MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK VIII ČÍSLO 1

POZNÁMKA O SEMIHOMOMORFISMECH ALTERNATIVNÍCH OKRUHŮ

VÁCLAV HAVEL, Brno

L. K. Hua dokázal, že pro asociativní okruhy je pojem semihomomorfismu rovnocenný s pojmem homomorfismu přímého anebo nepřímého ([2], věta 1). L. A. Skornjakov ukázal na příkladě, že předchozí ekvivalenci nelze přenést na okruhy alternativní (viz [5]). Úkolem této poznámky je najít nutnou a postačující podmínku pro to, aby zmíněnou ekvivalenci bylo možno přenést i pro okruhy alternativní. Takováto nutná a postačující podmínka má též geometrický smysl: Staudtova projektivita[1] moufangovské přímky o charakteristice $\neq 2$[2] se samodružným bodem nulovým, jednotkovým a nevlastním je totiž rovnocenná se semiautomorfismem souřadnicového alternativního tělesa (viz [1], tvrzení 3 a 4). A tedy zmíněná nutná a postačující podmínka bude též charakterisovat případ, kdy popsanou Staudtovu projektivitu lze vystihnout přímým anebo nepřímým automorfismem alternativního tělesa. Autor děkuje srdečně docentu Dr. Jakubíkovi za jeho cenné připomínky.

Alternativní okruh je množina s binárním sečítáním a násobením, jejíž všecky prvky tvoří abelovskou grupu vůči sečítání, při čemž dále platí oba distributivní zákony pro násobení nad sečítáním a identické rovnice $x^2y = x(xy)$, $xy^2 = (xy)y$. Alternativní okruh nazývá se alternativním tělesem, když existuje aspoň jeden nenulový prvek a když ke každému nenulovému prvku a a ke každému prvku b existují jednoznačně určené prvky x, y, pro něž $ax = b = ya$. Je-li σ zobrazení alternativního okruhu A do alternativního okruhu B bez dělitelů nuly, pak zkoumejme tyto podmínky:

$$(x + y)^\sigma = x^\sigma + y^\sigma,\ (xx)^\sigma = x^\sigma x^\sigma,\ (xyx)^\sigma = x^\sigma y^\sigma x^\sigma \text{[3] pro všechna } x, y \in A; \quad (1)$$

$$(x + y)^\sigma = x^\sigma + y^\sigma,\ (xy)^\sigma = x^\sigma y^\sigma \text{ pro všechna } x, y \in A; \quad (2a)$$

$$(x + y)^\sigma = x^\sigma + y^\sigma,\ (xy)^\sigma = y^\sigma x^\sigma \text{ pro všechna } x, y \in A; \quad (2b)$$

$$x^\sigma(y^\sigma(xy)^\sigma) = (x^\sigma y^\sigma)(xy)^\sigma \text{ pro všechna } x, y \in A. \quad (3)$$

---

[1] T. j. oboustranné zobrazení, reprodukující harmonické čtveřiny bodů.

[2] T. j. přímky, ležící v některé rovině, v níž platí obecná malá věta Desarguesova a v níž všecky úplné čtyřrohy mají nekolineární diagonální vrcholy.

[3] V alternativním okruhu platí identita $x(yx) = (xy)x$; viz [4], formule (7) na str. 158.

Tvrzení. *Podmínka* (1) *je rovnocenná s* (2a) *anebo s* (2b), *právě když platí* (3).

Důkaz. I. Nechť platí (1) a (3). Navážeme na postup, který použil pro asociativní okruhy L. K. Hua v práci [2] při důkazu věty 1. Platí identita $(ab)\,c + (cb)\,a = a(bc) + c(ba) = (a + c)\,b(a + c) - aba - cbc$.[3] Tedy podle (1) jest

$$((ab)\,c + (cb)\,a)^\sigma = (a^\sigma b^\sigma)\,c^\sigma + (c^\sigma b^\sigma)\,a^\sigma. \tag{4}$$

Dále platí $v_{a,b} = ((ab)^\sigma - a^\sigma b^\sigma)((ab)^\sigma - b^\sigma a^\sigma) = (ab)^\sigma(ab)^\sigma + a^\sigma(b^\sigma b^\sigma)\,a^\sigma - ((a^\sigma b^\sigma)(ab)^\sigma + (ab)^\sigma(b^\sigma a^\sigma))$.[4] Podle (4), kde $c = ab$, podle (3) a dále podle (1) jest $v_{a,b} = ((ab)^2 + ab^2a - (ab)(ab) - (ab)(ba))^\sigma$, a tedy podle poznámky [4] pod čarou jest $v_{a,b} = 0$. Poněvadž v B nejsou žádní dělitelé nuly, jest

$$\text{pro každé } a, b \in A \text{ buďto } (ab)^\sigma = a^\sigma b^\sigma \text{ anebo } (ab)^\sigma = b^\sigma a^\sigma. \tag{5}$$

Nechť nyní existují takové prvky $c, d \in A$, pro něž $(cd)^\sigma = c^\sigma d^\sigma \neq d^\sigma c^\sigma$. Pak pro každé $x \in A$ platí $(xd)^\sigma = x^\sigma d^\sigma$.

[Kdyby tomu totiž tak nebylo, pak by z (5) plynulo pro jisté $\bar{x} \in A$ $(\bar{x}d)^\sigma = d^\sigma \bar{x}^\sigma \neq \bar{x}^\sigma d^\sigma$, takže dle (5) a dle $c^\sigma d^\sigma \neq d^\sigma c^\sigma$ bylo by $c^\sigma d^\sigma + d^\sigma x^\sigma = (cd)^\sigma + (xd)^\sigma$, což by se dále rovnalo buďto výrazu $(c^\sigma + x^\sigma)\,d^\sigma$ anebo výrazu $d^\sigma(c^\sigma + x^\sigma)$. První výsledek odporuje pak nerovnosti $d^\sigma x^\sigma \neq x^\sigma d^\sigma$, druhý výsledek předpokladu $c^\sigma d^\sigma \neq d^\sigma c^\sigma$.]

Obdobně dokáže se platnost rovnice $(cx)^\sigma = c^\sigma x^\sigma$ pro každé $x \in A$.

Nechť nyní existuje v A dvojice prvků, splňujících rovnici $(xy)^\sigma = x^\sigma y^\sigma$ i dvojice prvků tuto rovnici nesplňujících; poslední dva prvky označme $\bar{c}$, $\bar{d}$. Jest $(\bar{c}\bar{d})^\sigma = \bar{d}^\sigma \bar{c}^\sigma \neq \bar{c}^\sigma \bar{d}^\sigma$. Obdobně jako v předchozím vyplývá platnost rovnic $(x\bar{d})^\sigma = \bar{d}^\sigma x^\sigma$, $(\bar{c}x)^\sigma = x^\sigma \bar{c}^\sigma$ pro každé $x \in A$.

Pak $V_{a,b,\bar{c},\bar{d}} = a^\sigma b^\sigma + a^\sigma \bar{d}^\sigma + \bar{c}^\sigma b^\sigma + \bar{d}^\sigma \bar{c}^\sigma = ((a + \bar{c})(b + \bar{d}))^\sigma$. Dále jest buďto $V_{a,b,\bar{c},\bar{d}} = (a^\sigma + \bar{c}^\sigma)(b^\sigma + \bar{d}^\sigma)$ anebo $V_{a,b,\bar{c},\bar{d}} = (b^\sigma + \bar{d}^\sigma)(a^\sigma + \bar{c}^\sigma)$.

Obojí vede ke sporu. Tedy z (1), (3) plyne buďto (2a) anebo (2b).

Nechť platí (1), nikoliv však (3). Pak existují prvky $a, b \in A$ tak, že $(a^\sigma b^\sigma)(ab)^\sigma \neq a^\sigma(b^\sigma(ab)^\sigma)$, a tedy též $v_{a,b} \neq 0$. Poněvadž v B není dělitelů nuly, jest $a^\sigma b^\sigma \neq (ab)^\sigma \neq b^\sigma a^\sigma$. Tedy neplatí ani (2a), ani (2b).

II. Provedeme ještě jiný důkaz předloženého tvrzení, avšak pouze pro alternativní tělesa A, B a pro oboustranné zobrazení σ. Budeme aplikovat postup, který užil G. Pickert v knize [4] při důkazu věty 22 na str. 121.

Nejprve poukažme na to, že pro prvky a, b, $c (c \neq 0)$ z alternativního tělesa

[4] V alternativním okruhu platí identita $(xy)(yx) = xy^2x$; viz [4], formule (18) a (20) na str. 160. — Platí-li pro prvky x, y, z alternativního okruhu rovnice $(xy)\,z = x(yz)$, pak tyto prvky vytvořují asociativní podokruh; viz [4], věta 5 na str. 161. Tedy z rovnice $a^\sigma(b^\sigma(ab)^\sigma) = (a^\sigma b^\sigma)(ab)^\sigma$ plyne též rovnice $((ab)^\sigma b^\sigma)\,a^\sigma = (ab)^\sigma(b^\sigma a^\sigma)$.

plyne z rovnice $(ab)\,c = a(bc)$ též rovnice $(ab)\,c^{-1} = a(bc^{-1})$.[5] Pro každé nenulové $x \in A$ platí rovnice

$$(x^{-1})^\sigma = (x^\sigma)^{-1}. \tag{6}$$

[Neboť z rovnice $(x + y)^\sigma = x^\sigma + y^\sigma$ plyne pro $x = y = 0$ též $0^\sigma = 0$. Dále z rovnice $(xx)^\sigma = x^\sigma x^\sigma$ plyne pro $x = 1$ rovnice $1^\sigma = 1^\sigma 1^\sigma$, a tedy buďto $1^\sigma = 0$ anebo $1^\sigma = 1$. Protože zobrazení σ je oboustranné, jest $1^\sigma = 1$ a dále též $x^\sigma \neq 0$ pro každé nenulové $x \in A$. V rovnici $(xyx)^\sigma = x^\sigma y^\sigma x^\sigma$ položme $x \neq 0$, $y = x^{-1}$; dostaneme $x^\sigma = x^\sigma(x^{-1})^\sigma x^\sigma$, a tedy též $(x^{-1})^\sigma = (x^\sigma)^{-1}$, jak bylo dokázat.]

V rovnici $x^\sigma x^\sigma = (xx)^\sigma$ nahraďme x výrazem $x + y$; po krátkém výpočtu odvodíme rovnici

$$(xy)^\sigma + (yx)^\sigma = x^\sigma y^\sigma + y^\sigma x^\sigma \quad \text{pro každé } x, y \in A. \tag{7}$$

Podle rovnic $(xyx)^\sigma = x^\sigma y^\sigma x^\sigma$, (6), $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$[6] jest pro nenulová $x, y \in A$ $(yx)^\sigma = (x(y(xy)^{-1}y)x)^\sigma = x^\sigma(y^\sigma((xy)^\sigma)^{-1}y^\sigma)\,x^\sigma = (x^\sigma y^\sigma)((xy)^\sigma)^{-1}(y^\sigma x^\sigma)$.[7] Tedy podle (7) jest $x^\sigma y^\sigma + y^\sigma x^\sigma = (xy)^\sigma + (x^\sigma y^\sigma)((xy)^\sigma)^{-1}(y^\sigma x^\sigma)$, a tudíž $((xy)^\sigma - x^\sigma y^\sigma)\,((xy)^\sigma)^{-1}((xy)^\sigma - y^\sigma x^\sigma) = 0$. Odtud vychází jako výsledek, že pro všecka nenulová $x, y \in A$ jest vždy buďto $(xy)^\sigma = x^\sigma y^\sigma$, anebo $(xy)^\sigma = y^\sigma x^\sigma$. Další postup shoduje se již s postupem v části I. Vychází opět, že platí buďto identita $(xy)^\sigma = x^\sigma y^\sigma$ anebo identita $(xy)^\sigma = y^\sigma x^\sigma$.

Nechť nyní platí (1) a neplatí (3). Tedy existují prvky $a, b \in A$ tak, že $a^\sigma(b^\sigma(ab)^\sigma) \neq (a^\sigma b^\sigma)(ab)^\sigma$, a tedy též podle poznámky [5] pod čarou platí, položíme-li $d = ((ab)^\sigma)^{-1}$, nerovnost

$$a^\sigma(b^\sigma d) \neq (a^\sigma b^\sigma)\,d. \tag{8}$$

Z (8) plyne dále $(a^\sigma(b^\sigma d))\,(b^\sigma a^\sigma) \neq ((a^\sigma b^\sigma)\,d)\,(b^\sigma a^\sigma) = f$. Dále platí $e = a^\sigma(b^\sigma d b^\sigma)\,a^\sigma = ((a^\sigma(b^\sigma d)\,b^\sigma)\,a^\sigma = (a^\sigma(b^\sigma d))\,(b^\sigma a^\sigma)$,[8] takže

$$e \neq f. \tag{9}$$

Pro libovolné nenulové prvky $x, y \in A$ plyne z rovnice (7) postupem obdobným k postupu za rovnicí (7):

$$x^\sigma y^\sigma + y^\sigma x^\sigma = (xy)^\sigma + x^\sigma(y^\sigma((xy)^\sigma)^{-1}\,y^\sigma)\,x^\sigma. \tag{10}$$

[5] Platí-li v alternativním tělese pro prvky a, b, c rovnice $(ab)\,c = a(bc)$, pak prvky a, b, c vytvářejí asociativní podtěleso. (Viz [3], odst. 4 na str. 428.)

[6] Viz [3], formule (8a) na str. 418.

[7] Zde uplatníme rovnost $a(bc^{-1}b)\,a = (abc^{-1})(ba)$, která vyplývá z relací $(ab)\,c = a(bc)$, $c \neq 0$; platí-li totiž v alternativním tělesu $(ab)\,c = a(bc)$, pak prvky a, b, c vytvářejí asociativní podtěleso. Viz [3], odst. 4 na str. 428. Položíme $a = x^\sigma$, $b = y^\sigma$, $c = (xy)^\sigma$.

[8] Užili jsme identit $x(yzy) = (x(yz))\,y$, resp. $((xy)\,z)\,x = (xy)(zx)$; viz [4], formule (18) — (20) na str. 160.

Z (9) a (10) plyne konečně $0 = -a^\sigma b^\sigma - b^\sigma a^\sigma + (ab)^\sigma + e \neq -a^\sigma b^\sigma - b^\sigma a^\sigma + (ab)^\sigma + f = (((ab)^\sigma - a^\sigma b^\sigma)\, d)((ab)^\sigma - b^\sigma a^\sigma)$, a tedy $(ab)^\sigma \neq a^\sigma b^\sigma$, $(ab)^\sigma \neq b^\sigma a^\sigma$. Dostáváme hledaný spor. Tvrzení je dokázáno, avšak nyní pouze pro alternativní tělesa a pro oboustranné zobrazení σ.

LITERATURA

[1] V. Havel, Poznámka ke Staudtově větě v moufangovské rovině (něm.), Čech. mat. žurnal 7 (1957), 314—317.

[2] L. K. Hua, O semihomomorfismech okruhů a jejich aplikaci na projektivní geometrii (rus.), Usp. mat. nauk VIII (1955), 143—147.

[3] R. Moufang, Ke struktuře alternativních těles (něm.), Math. Ann. 110 (1935), 416—438.

[4] G. Pickert, Projektivní roviny (něm.), Berlin—Göttingen—Heidelberg 1955.

[5] L. A. Skornjakov, recense č. 6833, Ref. žurnal 1956, seš. 9.

Došlo 6. 12. 1956.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie fakulty inženýrského stavitelství při Vysokém učení technickém v Brně

ЗАМЕТКА О ПОЛУГОМОМОРФИЗМАХ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ КОЛЕЦ

ВАЦЛАВ ГАВЕЛ

Выводы

В этой заметке исследуется необходимое и достаточное условие для равносильности полугомоморфизма с прямым или непрямым гомоморфизмом между двумя альтернативными кольцами. Этим условием является выполнение тождества $a^\sigma(b^\sigma(ab)^\sigma) = (a^\sigma b^\sigma)(ab)^\sigma$ для всех a, b из отображаемого альтернативного кольца, где σ исследованное отображение. Для доказательства применяется метод Л. К. Хуа и Г. Пикерта.

EINE BEMERKUNG ÜBER DIE SEMI-HOMOMORPHISMEN DER ALTERNATIVRINGE

VÁCLAV HAVEL

Zusammenfassung

In der Bemerkung handelt es sich um eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Gleichwertigkeit der Semi-Homomorphismen mit direkten oder indirekten Homomorphismen zwischen nullteilerfreien Alternativringen. Die erwähnte Bedingung ist die Identität $a^\sigma(b^\sigma(ab)^\sigma) = (a^\sigma b^\sigma)(ab)^\sigma$ (für alle a, b aus dem abgebildeten Alternativring), wobei σ die untersuchte Abbildung ist. Zum Beweis verwendet man die Methoden von L. K. Hua und G. Pickert.