MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV. VIII, 1 — 1958

PŘESNOST MĚŘENÍ STŘEDNÍCH TEPLOT PLYNŮ A KAPALIN MŘÍŽKOVÝMI TEPLOMĚRY

ARNOŠT KESSLER, Bratislava

Úvod. Jak známo není jednoznačné a přesné měření teploty zcela snadné. Obtíž při měření není však dána tím, že by vlastní měřicí přístroje nebo zařízení nebyly v běžném slova smyslu přesné. Naopak, lze dosáhnout poměrně velké přesnosti na př. rtuťovými teploměry nebo lze s poměrně velkou přesností stanovit teplotu odporového teploměru a podobně. Obtíže při měření, které máme na mysli, spočívají v podmínkách za nichž se měření provádí a jejichž rušivý vliv většinou nelze zcela přesně podchytit.

Tak vedou podmínky měření k narušení měřeného teplotního pole měřícím orgánem, k výměně tepla mezi měřícím orgánem a vzdálenějším okolím, k parazitnímu proudění tepla v měřícím orgánu, stejně jako na př. k obtížím při stanovení průběhu teploty z bodových měření atd., což má vše za následek určité soustavné chyby.

Běžně se vyskytující příčiny takovýchto chyb jsou všeobecně známy a ze všech stran důkladně prozkoumány.[1] Avšak vliv nestejnoměrností (míněn průběh) teploty v prostředí, jako na př. jsou plyny a kapaliny, na přesnost měření teploty vůbec a obzvláště na měření mřížkovými teploměry má některé zvláštní aspekty, které dosud nebyly, alespoň pokud lze soudit z dosažitelné literatury, podrobeny soustavnějšímu zkoumání. Při tom je nutno pod pojem „mřížkový teploměr" zahrnouti nejen odporové teploměry a thermočlánky, které jsou za účelem přímého měření středních teplot nějakého prostředí uspořádány ve tvaru mřížky pokrývající celou plochu, v níž se střední teplota má stanovit, ale vůbec všechny teploměry, jejichž měřící orgán má vzhledem k průběhu teplotního pole nezanedbatelnou délku, takže měří přesně vzato střední teplotu (v určitém úseku).

Problém měření středních teplot mřížkovými teploměry se týká celé řady úloh, a to takových, kde je třeba velmi přesného stanovení teploty nebo přesného stanovení průměru teplot a pod. Zejména pak také pracuje na základě přímého měření středních teplot plynů (a kapalin) celá řada technických

[1] Viz AMT-2165-1-2, kde je též uveden bohatý přehled literatury.

zařízení a přístrojů, jako jsou na př. různé průtokové kalorimetry, kalorimetrické průtokoměry a jiné.

O možnosti měření středních teplot mřížkovými teploměry panují dosti protichůdné názory. Oproti názoru, že nelze mřížkové teploměry pro alespoň poněkud přesná měření vůbec použít, uvádí na př. F. X. Eder[2] ve své knize o moderních měřících metodách ve fysice, že se odporový teploměr hodí obzvláště dobře ke stanovení středních teplot nerovnoměrných teplotových polí, jako na př. při proudění, neboť odporový drát může býti vypjat v celém měřeném průřezu. Snahou předložené práce právě bude přispět k ujasnění této otázky.

1. Formulace problému. Vlastní měřící orgán čili čidlo kteréhokoliv teploměrného zařízení můžeme, až na některé výjimky, idealisovat jako (kovový) váleček, který má skoro vždy po celé délce stejný průřez a jehož délka zpravidla obnáší několik průměrů. Tento měřící orgán se vkládá do prostředí, jehož teplotu chceme stanovit a tam přestupem anebo vedením tepla z okolí a vedením tepla v samotném orgánu posléze nabývá určitou ustálenou teplotu (míníme stále, aniž to zvláště zdůrazňujeme ustálenou teplotu), která bude za příznivých okolností (téměř) totožná s teplotou bezprostředního okolí měřícího orgánu.

Vlastní měřicí zařízení pak zaznamenává výchylku, která odpovídá více méně *teplotě čidla*.[3] Vlastní měřicí přístroje stanoví teplotu čidla tak, že měří, pouze jak je obecně známo, vlastně objem, elektrický odpor, thermoelektrické napětí atp., při čemž se cejchováním přiřazují jednotlivé hodnoty těchto veličin vždy určitým teplotám. Cejchování může samozřejmě býti i podloženo ověřeným matematickým vztahem. Protože však jevy, na nichž se měření teploty zakládá, nejsou pouze jednoduchými lineárními funkcemi teploty, budou cejchované hodnoty, t. j. korelace uvedených veličin a tepelného stavu platit jen za příznivých okolností, odpovídajících podmínkám při cejchování, kde se počítá s prakticky naprosto rovnoměrnou teplotou prostředí.

Uvedené okolnosti platí v zásadě pro všechny měřicí přístroje, které k měření teploty přicházejí v úvahu. Jednotlivé případy měřících orgánů se budou, jak ostatně bude ještě podrobněji ukázáno později, lišit jen svými parametry, t. j. poměrem průměru měřícího orgánu k jeho délce, poměrem průřezu k povrchu, tepelnou vodivostí materiálů, ze kterých sestávají, jakož i teplotní závislostí jevů, kterých se ke stanovení teploty čidla používá. Jednotlivé úkoly se pak budou lišit hodnotou, respektive průběhem přestupu tepla a teploty

[2] F. X. Eder, *Moderne Meßmethoden der Physik*, díl 2, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlín 1956, 62. Viz též Петужов, Опитное изучение процессов теплопередачи, Москва 1952.

[3] Teplota čidla, jak jsme již řekli, za příznivých okolností souhlasí s měřenou teplotou a vysoká přesnost přístrojů na měření teploty se vztahuje právě na přesnost měření této teploty čidla.

okolí na povrchu měřícího orgánu (teplotou okolí, respektive prostředí označujeme teplotu bezprostředního okolí měřícího orgánu, t. j. teplotu prostředí na povrchu měřícího orgánu).

Podle dosud řečeného máme tedy co činit se dvěma problémy. Je to otázka:

I. korespondence teploty prostředí s teplotou měřícího orgánu,

II. korespondence stavu veličiny, která se ve vlastním měřicím zařízení měří s teplotou.

Zkreslení samotného teplotního pole měřícím orgánem neuvažujeme.

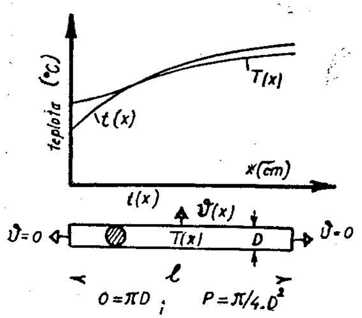
Je zjevné, že uvedené okolnosti neplatí pouze pro mřížkové teploměry, u kterých převládá ve značné míře délkový rozměr měřícího orgánu, ale i pro všechny ostatní měřicí přístroje. U ostatních přístrojů však lze, i když pro ně platí teoreticky v nerovnoměrném teplotním poli totéž co pro mřížkové teploměry, očekávat, že obě uvedené chyby budou většinou zanedbatelné.

I

2. Diferenciální rovnice vedení tepla v měřícím orgánu. Protože měřící orgány jsou z kovu a jsou tudíž dobře tepelně vodivé, můžeme považovat otázku průběhu teploty a otázku jejich střední teploty za úlohu jednorozměrného vedení tepla. Zanedbává se tak v mě ícím orgánu příčný spád teploty, avšak tento je už vzhledem k součiniteli přestupu tepla na povrchu válce zanedbatelný. Dále budeme předpokládat, že měřící orgán je zcela pohroužen v měřeném teplotním poli a že vyměňuje teplo pouze s tímto. Není tedy měřící orgán tepelně-vodivě spojen s žádným jiným vodičem tepla, ať by již tento sloužil vlastnímu měření nebo ke konstruktivnímu uchycení a z konců tyče (válce) se prakticky neodvádí (ani nepřivádí) žádné teplo.

Předpokládejme nyní zcela libovolný, ale spojitý průběh teploty prostředí, pro který v bezprostředním okolí podél měřícího orgánu platí $t = t(x)$ a podobně nechť $\vartheta(x)$ je spojitá funkce udávající koeficient přestupu tepla na povrchu měřícího orgánu. Při tom může býti zahrnuta v $\vartheta(x)$ i tepelná isolace povrchu měřícího orgánu. Je-li λ_i tepelná vodivost tepelné isolace povrchu a d_i její síla, pak

$$\vartheta(x) = \frac{1}{\dfrac{d_i}{\lambda_i} + \dfrac{1}{\vartheta'(x)}} .$$



Obr. 1.

Značí-li $T(x)$ teplotu měřícího orgánu (viz obr. 1), O obvod, l délku, P průřez a λ tepelnou vodivost materiálu měřícího orgánu, pak bude hledaná rovnice vedení a přestupu tepla pro měřící orgán

$$\lambda P \,.\, \frac{d^2 T(x)}{dx^2} + O \,.\, \vartheta(x)\, \{t(x) - T(x)\} = 0, \tag{1}$$

čili

$$\frac{d^2 T(x)}{dx^2} - C \,.\, \vartheta(x) \,.\, T(x) = -C \,.\, \vartheta(x) \,.\, t(x); \quad C = \frac{O}{\lambda P} . \tag{1a}$$

Jednotlivé konstanty v diferenciální rovnici jakož i $t(x)$, $\vartheta(x)$ a $T(x)$ jsou jak je z fysikální podstaty problému zřejmé, kladné. Okrajové podmínky diferenciální rovnice (1), respektive (1a), které jsou dány podmínkou, že se z konců měřícího orgánu neodvádí (ani nepřivádí) žádné teplo, zní

$$\left\{\frac{dT(x)}{dx}\right\}_{x=0} = 0 \quad \text{a} \quad \left\{\frac{dT(x)}{dx}\right\}_{x=l} = 0. \tag{2}$$

3. Vymezení podmínek, za kterých je střední teplota měřícího orgánu totožná se střední teplotou bezprostředního okolí. a) S ohledem na skutečné okolnosti při měřeních můžeme rozeznávat dva případy.[4] Předpokládejme nejprve, že $\vartheta(x)$ je na x nezávislé, že tedy $\vartheta(x) = \vartheta =$ konst. Pak máme z (1a)

$$\frac{d^2 T(x)}{dx^2} - C \,.\, \vartheta \,.\, T(x) = -C \,.\, \vartheta \,.\, t(x).$$

Integrujeme-li tuto rovnici od 0 do l, obdržíme

$$\left\{\frac{dT(x)}{d(x)}\right\}_{x=l} - \left\{\frac{dT(x)}{dx}\right\}_{x=0} - C\vartheta \,.\, \int_0^l T(x)\,dx = -C\vartheta \int_0^l t(x)\,dx, \tag{3}$$

neboť

$$\int_0^l \frac{d^2 T}{dx^2}\,dx = \left\{\frac{dT(x)}{dx}\right\}_{x=l} - \left\{\frac{dT(x)}{dx}\right\}_{x=0} .$$

Dosadíme-li nyní obě okrajové podmínky (2) do rovnice (3), vyplývá dále, že

$$\int_0^l T(x)\,dx = \int_0^l t(x)\,dx. \tag{3a}$$

[4] Možností, která se prakticky může také vyskytnout, kdy $t(x) =$ konst se nebudeme vůbec zabývat, neboť pak $T(x) \equiv t(x) \equiv$ konst.

Toto je samozřejmý důsledek věty o zachování energie, která v našem případě vyžaduje rovnost mezi množstvím tepla, které z čidla vystupuje (od $x = 0$ do $x = l_1$) a do něho vstupuje (od $x = l_1$ do $x = l$)

$$\vartheta \int_0^{l_1} \{T(x) - t(x)\}\, dx = \vartheta \int_{l_1}^{l} \{t(x) - T(x)\}\, dx,$$

odkud úpravou můžeme přímo obdržet výsledek (3a).

Výsledek daný vztahem (3a) znamená, že v případě kdy $\vartheta(x) = \text{konst}$, na př. v klidném mediu, střední teplota měřícího orgánu $\overline{T} = \frac{1}{2}\int_0^l T(x) dx$ bude totožná se střední teplotou bezprostředního okolí měřícího orgánu $\overline{t} = \frac{1}{l}\int_0^l t(x)\, dx$, bez ohledu na průběh $t(x)$.

Poznámka. Tento základní výsledek ovšem už neplatí, odvádí-li se z některého konce měřícího orgánu teplo. Je patrno, že chyba, která by vznikla odvodem tepla z konce v bodě $x = 0$, by byla přímo

$$\overline{t} - \overline{T} = \frac{\lambda P}{\vartheta 0 \,.\, l}\left\{\frac{dT(x)}{dx}\right\}_{x=0} = \frac{Q}{\vartheta \,.\, \text{Povrch}},$$

kde Q je koncem odváděné teplo. Rovná se tedy rozdíl obou teplot $(\overline{t} - \overline{T})$, t. j. soustavná chyba měření spádu, který vyvolá průchod za sekundu odváděného tepla při svém přestupu do teploměru.

Výše nalezený výsledek vyjádřený rovnicí (3a) neznamená také, že průběh teploty v měřícím orgánu je totožný s průběhem teploty bezprostředního okolí, jak je patrno z řešení diferenciální rovnice (1).

Shrneme-li partikulární integrál a obecné řešení příslušné homogenní rovnice, obdržíme pro obecné řešení dané rovnice

$$q \,.\int_0^x t(\eta) \,.\, \sinh q(x-\eta)\, d\eta + A \cosh qx + B \sinh qx; \quad q^2 = \frac{0\vartheta}{\lambda P}.$$

Z $\{dT/dx\}_{x=0} = 0$ plyne, že $B = 0$ a po stanovení A z druhé okrajové podmínky obdržíme

$$T(x) = q\int_0^x t(\eta) \sinh q(x-\eta) d\eta + \left\{\int_0^l t(\eta) \sinh q\eta\, d\eta - \right.$$
$$\left. - \operatorname{cotgh} ql \int_0^l t(\eta) \cosh q\eta\, d\eta\right\}. \cosh qx. \tag{4}$$

Integrací $T(x)$ od nuly do l se můžeme snadno přesvědčit, že skutečně platí $\overline{t} = \overline{T}$.

b) Upustíme nyní od předpokladu, že je $\vartheta(x)$ konstantní na př. vlivem rychlostního pole měřeného media a proveďme opět integraci diferenciální rovnice (1a) a dosaďme okrajové podmínky. Obdržíme pak

$$\int_0^l \vartheta(x) \,.\, T(x)\, dx = \int_0^l \vartheta(x) \,.\, t(x)\, dx. \tag{5}$$

Nejprve vyloučíme možnost, že by bylo $T(x)$ identické s $t(x)$. Toto by, jak lze snadno ukázat, vyžadovalo, aby nikde měřícím orgánem netekl tepelný proud (podél), tedy $\{dT(x)/dx\} = 0$ pro $x < 0, l >$. Tento požadavek nemůže býti splněn, vyjma triviální případ, kdyby $t(x) \equiv$ konst, neboť protéká-li orgánem nějaký tepelný proud, nutně vznikají na povrchu tepelné spády oproti okolí, takže $T(x) \neq t(x)$.

Jestliže $T(x)$ je od $t(x)$ odlišné, pak můžeme rozdělit délku měřícího orgánu l na úseky, v nichž $T(x) > t(x)$, a opačně. Předpokládejme, že je $t(x)$ ryze monotónní a že od 0 do l_1 platí $T(x) > t(x)$ a od l_1 do l platí $T(x) < t(x)$. Když přepíšeme rovnici (5) na tvar

$$\int_0^{l_1} \vartheta(x) \,.\, T(x)\, dx - \int_0^{l_1} \vartheta(x) \,.\, t(x)\, dx = \int_0^{l_1} \vartheta(x)\{T(x) - \vartheta(x)\}\, dx =$$
$$= -\int_{l_1}^{l} \vartheta(x)\{T(x) - t(x)\}\, dx, \tag{5a}$$

ze ukázat, že v rozsahu $x < 0, l_1 >$ existuje ϑ_1 takové, že $\min[\vartheta(x)] < \vartheta_1 < \max[\vartheta(x)]$ a že

$$\int_0^{l_1} \vartheta(x)\{T(x) - t(x)\}\, dx = \int_0^{l_1} \vartheta_1\{T(x) - t(x)\}\, dx. \tag{5b}$$

Stejně tak existuje pro $x < l_1, l >$ určité $\min[\vartheta(x)] < \vartheta_2 < \max[\vartheta(x)]$ takové že platí pro úsek l_1 až l obdobný vztah jako (5b). Z toho ale plyne, že pokud $\vartheta_1 \neq \vartheta_2$

$$\int_0^{l_1} \{T(x) - t(x)\}\, dx \neq -\int_{l_1}^{l} \{T(x) - t(x)\}\, dx,$$

a tedy

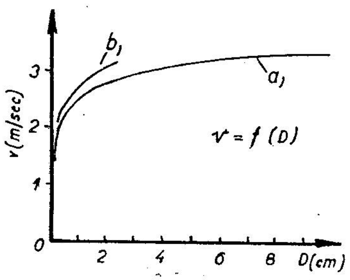
$$\int_0^l T(x)\, dx \neq \int_0^l t(x)\, dx. \tag{6}$$

Bude tedy obecně [vyjma zcela zvláštní případy průběhu $\vartheta(x)$] střední teplota měřícího orgánu $\overline{T}$ jiná, nežli střední teplota bezprostředního okolí měřícího orgánu $\overline{t}$.

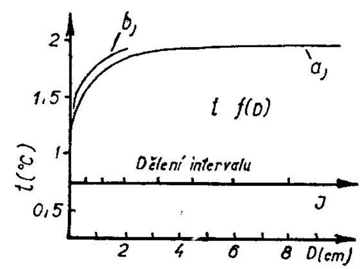
K chybě, která takto vznikla, může samozřejmě v praxi přistoupit ještě chyba z odvodu tepla z některého konce měřícího orgánu, která podle okolností původní chybu zvětšuje nebo zmenšuje.

4. **Číselný výpočet rozdílu středních teplot měřícího orgánu a jeho bezprostředního okolí.** Protože funkce $\vartheta(x)$ a $t(x)$ jsou obvykle dány empiricky, bude nejjednodušší postup, jak stanoviti relativní rozdíl obou uvedených teplot v procentech, $R = \dfrac{\overline{t} - \overline{T}}{\overline{T}} \cdot 100$ založen na numerickém řešení diferenciální rovnice (1a). Při numerickém řešení se úplně vystačí s diferenční metodou s jednoduchými diferencemi, neboť jednoduchost výsledného systému rovnic vyžaduje i při poměrně jemném dělení, kterého je třeba k zajištění uspokojivých výsledků, daleko menší početní práci než jiné způsoby řešení. S ohledem na průběh $\vartheta(x)$ však bude povětšinou nutné zvolit nerovnoměrné dělení intervalu.

Příklad 1. Stanovit relativní odchylku střední teploty holého měděného drátu ($D = 0{,}1$ mm) $\overline{T}$, napjatého (v pravidelných odstupech) přes celou plochu průřezu vzduchovodu o průměru 20 cm, od střední teploty vzduchu $\overline{t}$,



Obr. 2.



Obr. 3.

který v uvažovaném průřezu má rychlostní profil $v(x)$ (obr. 2) a teplotní profil $t(x)$ (obr. 3). Přestup tepla na povrchu drátu $\vartheta(x)$, který je funkcí rychlosti $v(x)$ je stanoven podle výsledků měření uveřejněných R. O. Kingem.[5]

Dělení intervalu, pro který stačí s ohledem na symetrii brát x od do $l/2$, je vhodné volit takové, že bude $\vartheta(x_\nu)$ v bodech dělení x_ν ještě odpovídat zhruba

---

[5] Engineering XXVII (1924), 137.

střední hodnotě $\vartheta(x)$ v intervalu od $^1/_2(x_\nu + x_{\nu-1})$ do $^1/_2(x_\nu + x_{\nu+1})$. Příslušná soustava diferenčních rovnic je

$$\left\{\frac{1}{x_1 - x_0} + \frac{4\,\vartheta(x_0)}{\lambda D} \cdot \left(\frac{x_1 - x_0}{2}\right)\right\} . T(x_0) - \frac{1}{x_1 - x_0} T(x_1) =$$

$$= \frac{4\vartheta(x_0)}{\lambda D}\left(\frac{x_1 - x_0}{2}\right) . t(x_0)$$

$$-\frac{1}{x_1 - x_0} T(x_0) + \left\{\frac{1}{x_1 - x_0} + \frac{1}{x_2 - x_1} + \frac{4\vartheta(x_1)}{\lambda D}\left(\frac{x_2 - x_0}{2}\right)\right\} T(x_1) -$$

$$-\frac{1}{x_2 - x_1} . T(x_2) = \frac{4\vartheta(x_1)}{\lambda D}\left(\frac{x_2 - x_0}{2}\right) . t(x_1)$$

atd.

Při řešení tohoto systému stačí soustavně eliminovat (od druhé rovnice počínaje) vždy první člen každé rovnice. Přesnost průběhu řešení se dá snadno kontrolovat z okrajových podmínek a z diferenciální rovnice (1a). Je však výhodnější provádět kontrolu z rovnice (5). U všech výsledků uvádíme proto jako míru přesnosti rozdíl obou integrálů rovnice (5).

Numerické hodnoty vypočtené pro zadaný případ jsou při dělení naznačeném v obr. 3:

1. pro nejdelší střední vlákno (křivka *a*) $R = 0{,}13\%$, a rozdíl obou integrálů (5) $0{,}028\ \%$.
2. pro krajní vlákno $l/2 = 2$ cm (křivka *b*) $R = 0{,}25\ \%$ a rozdíl obou integrálů (5) $0{,}040\ \%$,

takže můžeme předpokládat, že je celkově $R \doteq 0{,}16\ \%$.

Použije-li se místo drátu $\varnothing = 0{,}1$ mm, drát dvakrát tak silný, chyba vzroste na $R \doteq 0{,}22\ \%$.

Při rovnoměrném dělení intervalu na stejný počet úseků jako shora, jsou výsledky méně přesné. Vychází $R = 0{,}55\%$ při rozdílu obou integrálů (5) $0{,}38\%$.

5. **Přibližný odhad hodnoty chyby při různých hodnotách parametrů měřícího orgánu.** Z důvodů uvedených již v předchozím odstavci nelze pro velikost chyby R odvodit obecně platné vzorce. Je proto třeba se spokojit s odhadem. K hledanému vzorci pro odhad chyby dospějeme následovnou úvahou. Proudění tepla v měřícím orgánu se dá snadno popsat a vyložit kvalitativně pomocí pojmu tepelného odporu. Tak bude celkový tepelný odpor měřícího orgánu proti průchodu tepla dán součtem tepelných odporů z přestupu tepla v úseku, kde teplo do čidla vstupuje (r_2), a v úseku, kde se teplo z čidla přestupem odvádí (r_1), a z odporu vedení tepla v samotném čidle (r_{12}). V prvém hrubém přiblížení závisí odpory z přestupu tepla pouze na povrchu a prů-

měrném součiniteli přestupu tepla v dotyčném úseku a odpor z vedení tepla na výrazu $l/3\lambda P$.

U mřížkových teploměrů bude v důsledku jejich konstruktivního provedení vždy $r_{12} > r_1 + r_2$, při čemž rozdíl bude tím větší, čím bude λD menší. Čím ale bude r_{12} větší než $r_1 + r_2$, tím menší chyby se dopustíme, jestliže daný (libovolný) případ pro další úvahy znázorníme jako tyč o dvou úsecích s konstantními přestupovými koeficienty tepla $\vartheta_{1,2}$, které odpovídají příslušným středním hodnotám $\vartheta(x)$ v obou úsecích a kde dále o každém z obou úseků předpokládáme, že se nalézá v prostředí o teplotě t_1, respektive t_2, které odpovídají příslušným průměrným hodnotám $t(x)$ v obou úsecích. Předpokládáme-li ještě, že délka prvého úseku l_1 se rovná přibližně délce druhého úseku $(l - l_1)$ pak nalezneme, že za shora uvedeného předpokladu, že $r_{12} >> r_1 + r_2$, ze kterého také plyne, že $q_{1,2} \cdot l_{1,2} = \frac{4\vartheta_{1,2} \cdot l_{1,2}}{\lambda D} > 1$ (viz Dodatek, odst. 10)

$$R \doteq \frac{\sqrt{\lambda D}}{2} \cdot \left(\frac{t_2 - t_1}{t_2 + t_1}\right) \cdot \frac{\vartheta_2/l_1 - \vartheta_1/(l - l_1)}{\sqrt{\vartheta_1\vartheta_2}\,(\sqrt{\vartheta_2} + \sqrt{\vartheta_1})} \cdot 100$$
$$\sim \frac{\sqrt{\lambda D}}{l} \cdot \left(\frac{t_2 - t_1}{t_2 + t_1}\right) \frac{\sqrt{\vartheta_2} - \sqrt{\vartheta_1}}{\sqrt{\vartheta_1\vartheta_2}} \cdot 100. \tag{7}$$

Ze vzorce (7) předně vyplývá, že R bude kladné, respektive záporné, jsou-li průběhy $\vartheta(x)$ a $t(x)$ souhlasné, respektive nesouhlasné.

Protože průsečík křivek $t(x)$ a $T(x)$ leží při malé chybě ve skutečnosti blíže konci rozsahu na straně, kde hodnota rozdílu $\{T(x) - t(x)\}$ je větší, s rostoucími chybami se však přesouvá opačným směrem a pro velkou chybu bude i na opačné straně, mělo by se pro přesnější odhad používat vlastně prvního z obou vzorců (7). Pro orientaci však bude plně postačovat konečný vzorec (7).

Z činitelů, kteří určují hodnotu R je nejprůhlednější vliv výrazu $\sqrt{\lambda D}/l$. Uvážíme-li, že tepelné vodivosti materiálů používaných na př. pro konstrukci odporových teploměrů mají λ v rozsahu od přibližně 0,71 W/cm °C pro platinu do asi 4,2 W/cm °C pro stříbro a že průměry drátu mohou prakticky kolísat od 0,01 do 0,4 mm nebo i více, vidíme, že $\sqrt{\lambda D}/l$ může kolísat od několika desetitisícin až do několika desetin, tedy ve velkém rozsahu, kdežto druhé dva zlomky výrazu (7), které závisí na $\vartheta(x)$ a $t(x)$ až do hodnot > 10.

Zlomek $\sqrt{\lambda D}/l$, který závisí pokud se týče λD, hlavně na konstrukci a který je nepřímo úměrný délce odporového teploměru l, lze často ovlivnit konstrukcí tak, aby se chyba stala co nejmenší.

Abychom o průběhu chyby při změnách hodnoty λD nabyli určitou představu, uvádíme následovný

Příklad 2. V tab. 1 jsou uvedeny výsledky výpočtů hodnot R pro různé hodnoty parametrů λD [W/°C], při $l = 10$ [cm], $t(x) = 0{,}5x$ [°C] a $\vartheta(x) = 0{,}015x$ [W/cm² °C]. R je vypočteno na základě řešení příslušné diferenční

rovnice, kdežto R^* (odhad) je hodnota vypočtená z konečného vzorce (7). Jak patrno je souhlas hodnot odhadu R^* se skutečnou hodnotou chyby R dosti dobrý. Protože, jak vyplývá z předchozího textu, l_1 se bude od shora dolů (v tab. 1) zmenšovat, vzrostl by asi třetí zlomek prvního z obou vzorců (7)

Tabulka 1

$t(x)$	$\vartheta(x)$	λD	R	R^*
$= 0{,}5x$	$= 0{,}015x$	1,0	13,6	10,9
		0,1	3,2	3,4
		0,01	1,8	2,1

pro větší chyby více, takže by se pomocí tohoto vzorce dosáhlo asi lepšího souhlasu se skutečností. Avšak ačkoliv má l_1 značný vliv, neboť na odhadu l_1 také závisí střední teploty $t_{1,2}$ a $\vartheta_{1,2}$, dá se l_1 jen velice těžce správně odhadnout, takže je vhodnější použít, jak jsme to učinili, rovnou konečného vzorce (7), který pro menší λD dává dobrý číselný souhlas.

Hodnoty $t(x)$ a $\vartheta(x)$, které jsou obvykle dány povahou a okolnostmi úlohy a které povětšinou nelze ovlivnit (nebo jen málo — $\vartheta(x)$ na př. se zvětšuje pro touž rychlost při tenčích měřicích orgánech), určují velikost chyby R jednak svým průběhem; čím je křivka průběhu $t(x)$ i $\vartheta(x)$ více vypouklá, tím bude chyba menší a opačně. Při daném průběhu však na velikosti hodnot $t(x)$ nezáleží [zvolíme-li na př. $t'(x) = A \cdot t(x)$; A v R vypadne], kdežto pro $\vartheta(x)$ větší bude R menší, nehledíc k průběhu. Za nevhodných podmínek by chyba R mohla dosáhnout i několika procent, při vhodné volbě λD však nepřesáhne většinou několik desetin, v nepříznivém případě pak 2 až 3%. Vliv $t(x)$ a $\vartheta(x)$ je opět ilustrován příkladem.

Příklad 3. V tab. 2 jsou uvedeny výsledky pro hodnoty R pro různě zvolené jednoduché průběhy $t(x)$, při hodnotách parametrů $\lambda D = 0{,}1$ [W/°C], $l = 10$ [cm], $\vartheta(x) = 0{,}015x$ [W/cm² °C].

R^* udává opět hrubý odhad chyby R dosazením do konečného výrazu rovnice (7).

Jestliže se ponechá $t(x) = 0{,}5x$ a bude se měnit $\vartheta(x)$, kdežto ostatní parametry zůstanou nezměněné, obdržíme výsledné hodnoty v tab. 3.

Nutno ovšem poznamenat, že zvolené příklady jsou velmi extrémní, protože ve skutečnosti $\vartheta(x)$ a $t(x)$ nikdy nebudou nula atd. Také λD je zvoleno dosti vysoké, neboť na př. hodnotě $\lambda = 3{,}8$, by odpovídal průměr drátu $D = \varnothing = 0{,}26$ mm.

Tabulka 2

$t(x)$	$\vartheta(x)$	λD	R	R^*
$= 0{,}05x^2$	$= 0{,}015x$	0,1	5,8	5,5
$= 0{,}50x$			3,2	3,4
$= 1{,}58\sqrt{x}$			1,4	1,4
$= 2{,}5 + 0{,}25x$			0,6	1,1

Tabulka 3

$t(x)$	$\vartheta(x)$	λD	R	R^*
$= 0{,}5x$	$= 1{,}50 \,.\, 10^{-3}x^2$	0,1	10,3	10,8
	$= 1{,}50 \,.\, 10^{-2}x$		3,2	3,4
	$= 4{,}75 \,.\, 10^{-2}\sqrt{x}$		1,7	1,5

II[6]

6. Vliv nestejnoměrné teploty měřícího orgánu na výchylku vlastního měřícího zařízení. Předpokládejme, že v uvažovaném rozsahu teplot platí ideálně, že jev, na jehož základě se měření teploty provádí a jehož stav (stav sledované veličiny) označíme $s(T)$, závisí na teplotě T následovným kvadratickým vztahem

$$s = s_0(1 + \alpha T + \beta T^2). \tag{8}$$

Přitom T, respektive $T(x)$ značí opět teplotu čidla, a α a β jsou teplotní součinitelé, z nichž β bývá záporné. Index 0 při s_0 značí stav veličiny s při nulové, případně vztažné teplotě.

Protože měřicí přístroj udává vždy celkový stav konečně velkého měřícího orgánu S, t. j. celkový odpor, výsledný tlak a tak pod., musíme, abychom výchylku odpovídající určité teplotě nebo průběhu teploty měřícího orgánu $T(x)$ mohli stanovit, vztah (8) integrovat, a to přes celou délku měřícího orgánu l. Dá se totiž předpokládat, že teplota měřícího orgánu $T(x)$ je skutečně

[6] Úvahy se týkají mřížkových odporových teploměrů. Výsledky pro thermočlánky však vedou na vztah, který je analogický vztah (10).

pro každé x v celém průřezu P měřícího orgánu prakticky konstantní. Pro S tedy obdržíme

$$S = Ps_0 \int_0^l \{1 + \alpha T(x) + \beta T^2(x)\}\,\mathrm{d}x = S_0\left\{1 + \alpha\overline{T} + \frac{\beta}{l}\int_0^l T^2(x)\,\mathrm{d}x\right\}; \tag{9}$$

$$S_0 = Ps_0 l \quad \text{a} \quad \overline{T} = \frac{1}{l}\int_0^l T(x)\,\mathrm{d}x.$$

Při cejchování, kdy teplota okolí $t(x)$ a tím i teplota měřícího orgánu $T(x)$ jsou konstantní, bude $\frac{1}{l}\int_0^l T^2(x)\,\mathrm{d}x = \overline{T}^2$, takže (9) bude odpovídat přímo tvaru rovnice (8). Označíme výchylku měřicího přístroje, která představuje na přístroji odečtenou teplotu (odpovídající cejchování) $t_{př}$. Pak lze cejchování vyjádřit matematicky inversním vztahem k (8) kde za s píšeme S, který po dosazení z (9) za S nakonec zní

$$t_{př} = -\frac{\alpha}{2\beta} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{S - S_0}{\beta S_0}} = -\frac{\alpha}{2\beta} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \left\{\frac{\alpha}{\beta}\overline{T} + \frac{1}{l}\int_0^l T^2(x)\,\mathrm{d}x\right\}}. \tag{10}$$

Vzorec (10) udává obecný vztah mezi na měřicím zařízení odečtenou teplotou a mezi skutečnou teplotou měřícího orgánu $T(x)$. Při tom znaménko plus před odmocninou platí pro $\beta > 0$ a minus pro $\beta < 0$. Z (10) je také patrno, že při každém měření, kde $T(x)$ je konstantní, máme s ohledem na $\frac{1}{l}\int_0^l T^2(x)\,\mathrm{d}x = \overline{T}^2$, pod odmocninou úplný čtverec výrazu $\left(\frac{\alpha}{2\beta} + \overline{T}\right)$, takže vzorec dává správně $t_{př} = \overline{T}$. Výchylka odečítacího přístroje tedy odpovídá v tomto případě správně (střední) teplotě čidla. Jestliže však $T(x)$ není konstantní, pak $\frac{1}{l}\int_0^l T^2(x)\,\mathrm{d}x \neq \overline{T}^2$ a tedy i $t_{př} \neq \overline{T}$. Na měřicím přístroji odečtená teplota $t_{př}$ tedy již neodpovídá střední teplotě $\overline{T}$ měřícího orgánu.

Pomocí rovnice (10) můžeme dále odvodit poměrný rozdíl mezi střední teplotou $\overline{T}$ a mezi odečtenou teplotou $t_{př}$, je-li funkce $T(x)$ známa. Máme totiž, doplníme-li v (10) nejdříve pod odmocninou $\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{\alpha}{\beta}\overline{T}$ na čtverec $\left(\frac{\alpha}{2\beta} + \overline{T}\right)^2$ a odečteme-li současně $\overline{T}^2$ a pak vytkneme $\left(\frac{\alpha}{2\beta} + \overline{T}\right)$ před odmocninu.

$$t_{př} = -\frac{\alpha}{2\beta} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2\beta} + \overline{T}\right)^2 + \left\{\frac{1}{l}\int_0^l T^2(x)\,dx - \overline{T}^2\right\}} =$$

$$= -\frac{\alpha}{2\beta} + \left(\frac{\alpha}{2\beta} + \overline{T}\right)\sqrt{1 + \frac{\frac{1}{l}\int_0^l T^2(x)\,dx - \overline{T}^2}{\left(\frac{\alpha}{2\beta} + \overline{T}\right)^2}}$$

a dále s ohledem na to, že druhý výraz pod odmocninou bude proti jednotce malý přibližně

$$t_{př} \doteq -\frac{\alpha}{2\beta} + \left(\frac{\alpha}{2\beta} + \overline{T}\right)\left\{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{l}\int_0^l T^2(x)\,dx - \overline{T}^2}{\left(\frac{\alpha}{2\beta} + \overline{T}\right)^2}\right\} =$$

$$= \overline{T} + \frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{l}\int_0^l T^2(x)\,dx - \overline{T}^2}{\left(\frac{\alpha}{2\beta} + \overline{T}\right)}.$$

Pro relativní chybu údaje odčítacího přístroje tedy obdržíme ($\overline{T}$ v konečném vzorci vyjádřeno příslušným integrálem)

$$\frac{t_{př} - \overline{T}}{\overline{T}} \doteq \frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{l}\int_0^l T^2(x)\,dx - \overline{T}^2}{\left(\frac{\alpha}{2\beta} + \overline{T}\right)\overline{T}} \lessdot$$

$$\lessdot \left|\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{\frac{1}{l}\int_0^l T^2(x)\,dx - \left\{\frac{1}{l}\int_0^l T(x)\,dx\right\}^2}{\frac{1}{l}\int_0^l T(x)\,dx}\right|, \tag{11}$$

kde druhý výraz bude platit tím přesněji, čím více $\frac{\alpha}{2\beta} >> \overline{T}$. Chyba odečtení, způsobená nerovnoměrnou teplotou měřícího orgánu tedy závisí jednak na poměru teplotních součinitelů β a α jevu, na němž se měření zakládá, jednak na poměru rozdílu průměrné hodnoty integrálu čtverce teploty $T(x)$ a čtverce průměrné hodnoty integrálu $T(x)$ ku průměrné teplotě.

7. **Odhad velikosti chyby, způsobené nestejnoměrným oteplením měřícího orgánu.** Obecně lze samozřejmě o velikosti této chyby těžko něco vypovídat, neboť průběh $T(x)$ může býti zcela libovolný, takže o $T(x)$ nelze téměř nic určitého předpokládat. Můžeme však při libovolném průběhu $T(x)$ celý interval rozdělit do (m) úseků, respektive intervalů (značených I_μ, $\mu = 0, 1, 2, \ldots, m$.) tak, že v každém jednotlivém úseku bude $T(x)$ možno aproximovat obecnou parabolou. V každém úseku pak bude platit

$$T(x) = A_\mu + B_\mu \,.\, x^n \qquad x \in I_\mu, \tag{12}$$

kde A_μ (teplota na počátku intervalu), B_μ a n jsou vhodné konstanty, které budou ovšem pro každý ze zvolených úseků jiné, a kde je kladný směr (x) volen tak, aby maximum $T(x)$ v dotyčném úseku bylo v l. Dosadíme-li do vzorce (11) za $T(x)$ z (12), obdržíme pro chybu v libovolném intervalu I_μ (od značení indexy v dalším upouštíme, protože je bezpodstatné)

$$\frac{t_{př} - \overline{T}}{\overline{T}} \doteq \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{A^2 + \frac{2AB}{n+1}l^n + \frac{B^2}{2n+1}l^{2n} - A^2 - \frac{2AB}{n+1}\,.\,l^n - \frac{B^2}{(n+1)^2}l^{2n}}{A + \frac{B}{n+1}l^n} =$$

$$= \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{B^2l^{2n}\frac{n^2}{(2n+1)(n+1)^2}}{A + \frac{B}{n+1}\,.\,l^n}. \tag{13}$$

Ze vzorce (13) je patrno, že chyba (v určitém úseku) bude největší pro $A = 0$, t. j. vztahujeme-li chybu na počáteční teplotu intervalu (chyba stanovení přírůstku teploty). Poznačíme-li vzhledem k tomu maximální vzrůst teploty v daném úseku $Bl^n = \Delta T_{\max}$, můžeme psát, že pro průměrný přírůstek teploty $\Delta\overline{T}$ chyba bude

$$\frac{t_{př} - \Delta\overline{T}}{\Delta\overline{T}} \doteq \frac{\beta}{\alpha}\,.\,\Delta T_{\max}\,.\,\frac{n^2}{2n^2 + 3n + 1}$$

$$\leqq \left|\frac{\beta}{\alpha}\,.\,\Delta T_{\max}\,.\,n^2\right| < \qquad \left(\doteq \text{pro } \frac{1}{2} > n > 0\right) \tag{14}$$

$$< \left|\frac{\beta}{\alpha}\,.\,\Delta T_{\max}\,.\,\frac{1}{2}\right| \qquad (\doteq \text{pro } 1 << n).$$

Označíme-li poměr minimální teploty A ku maximu přírůstku teploty v daném úseku ΔT_{max} písmenem ξ, $\xi = T_{min}/\Delta T_{max}$, pak máme

$$\frac{t_{př} - \overline{T}}{\overline{T}} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \Delta T_{max} \cdot \frac{n^2}{(2n+1)(n+1)^2} \cdot \frac{1}{\{\xi + 1/(n+1)\}}$$

a pokud ξ bude (jako většinou) značně větší než 1, kdežto $\frac{1}{n+1} < 1$, máme

$$\frac{t_{př} - \overline{T}}{\overline{T}} \doteq \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\Delta T^2_{max}}{T_{min}} \cdot \frac{n^2}{4n^3 + 5n^2 + 4n + 1}$$

$$\leq \left| \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\Delta T^2_{max}}{T_{min}} \cdot n^2 \right| < \qquad \left(\doteq \text{pro } \frac{1}{2} > n > 0\right) \tag{15}$$

$$< \left| \frac{\beta}{4\alpha} \cdot \frac{\Delta T^2_{max}}{T_{min}} \cdot \frac{1}{n} \right| \qquad \left((\doteq \text{pro } 2 < n).\right.$$

Prakticky se dá při odhadu postupovat tak, že se zvolí vhodné úseky s ohledem na aproximaci vztahem (12) a provede se odhad pro úsek, který má relativně největší ΔT_{max}. Je pak zřejmé, že průměrná chyba v celém orgánu (nechceme-li ji stanovovat po úsecích atd.) musí býti menší než největší chyba jednotlivých úseků. Na ozřejmení vzrůstu chyby s maximálním rozpětím teploty uvedeme příklad.

Příklad 4. Předpokládejme, že teplota odporového drátu $T(x) = 3{,}0x^2$, $T(x) = 30{,}0x$ a $T(x) = 3{,}0x$, $x < 0{,}10 >$, $\alpha = 3{,}93 \,.\, 10^{-3}$ a $\beta = -5{,}8 \,.\, 10^{-7}$. Jedná-li se nám o chybu stanovení středního oteplení drátu (nad nulou), použijeme pro odhad prvního vzorce (14). Pro kontrolu provedeme přesný výpočet tak, že vypočteme celkový odpor drátu podle (9) a stanovíme pak výchylku přístroje $t_{př}$ podle vzorce (10). Viz tab. 4.

Tabulka 4

ΔT_{max}	Vzorec (9) a (10)	Vzorec (14)
300 °C	1,1 %	1,2 %
300 °C	0,7 %	0,72 %
30 °C	0,09	0,07 %

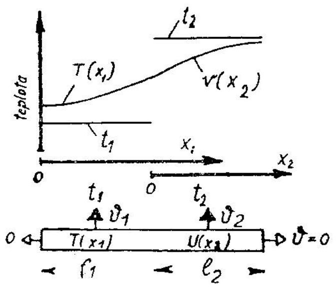
Závěr. Jak ukázala analysa provedená v předchozích odstavcích, nutno vždycky při měření mřížkovými teploměry, ba i u všech teploměrů, jejichž měřící orgán je vzhledem k průběhu teploty okolí rozměrný (dlouhý), počítat s určitou soustavnou chybou měření od proudění tepla v měřícím orgánu a od nerovnoměrné teploty měřícího orgánu. Vyjímku tvoří jen případy, kdy je teplota bezprostředního okolí měřícího orgánu naprosto rovnoměrná. V případě, že je (na př. v nehybné lázni) přestup tepla do měřícího orgánu po jeho celé délce neproměnný, nabývá měřící orgán sice správnou střední teplotu svého bezprostředního okolí, ale přesto možno počítat s chybou od nerovnoměrné teploty čidla. Při tom nezáleží vůbec na tom, jakého jevu se k měření teploty používá, pokud by tento nebyl přísně lineární funkcí teploty. Je pozoruhodné, že chyba od proudění tepla nezávisí na velikosti rozsahu teploty, kdežto chyba od odchylky od cejchovních podmínek ano. Chyba může obnášet jak se ukázalo v důsledku proudění tepla od nuly do několika procent a v důsledku nerovnoměrné teploty orgánu až do asi 2—4 procent. Velikost chyby lze snadno odhadnout ze vzorců výše uvedených. Provedení odhadu chyby se zdá v každém případě záhodné, vzhledem k tomu, že chyba může nabýt vysokých hodnot.

Ačkoliv tedy ve většině případů k chybám neodvratně dochází skýtá se jednak určitá možnost chybu minimalisovat volbou vhodných parametrů měřícího orgánu atd., jednak se dají na základě odhadu chyby zavést případně korekce a dá se po případě stanovit, kdy bude vzhledem k požadované přesnosti měření, měření mřížkovým teploměrem neproveditelné.

Dodatek

9. **Některé poznámky k měření středních teplot plynů a kapalin.** K měření teplot jsou k disposici z největší části měřicí přístroje, které jsou více méně uzpůsobené k bodovému měření teploty. Jejich pomocí se dá, je-li toho třeba, jako na př. u úloh z proudění, thermiky nebo pod., známým způsobem bodovými měřeními stanovit libovolný průběh teploty a z něj případně střední teplotu. Tento způsob měření má však několik zřejmých, zejména technických nevýhod. Pokud nehledíme k chybám měření, které vzniknou tím, že se měřicí zařízení (vzhledem k teplotnímu profilu) neblíží dostatečně ideálu bodového měření, bude přesnost takto určené střední teploty záviset na počtu měřených bodů a v mnoha, ne-li ve většině případů dokonce na počtu současně měřených bodů. Požadavek současnosti souvisí s tou okolností, že je třeba vždy počítat s menšími nebo většími fluktuacemi teploty a rychlosti, a požadavek měření většího počtu bodů s nepravidelnostmi průběhu profilu, které se samozřejmě od případu k případu mění a které lze těžko odhadnout. Nelze skoro nikdy počítat s tím, že by (záleží tu ovšem na měřítku) teplota byla ideálně konstantní a obzvláště tehdy ne, když se pro usnadnění měření různými prostředky a zásahy teplotní profil uměle vyhlazuje. Z toho důvodu je často lepší měřit střední teplotu přímo nějakým zařízením k tomu uzpůsobeným, neboť je (zejména technicky) velmi obtížné, případně i pracné měřit větší počet bodů a současně je to skoro nemožné.

Zařízení na přímé měření středních teplot zase mají, jak jsme viděli, jiné nežádoucí vlastnosti, takže se samozřejmě musí o způsobu měření rozhodnout podle okolností a možností. Mřížkový teploměr zachycuje ze všech měřicích zařízení nejvíce měřených bodů současně, při čemž lze na př. natáčením a pod. jeho účinnost ještě zlepšit. Jedině tímto způsobem lze stlačit chyby od ne-současnosti měření na žádanou míru. Nutno ovšem dbát na vhodné rozložení mřížky a aby byla dostatečně hustá, neboť se vlastně stanovuje střední teplota podél určitých přímek (P) podél drátu jako $\frac{1}{n}\sum^{n}\int_{(P)} t\,dx$, aby nevznikl rozdíl proti skutečné střední hodnotě teploty (na př. stanovené z bodových měření integrací dle Simpsonova pravidla). Tento požadavek na dostatečnou hustotu měřením zachycených bodů se týká jiných způsobů měření samozřejmě v daleko větší míře. Při rozložení mřížky nutno také dbát určité pravidelnosti proto, aby se ve stanovené střední hodnotě neprojevily některé místní teploty s větší váhou.



Obr. 4.

10. **Vedení tepla v tyčích o dvou úsecích, z nichž každý vyměňuje teplo při jiném součiniteli přestupu tepla s dvěma prostředími o různé teplotě.** Diferenciální rovnice vedení tepla pro oba úseky tyče (viz obr. 4), která nám představuje idealisovaný model měřícího orgánu, zní

$$\frac{d^2T(x_1)}{dx_1^2} - q_1^2 \cdot T(x_1) = -q_1^2 \cdot t_1; \quad q_1^2 = \frac{\vartheta_1 o}{\lambda P} = \frac{4\vartheta_1}{\lambda D},$$
$$\frac{d^2U(x_2)}{dx_2^2} - q_2^2\; U(x_2) = -q_2^2 \cdot t_2; \quad q_2^2 = \frac{\vartheta_2 o}{\lambda P} = \frac{4\vartheta_2}{\lambda D}. \tag{17}$$

Při okrajových podmínkách

$$\left\{\frac{dT(x_1)}{dx_1}\right\}_{x_1=0} = 0; \quad \left\{\frac{dT(x_1)}{dx_1}\right\}_{x_1=l_1} = \left\{\frac{dU(x_2)}{dx_2}\right\}_{x_2=0}; \quad T(l_1) = U(0);$$
$$\text{a} \left\{\frac{dU(x_2)}{dx_2}\right\}_{x_2=l_2} = 0. \tag{18}$$

Obecné řešení je pro obě diferenciální rovnice (17) analogicky

$$T(x_1) = t_1(1 - \cosh q_1x_1) + A_1 \cosh q_1x_1 + B_1/q_1 \cdot \sinh q_1x_1,$$
$$U(x_2) = t_2(1 - \cosh q_2x_2) + A_2 \cosh q_2x_2 + B_2/q_2 \cdot \sinh q_2x_2, \tag{19}$$

kde $A_{1,2}$ a $B_{1,2}$ jsou zcela libovolné konstanty. Dosadíme-li řešení (19) do okrajových podmínek (18), obdržíme hodnoty konstant $A_{1,2}$ a $B_{1,2}$, které daným okrajovým podmínkám vyhovují. Jako konečné řešení máme

$$T(x_1) = t_1 + (t_2 - t_1)\frac{1/q_1 \cdot \sinh^{-1} q_1l_1}{1/q_1 \cdot \operatorname{cotgh} q_1l_1 + 1/q_2 \cdot \operatorname{cotgh} q_2l_2} \cosh q_1x_1,$$
$$U(x_2) = t_2 - (t_2 - t_1)\frac{1/q_2 \cdot \sinh q_2x_2 - 1/q_2 \operatorname{cotgh} q_2l_2 \cdot \cosh q_2x_2}{1/q_1 \operatorname{cotgh} q_1l_1 + 1/q_2 \operatorname{cotgh} q_2l_2}. \tag{20}$$

Vypočteme průměrnou teplotu tyče $\frac{1}{2}(\overline{T} + \overline{U}) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{l_1}\int_0^{l_1} T(x_1)\,dx_1 + \frac{1}{l_2}\int_0^{l_2} U(x_2)\,dx_2\right\}$ a utvoříme relativní rozdíl proti průměrné teplotě okolí $\frac{1}{2}(t_1 + t_2)$. Při tom můžeme s ohledem na $q_{1,2} \cdot l_{1,2} > 1$ dosadit za $\operatorname{cotgh} q_{1,2} \cdot l_{1,2} \doteq 1$, takže máme

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot(\overline{T} + \overline{U}) - \frac{1}{2}(t_1 + t_2)}{\frac{1}{2}(t_1 + t_2)} = \frac{\sqrt{\lambda D}}{2}\cdot\left(\frac{t_2 - t_1}{t_1 + t_2}\right)\cdot\frac{\frac{1}{l_1}\sqrt{\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}} - \frac{1}{l_2}\sqrt{\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}}}{\sqrt{\vartheta_1 \cdot \vartheta_2}(\sqrt{\vartheta_1} + \sqrt{\vartheta_2})},$$

a pro $l_1 \to l_2 \to l/2$

$$= \frac{\sqrt{\lambda D}}{l}\left(\frac{t_2 - t_1}{t_2 + t_1}\right)\cdot\frac{\sqrt{\vartheta_2} - \sqrt{\vartheta_1}}{\sqrt{\vartheta_2\vartheta_1}}. \tag{21}$$

Došlo 30. 8. 1957.

Kabinet fyziky Slovenskej akadémie vied v Bratislave

ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЙ СРЕДНИХ ТЕМПЕРАТУР ГАЗОВ И ЖИДКОСТЕЙ ТЕРМОМЕТРАМИ УСТАНОВЛЕННЫМИ В ВИДЕ СЕТКИ

АРНОШТ КЕССЛЕР

Выводы

По различным соображениям, приведенным в дополнении к этой статье, для измерений средних температур в некоторых технических устройствах применяются термометры, установленные в виде сетки. При таких измерениях (а также при обыкновенных измерениях, при которых термочувтсвительная чать прибора является по отношению к неравномерностям температурного поля сравнительно большой), кроме общеизвестных погрешностей в результате теплопередачи термочувствительной части прибора, возникают еще две специфические погрешности. Во-первых, термочувствительная часть прибора приобретает в результате происходящего в ней теплового потока среднюю температуру, отличающуюся от средней температуры измеряемой среды вблизи термочувствительной части и во-вторых, собственное измерительное устройство невполне правильно показывает среднюю температуру термочувствительной части прибора, в виду того что работает в условиях, отличающихся от условий при градуировке.

В статье рассматриваются оба эти вопроса и приблизительно определяются погрешности в зависимости от параметров прибора, измеряемой температуры, скорости и т. д. Теоретически всегда должны возникнуть определенные погрешности. Однако практически величина погрешностей зависит от параметров прибора и может колебаться от нуля до нескольких десятков процентов. На основании формулы для определения погрешностей можно однако путем соответствующего подбора параметров прибора погрешности понизить или притти к заключению о целесообразности применения такого метода измерения в данных условиях.

ÜBER DIE GENAUIGKEIT DER BESTIMMUNG DER MITTLEREN TEMPERATUR VON GASEN UND FLÜSSIGKEITEN MITTELS GITTERARTIG ANGEORDNETER THERMOMETER

ARNOŠT KESSLER

Zusammenfassung

Aus einer Reihe von Gründen, welche zum Teil im Anhang aufgezeigt werden, verwendet man insbesondere bei technischen Apparaten und Meßeinrichtungen zur Ermittlung der mittleren Temperaturen von Gasen und Flüssigkeiten (auch strömenden) gitterartig angeordnete Thermometer, die meist als Widerstandsthermometer oder mittels Thermoelementen ausgeführt werden. Bei solchen Messungen (aber auch in solchen Fällen, wo bei konventioneller Art der Temperaturmessung das eigentliche Meßorgan im Verhältnis zum Verlauf des Temperaturfeldes groß ist) entstehen außer den allgemein bekannten Meßfehlern durch Wärmeableitung aus dem Meßorgan usw. noch zwei spezifische systematische Meßfehler. Einerseits nimmt infolge der Wärmeströmung im Meßorgan dieses eine mittlere Temperatur an, die von der mittleren Temperatur der unmittelbaren Umgebung des Meßorgans verschieden ist, anderseits zeigt das Anzeigegerät infolge der Abweichung von den Kalibrationsbedingungen eine von der wirklichen mittleren Temperatur des Meßorgans abweichende Temperatur an.

Es wird die Frage nach der Abhängigkeit der Größe der beiden Fehler von den Meßbedingungen, d. h. von der Beschaffenheit des Meßorgans, von dem Temperatur- und eventuell Geschwindigkeitsverlauf gelöst. Es zeigt sich, daß die beiden Fehler zwar theoretisch unvermeidbar sind, sich jedoch je nach den Umständen von nahezu null bis zu einigen (Zehnt). Prozent belaufen können. Durch geeignete Wahl der Parameter des Meßorgans ist es aber möglich (an Hand der Formeln, die zur Abschätzung der Fehler abgeleitet wurden) den Fehler auf ein Mindestmaß zu beschränken oder festzustellen, ob ein Messen mittels dieser Anordnung unter den gegebenen Umständen realisiert werden kann.