|\, y \,| < \eta$ platí nerovnost $|\, \varphi(x, y) \,| < \varepsilon$. Tím je dokázána spojitost funkce $\varphi(x, y)$ v bodě $(x, 0)$, $0 \leqq x \leqq \alpha$.

Důkaz tvrzení C.

Položme $G[x, y(x)] = u(x)$. Funkce $u(x)$ má spojitou derivaci, takže podle věty o implicitních funkcích (viz [1], l. c.) má i funkce $z(x)$, která vyhovuje rovnici $G[x, z(x)] = u(x)$, derivaci pro všechna $0 < x \leqq \alpha$. Z (5.3) vyplývá, že $\varphi(x, y) > 0\,[< 0]$ pro $y < 0\,[> 0]$; podle (5.6) funkce $y(x)$ pro $y(x) > 0\,[< 0]$ roste [klesá], takže $f[x, \varphi(x, y(x))] \neq 0$ pro $0 \neq x \leqq \alpha$. Z (5.10) vychází, že pro všechna $0 \neq x \leqq \alpha$ platí rovnice

$$z'(x) = f[x, y(x)]. \tag{5.11}$$

Položíme-li ještě $z'(0) = 0$, pak (5,11) platí pro všechna $x \in \langle 0, \alpha \rangle$. Podle (5.6), (5.11) pak soudíme, že tvrzení C. je správné.

5° Výsledek odstavce 4° se dá bezprostředně aplikovat na funkci $f(x, y) = h(x) \cdot g(y)$, která splňuje požadované předpoklady, neboť rovnice

$$\int_{z(x)}^{y(x)} f'_x[x, y]\, dy = h'(x) \int_{z(x)}^{y(x)} g(y)\, dy = 0,$$

$$\int_{z(x)}^{y(x)} f[x, y]\, dy = h(x) \int_{z(x)}^{y(x)} g(y)\, dy = 0$$

jsou vždy splněny, jestliže platí

$$\int_{z(x)}^{y(x)} g(y)\, dy = 0. \tag{5.12}$$

V případě $h(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \langle 0, \alpha \rangle$ každá dvojice funkcí $y(x)$, $z(x)$ (majících derivace a splňujících počáteční podmínky $y(0) = z(0) = 0$), která vyhovuje rovnici (5.2), vyhovuje také rovnici (5.12). Neboť částečnou integrací levé strany rovnice (5.2) obdržíme vztah

$$\int_0^x h(t)\, \{g[y(t)]\, y'(t) - g[z(t)]\, z'(t)\}\, dt = 0,$$

odkud snadno plyne (5.12). Takže v tomto případě řešení systému (4.2) můžeme hledat pouze mezi řešeními rovnice (5.12).

Rovnice (5.3), (5.4), (5.6) mají nyní tvar

$$G(y) = G(z), \qquad z = \varphi(y)$$

$$y' = h(x) \cdot g[\varphi(y)]. \tag{5.6'}$$

Jestliže integrál

$$\int_0 \frac{dy}{g[\varphi(y)]} \tag{5.13}$$

diverguje, má diferenciální rovnice (5.6') pouze jediné řešení $y = 0$ (viz [2], str. 20), takže i systém (4.2) má pouze jediné řešení $Y_0 = Y_1 = 0$.

Odtud plyne, že Picardova posloupnost (1.2), pro kterou platí jedna z nerovností (4.1), konverguje, jestliže funkce $f(x, y) = h(x) \cdot g(y)$ vzhledem k y klesá $[g(0) = 0$, $h(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \langle 0, \alpha \rangle]$ a splňuje podmínku (5.13).

Příklad. Nechť $h(x) = 1$, $g(y) = y \log |y|$, $g(0) = 0$. Funkce $g(y)$ v intervalu $\langle -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \rangle$ je spojitá a klesá. Rovnice (5.3) má řešení $z = -y$ a podmínka (5.13) je splněna, neboť integrál

$$-\int_0 \frac{dy}{y \log |y|} = -[\log \log |y|]_0$$

diverguje. Picardova posloupnost patřící k funkci $y \log |y|$, k bodu (0,0) a k jisté výchozí funkci $y_0(x)$, vždy konverguje k řešení $y = 0$ v jistém intervalu $\langle 0, \alpha \rangle$, jestliže v tomtéž intervalu platí mezi dvěma po sobě následujícími funkcemi jedna z nerovností (4.1).

LITERATURA

[1] K. Petr, Počet diferenciální, Praha 1923.
[2] E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig 1930.
[3] O. Borůvka, Vlastnosti Picardových posloupností, rkp.
[4] M. Müller, Über das Fundamentaltheorem in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Mathematische Zeitschrift 26 (1927), 619—645.
[5] G. Sansone, Обыкновенные дифференциальные уравнения II. Москва 1954.

Došlo 31. 1. 1957.

Katedra matematiky a geodesie
Vysoké školy zemědělské a lesnické v Brně

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ПИКАРДА

ЗДЕНЕК ГУСТЫ

Выводы

Пусть последовательность функций Пикарда

$$\{y_n(x)\}, \qquad n = 1, 2, \dots \tag{1}$$

принадлежащая к дифференциальному уравнению

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

к точке (0,0) и к какой-либо начальной функции $y_0(x)$ и пусть справедливо одно из неравенств

$$y_0' \geqq f[x, y_{n-1}(x)] \qquad \text{или} \qquad y_0' \leqq f[x, y_{n-1}(x)].$$

Если функция $f(x, y)$ в силу y монотонна, то подпоследовательности Пикарда $\{y_{\nu n+s}\}$, $s = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ сходятся равномерно и пределы Y_s удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$Y_s' = f[x, Y_{s-1}],\ s = 1, 2, \ldots, n-1,\ Y_0' = f[x, Y_{n-1}] \tag{3}$$

[если $f(x, y)$ в силу y не возрастает, то надо предполагать, что n четное].

Если функция $f(x, y)$ в силу y не убывает, тогда (3) имеет только тривиальное решение вида $Y_0 = Y_1 = \ldots = Y_{n-1} = y(x)$, где $y(x)$ является решением уравнения (2), так что (1) сходится.

Если функция $f(x, y)$ в силу y не возрастает, то система (3) бывает в состоянии иметь решение, компоненты которого не совпадают. Если $f(x, y)$ в силу y убывает, то для $n = 2$ и для нетривиального решения на каком-либо отрезке $(0, \alpha\rangle$ справедливы неравенства $Y_0(x) > y(x) > Y_1(x)$. Оттуда вытекают следующие следствия: а) Если $f(x, y)$ для $y < 0$ $[y > 0]$ в силу y убывает или возрастает [возрастает или убывает], $f(x, 0) = 0$, то система (3) для $n = 2$ имеет только тривиальное решение и (1) сходится. б) Если функция $f(x, y)$ нечетна, то решение Y_0, Y_1 системы (3) удовлетворяет уравнению $Y_0 = -Y_1$ и каждая из функций Y_0, Y_1 является решением уравнения $y' = -f(x, y)$.

Если $f(x, y)$ в силу y убывает и имеет непрерывную производную по переменной x, то функции Y_0, Y_1 удовлетворяют уравнению

$$\int_0^x \mathrm{d}t \int_{Y_1(t)}^{Y_0(t)} f_t'(t, u)\,\mathrm{d}u = \int_{Y_1(x)}^{Y_0(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

В дальнейшем указаны условия, когда компоненты Y_0, Y_1 возможно определить как решения уравнения

$$\int_{Y_0}^{Y_1} f(x, y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

ÜBER EINIGE EIGENSCHAFTEN DER PICARDSFOLGEN

ZDENĚK HUSTÝ

Zusammenfassung

Es sei

$$\{y_n(x)\},\qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

die Picard-Folge der Funktionen, die zu der Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

zum Punkt (0, 0) und zur bestimmten Ausgangsfunktion $y_0(x)$ gehört, und es gelte eine von den Ungleichungen

$$y_0' \geqq f[x, y_{n-1}(x)] \qquad \text{oder} \qquad y_0' \leqq f[x, y_{n-1}(x)].$$

Wenn die Funktion $f(x, y)$ mit Rücksicht auf y monoton ist, dann konvergieren die Picard-Teilfolgen $\{y_{\nu n+s}\}$, $s = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ gleichmäßig und ihre Grenzwerte Y_s erfüllen das Differentialgleichungssystem

$$Y_s' = f[x, Y_{s-1}],\ s = 1, 2, \ldots, n-1,\ Y_0' = f(x, Y_{n-1}) \tag{3}$$

[wenn $f(x, y)$ mit Rücksicht auf y nicht wächst, dann muß man voraussetzen, daß n eine gerade Zahl ist].

Wenn die Funktion $f(x, y)$ mit Rücksicht auf y nicht abnimmt, dann hat das System (3) nur eine Triviallösung der Form $Y_0 = Y_1 = \ldots = Y_{n-1} = y(x)$, wo $y(x)$ die Lösung der Gleichung (2) ist, so daß die Folge (1) konvergiert.

Wenn die Funktion mit Rücksicht auf y nicht wächst, dann kann das System eine solche Lösung haben bei der die Komponenten nicht zusammenfallen. Wenn $f(x, y)$ mit Rücksicht auf y abnimmt, dann gelten für $n = 2$ für die nicht triviale Lösung im bestimmten Intervall $(0, \alpha\rangle$ die Ungleichungen $Y_0(x) > y(x) > Y_1(x)$. Daraus folgen folgende Folgerungen:

a) Wenn $f(x, y)$ für $y < 0$ $[y > 0]$ mit Rücksicht auf y abnimmt oder zunimmt [zunimmt oder abnimmt], $f(x, 0) = 0$, dann hat das System (3) nur eine Triviallösung und die Folge (1) konvergiert.

b) Wenn $f(x, y)$ eine ungerade Funktion ist, dann erfüllt die Lösung Y_0, Y_1 des Systems (3) die Gleichung $Y_0 = -Y_1$ und jede von den Funktionen Y_0, Y_1 ist eine Lösung der Gleichung $y' = -f(x, y)$.

Wenn die Funktion $f(x, y)$ mit Rücksicht auf y abnimmt und wenn sie eine stetige Ableitung nach x hat, dann erfüllen die Funktionen Y_0, Y_1 die Gleichung $\int_0^x \mathrm{d}t \int_{Y_1(t)}^{Y_0(t)} f_t'(t, u)\,\mathrm{d}u = \int_{Y_1(x)}^{Y_0(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y$. Ferner werden Bedingungen beschrieben, unter welchen wir die Komponenten Y_0, Y_1 als Lösung der Gleichung $\int_{Y_0}^{Y_1} f(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$ bestimmen können.