MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, VIII, 1 — 1958

O REPREZENTÁCII JEDNODUCHÝCH POLOGRÚP

JÁN IVAN, Bratislava

Úvod

Článok nadväzuje na autorove práce [1], [2]. Jeho obsahom je riešenie niektorých otázok teórie reprezentácie tzv. jednoduchých pologrúp typu A, t. j. takých konečných jednoduchých pologrúp bez nuly, v ktorých súčin ľubovoľných dvoch idempotentov je opäť idempotent (pozri definíciu 1.4 v [1]). Ukazuje súvislosť medzi direktným rozkladom takejto pologrupy aj jej reprezentáciami pomocou matíc. Ide tu vlastne o aplikáciu viet o radikáli a polojednoduchosti direktného súčinu algebier z [2] na algebru jednoduchej pologrupy S typu A nad komutatívnym telesom charakteristiky 0, ktorá je hlavným predmetom štúdia v tejto práci.

Algebra konečnej pologrupy S nad telesom K sa utvorí podobne ako algebra konečnej grupy (grupový okruh). Vo vektorovom priestore nad K, ktorého prvky sú formálne súčty $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i$, kde $\lambda_i \in K$ a $s_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ sú elementy pologrupy S, definujeme násobenie takto:

$$(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i)(\sum_{i=1}^{n} \beta_i s_i) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{s_k s_l = s_i} \alpha_k \beta_l) s_i .$$

Tento vektorový priestor je zrejme algebra rádu n nad telesom K. Túto algebru nazveme *algebrou pologrupy S nad telesom K* a budeme ju značiť znakom $\mathfrak{A}_K(S)$. V celej práci budeme predpokladať, že K je komutatívne teleso charakteristiky 0.

Pod *reprezentáciou Γ stupňa r pologrupy S v telese K* budeme rozumieť homomorfizmus

$$S \sim S^* ,$$

kde S^* je multiplikatívna pologrupa matíc stupňa r nad telesom K. V prípade, že zobrazenie S na S^* je izomorfné, budeme hovoriť o *izomorfnej (vernej) reprezentácii*.

Ďalšie základné pojmy z teórie reprezentácie (priestor reprezentácie, ekvivalentné reprezentácie, regulárna, ireducibilná, reducibilná, úplne reducibilná reprezentácia a pod.) budeme používať v obvyklom zmysle (pozri napr. [3]).

Nech zobrazenie Γ:

$$s_i \to A_i$$

je reprezentácia konečnej pologrupy S v telese K a nech $a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i$ ($\alpha_i \in K$, $s_i \in S$) je ľubovoľný element z algebry $\mathfrak{A}_K(S)$. Potom zobrazenie $\overline{\Gamma}$:

$$a \to \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i$$

bude zrejme reprezentáciou algebry $\mathfrak{A}_K(S)$ v telese K. Naopak, každá reprezentácia $\overline{\Gamma}$ algebry $\mathfrak{A}_K(S)$ indukuje reprezentáciu Γ pologrupy S. Pritom ireducibilnosť (reducibilnosť, úplná reducibilnosť) reprezentácie $\overline{\Gamma}$ má za následok ireducibilnosť (reducibilnosť, úplnú reducibilnosť) reprezentácie Γ, a naopak. Vidíme teda, že problém reprezentácie konečnej pologrupy S možno previesť na problém reprezentácie algebry $\mathfrak{A}_K(S)$. Takýmto spôsobom budeme postupovať aj v tejto práci.

Práca sa skladá z dvoch paragrafov. V § 1 sa vyšetruje algebra konečnej jednoduchej pologrupy bez nuly, ktorej každý element je idempotentný. V súhlase s prácou [1] takúto pologrupu označíme písmenom E. Pomocou stôp a diskriminantu v regulárnej reprezentácii dokážeme, že ak pologrupa E je rádu $n \geqq 2$, tak algebra $\mathfrak{A}_K(E)$ nie je polojednoduchá a jej radikál je rádu $n - 1$ (veta 1.1). Pomocou tejto vety, vety 3.2 z [1] a viet 3 a 4 z [2] v druhom paragrafe pomerne jednoducho dokážeme, že algebra $\mathfrak{A}_K(S)$ jednoduchej pologrupy S typu A je polojednoduchá vtedy a len vtedy, ak S je grupa (veta 2.1) a jej faktorová algebra $\mathfrak{A}_K(S)/\mathfrak{N}$ podľa radikálu $\mathfrak{N}$ je izomorfná s algebrou $\mathfrak{A}_K(G)$, kde G je grupový komponent pologrupy S (veta 2.2). Z toho a zo základných viet teórie reprezentácie algebier vyplýnie, že jednoduchá pologrupa S typu A má v komutatívnom telese charakteristiky 0 práve toľko ireducibilných reprezentácií ako jej grupový komponent G. Ďalej ukážeme, ako zo známych ireducibilných reprezentácií grupy G vytvoríme ireducibilné reprezentácie pologrupy S (veta 2.3).

V práci sa používa tá istá symbolika ako v [1], resp. [2]. Pojmy jednoduchá pologrupa, zľava (sprava) jednoduchá pologrupa, jednoduchá pologrupa typu A, grupový komponent jednoduchej pologrupy, direktný súčin pologrúp, direktný súčin algebier a pod. majú ten istý význam ako v [1] a [2].

Hlavným výsledkom práce sú vety 2.1 a 2.2. Poznamenávam, že tieto výsledky nie sú nové. Sú odvodené (podstatne inými metódami) napr. v práci [4]. Veta 2.1 je obsiahnutá aj v prácach [5] a [6] ako dôsledok všeobecnejších viet

o polojednoduchosti algebry konečnej pologrupy S. O reprezentácii konečných jednoduchých pologrúp hovorí (z iného hľadiska) aj práca [7]. Význam predloženej práce možno azda vidieť v tom, že ukazuje súvis medzi direktným rozkladom pologrúp a ich reprezentáciou a použiteľnosť viet o direktnom súčine algebier z práce [2].

§ 1. Ireducibilné reprezentácie pologrupy E

Podobne ako v [1] písmenom E budeme označovať konečnú jednoduchú pologrupu bez nuly, ktorej každý element je idempotent, t. j.

$$E = \{e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{ik}, \ldots, e_{st}\}.$$

Rád pologrupy E je teda $n = st$, kde s znamená počet jej minimálnych ľavých ideálov a t počet jej minimálnych pravých ideálov.

Naším cieľom je nájsť všetky neekvivalentné ireducibilné reprezentácie pologrupy E v komutatívnom telese K charakteristiky 0. Za tým účelom zistíme, či algebra $\mathfrak{A}_K(E)$ je polojednoduchá alebo nie. V prípade, že E je rádu 1, je táto otázka triviálna. V tom prípade je totiž $\mathfrak{A}_K(E) \cong K$ a teda $\mathfrak{A}_K(E)$ ako teleso je jednoduchá algebra a teda aj polojednoduchá. Budeme preto predpokladať, že $n \geqq 2$. Dokážeme, že v tom prípade algebra $\mathfrak{A}_K(E)$ nie je polojednoduchá. Na to budeme potrebovať nasledujúcu pomocnú vetu.

Lemma 1.1. *Nech S je konečná jednoduchá pologrupa bez nuly. Potom v regulárnej reprezentácii Γ algebry $\mathfrak{A}_K(S)$ stopy elementov pologrupy S majú tieto vlastnosti:*

1° *všetky idempotentné elementy majú rovnakú stopu,*

2° *stopa každého neidempotentného elementu je rovná nule.*

Dôkaz. Budeme sa opierať o štruktúru konečnej jednoduchej pologrupy bez nuly, ktorá bola podrobne vyložená v [1].

Je zrejmé, že v regulárnej reprezentácii Γ algebry $\mathfrak{A}_K(S)$ elementom jej bázy, t. j. elementom pologrupy S, odpovedajú matice, ktorých prvky sú iba nula a jednotka telesa K. Súčet ν jednotiek 1 označme $\nu \cdot 1$, t. j. $\nu \cdot 1 = 1 + 1 + \ldots + 1$. Potom je zrejmé, že stopa $\sigma_\Gamma(s_k)$ ľubovoľného elementu $s_k \in S$ v regulárnej reprezentácii Γ bude

$$\sigma_\Gamma(s_k) = \nu \cdot 1,$$

kde ν je počet jednotiek v hlavnej diagonále tej matice, ktorá v reprezentácii Γ prislúcha elementu s_k. Je to zrejme počet tých elementov $s_i \in S$, pre ktoré platí $s_i s_k = s_i$.

1° Nech e_{ik} je ľubovoľný idempotent pologrupy S. Pretože S je súčtom svojich minimálnych ľavých ideálov, je $e_{ik} \in L_i$, kde L_i je minimálny ľavý ideál v S. Ako je známe (pozri napr. [8]), každý idempotent minimálneho ľavého ideálu je jeho pravou jednotkou. Teda pre každý element $x_{il} \in L_i$ platí $x_{il}e_{ik} = x_{il}$. Dokážeme, že pre každý element $x_{jl} \in L_j (j \neq i)$, teda taký, ktorý nepatrí do L_i, platí $x_{jl}e_{ik} \neq x_{jl}$. Predpokladajme opak, t. j., že platí $x_{jl}e_{ik} = x_{jl}$. Z toho však (pretože $e_{ik} \in L_i$ a L_i je ľavý ideál v S a teda $x_{jl}e_{ik} \in L_i$) vyplýva $x_{jl} \in L_i$, čo je spor s tým, že x_{jl} nepatrí do L_i. Tým je dokázané, že

$$\sigma_\Gamma(e_{ik}) = gt \,.\, 1\,,$$

kde gt je rád ideálu L_i. Ale pretože všetky minimálne ideály majú rovnaký počet elementov a každý idempotent padne do niektorého ideálu L_i, je tým prvé tvrdenie vety dokázané.

2° Nech a_{ik} je ľubovoľný neidempotentný element pologrupy S. Dokážeme, že pre každý element $x_{jl} \in S$ platí $x_{jl}a_{ik} \neq x_{jl}$. Ak $j = i, l = k$, t. j. $x_{jl} = x_{ik} \in G_{ik}$, je to zrejmé, pretože grupa G_{ik} môže mať len jednu jednotku a tou je idempotent e_{ik}. Ak $j \neq i$, potom x_{jl} nepatrí do L_i a pretože $a_{ik} \in L_i$, musí byť $x_{jl}a_{ik} \in L_i$ a teda $x_{jl}a_{ik} \neq x_{jl}$. Ak $j = i, l \neq k$, tak $x_{jl} = x_{il} \in G_{il}$. Keďže $x_{il} \in L_i$ a L_i je jednoduchá pologrupa typu A, podľa vety 1.8 z [2] platí $x_{il}a_{ik} = x_{il}a_{il}$. Zrejme je $x_{il}a_{il} \neq x_{il}$ (pretože grupa G_{il} má jedinú jednotku e_{il} a je $a_{il} \neq e_{il}$). Teda aj $x_{il}a_{ik} \neq x_{jl}$. Tým je dokázané, že pre každé $x_{jl} \in S$ platí $x_{jl}a_{ik} \neq x_{jl}$. Z toho však vyplýva, že matica, ktorá v regulárnej reprezentácii Γ algebry $\mathfrak{A}_K(S)$ prislúcha elementu a_{ik}, má v hlavnej diagonále samé nuly, teda

$$\sigma_\Gamma(a_{ik}) = 0\,,$$

ak $a_{ik} \in S$ nie je idempotent, č. b. t. d.

Veta 1.1. *Nech konečná jednoduchá pologrupa E bez nuly, ktorej každý element je idempotent, je rádu $n \geqq 2$. Nech K je komutatívne teleso charakteristiky 0. Potom platí:*

1° *algebra $\mathfrak{A}_K(E)$ nie je polojednoduchá,*

2° *radikál $\mathfrak{R}$ algebry $\mathfrak{A}_K(E)$ je rádu $r = n - 1$.*

Dôkaz. Nech $E = \{e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{st}\}$ a nech $n = st \geqq 2$. Podľa vety 7 z [9] radikál $\mathfrak{R}$ algebry $\mathfrak{A}_K(E)$ tvoria tie a len tie elementy $\lambda_{11}e_{11} + \lambda_{12}e_{12} + \ldots + \lambda_{st}e_{st}$, ktorých súradnice $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \ldots, \lambda_{st}$ sú riešením systému rovníc

$$\begin{array}{l} \lambda_{11}\sigma_\Gamma(e_{11}e_{11}) + \lambda_{12}\sigma_\Gamma(e_{12}e_{11}) + \ldots + \lambda_{st}\sigma_\Gamma(e_{st}e_{11}) = 0\,, \\ \lambda_{11}\sigma_\Gamma(e_{11}e_{12}) + \lambda_{12}\sigma_\Gamma(e_{12}e_{12}) + \ldots + \lambda_{st}\sigma_\Gamma(e_{st}e_{12}) = 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{11}\sigma_\Gamma(e_{11}e_{st}) + \lambda_{12}\sigma_\Gamma(e_{12}e_{st}) + \ldots + \lambda_{st}\sigma_\Gamma(e_{st}e_{st}) = 0\,, \end{array} \qquad (1)$$

kde Γ znamená nejakú izomorfnú reprezentáciu algebry $\mathfrak{A}_K(E)$. Z takých istých dôvodov ako pri dôkaze vety 1 v [2] stačí predpokladať, že Γ je regu-

lárna reprezentácia algebry $\mathfrak{A}_K(E)$. Podľa lemmy 1.1 všetky elementy z E v regulárnej reprezentácii Γ majú rovnakú stopu: $\sigma_\Gamma(e_{ik}) = t \,.\, 1 \neq 0$. Z toho vyplýva, že determinant systému (1) (diskriminant algebry $\mathfrak{A}_K(E)$ v reprezentácii Γ) je rovný nule. Teda systém (1) má nenulové riešenie. To znamená, že radikál $\mathfrak{R}$ algebry $\mathfrak{A}_K(E)$ je rôzny od nulového ideálu, teda algebra $\mathfrak{A}_K(E)$ nie je polojednoduchá. Tým je prvé tvrdenie vety dokázané.

Aby sme našli radikál $\mathfrak{R}$, potrebujeme nájsť riešenie systému (1). Ako sme práve ukázali, tento systém má nenulové riešenie. Aspoň jedno z týchto riešení nájdeme veľmi ľahko. Z lemmy 1.1 totiž vyplýva, že všetky rovnice systému (1) sú rovnaké, t. j. systém (1) sa redukuje na jedinú rovnicu

$$\lambda_{11} + \lambda_{12} + \ldots + \lambda_{st} = 0\,.$$

To je jedna rovnica o st neznámych, má teda nekonečne mnoho riešení. Riešením je napr.: ľubovoľné $\lambda_{12}, \lambda_{13}, \ldots, \lambda_{st}$ a $\lambda_{11} = -\lambda_{12} - \lambda_{13} - \ldots - \lambda_{st}$. Teda každý element a radikálu $\mathfrak{R}$ sa dá vyjadriť v tvare

$$\begin{aligned} a &= (-\lambda_{12} - \lambda_{13} - \ldots - \lambda_{st})\, e_{11} + \lambda_{12}e_{12} + \lambda_{13}e_{13} + \ldots + \lambda_{st}e_{st} = \\ &= -\lambda_{12}(e_{11} - e_{12}) - \lambda_{13}(e_{11} - e_{13}) - \ldots - \lambda_{st}(e_{11} - e_{st}), \end{aligned}$$

teda každý element $a \in \mathfrak{R}$ sa dá vyjadriť ako lineárna kombinácia $st - 1$ elementov $e_{11} - e_{12}, e_{11} - e_{13}, \ldots, e_{11} - e_{st}$. Dokážeme, že tieto elementy sú lineárne nezávislé. Predpokladajme, že sú lineárne závislé. To znamená, že existujú také elementy $\varkappa_{12}, \varkappa_{13}, \ldots, \varkappa_{st} \in K$, z ktorých aspoň jeden je rôzny od nuly, že platí

$$\varkappa_{12}(e_{11} - e_{12}) + \varkappa_{13}(e_{11} - e_{13}) + \ldots + \varkappa_{st}(e_{11} - e_{st}) = 0\,,$$

t. j.

$$(\varkappa_{12} + \varkappa_{13} + \ldots + \varkappa_{st})\, e_{11} - \varkappa_{12}e_{12} - \ldots - \varkappa_{st}e_{st} = 0\,.$$

To však znamená, že elementy $e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{st}$ sú lineárne závislé, čo je však spor s predpokladom, že tieto elementy tvoria bázu algebry $\mathfrak{A}_K(E)$ a sú teda lineárne nezávislé. Tým je dokázané, že elementy $e_{11} - e_{12}, e_{11} - e_{13}, \ldots, e_{11} - e_{st}$ algebry $\mathfrak{A}_K(E)$ v počte $st - 1$ sú lineárne nezávislé a teda tvoria bázu radikálu $\mathfrak{R}$. Tým je veta dokázaná.

Dôsledok. *Faktorová algebra algebry $\mathfrak{A}_K(E)$ podľa radikálu $\mathfrak{R}$ je algebra rádu 1.*

Z toho a zo základných viet teórie reprezentácie algebier (pozri napr. [3], kap. 12) vyplýva:

Veta 1.2. *Konečná jednoduchá pologrupa E, ktorej každý element je idempotent, má v komutatívnom telese K charakteristiky 0 jedinú ireducibilnú reprezentáciu. Je to reprezentácia stupňa 1, v ktorej každému elementu $e_{ik} \in E$ prislúcha jednotka telesa K.*

Poznámka. Presne vzaté, pologrupa E má okrem reprezentácie uvedenej vo vete 1.2 ešte jednu ireducibilnú reprezentáciu, a to zobrazenie, v ktorom každému elementu z E odpovedá nula telesa K (nulová matica). Toto triviálne zobrazenie je však nezaujímavé a obvykle sa nepovažuje za reprezentáciu.

§ 2. Ireducibilné reprezentácie jednoduchej pologrupy S typu A

V predchádzajúcom paragrafe sme sa zaoberali špeciálnym prípadom jednoduchej pologrupy typu A. Výsledky tam dosiahnuté teraz zovšeobecníme pre prípad všeobecnej jednoduchej pologrupy typu A. Pomocou vety 3.2 z [1] a viet 3 a 4 z [2] ľahko dokážeme nasledujúce vety.

Veta 2.1. *Nech S je jednoduchá pologrupa typu A. Nech K je komutatívne teleso charakteristiky 0. Potom algebra $\mathfrak{A}_K(S)$ je polojednoduchá vtedy a len vtedy, ak S je grupa.*

Dôkaz.

a) Podmienka je postačujúca. Ak totiž S je grupa, tak podľa tzv. Maschkeho vety (pozri napr. [3]) algebra $\mathfrak{A}_K(S)$ je polojednoduchá.

b) Podmienka je nutná. Nech S nie je grupou, t. j. množina E jej idempotentov je pologrupa rádu $n \geqq 2$. Dokážeme, že v tom prípade algebra $\mathfrak{A}_K(S)$ nie je polojednoduchá.

Ak grupový komponent G pologrupy S je rádu $g = 1$, potom $S = E$ a podľa vety 1.1 algebra $\mathfrak{A}_K(S)$ nie je polojednoduchá. Ak $g \geqq 2$, potom podľa vety 3.2 z [1] platí

$$S \cong G \times E.$$

Z definície direktného súčinu pologrúp (pozri [1]) a z definície direktného súčinu algebier (pozri [2]) vyplýva: ak $S \cong S_1 \times S_2$, potom $\mathfrak{A}_K(S) \cong \mathfrak{A}_K(S_1) \times \mathfrak{A}_K(S_2)$. Teda pre algebry $\mathfrak{A}_K(S)$, $\mathfrak{A}_K(G)$ a $\mathfrak{A}_K(E)$ platí:

$$\mathfrak{A}_K(S) \cong \mathfrak{A}_K(G) \times \mathfrak{A}_K(E).$$

Podľa vety 1.1 algebra $\mathfrak{A}_K(E)$ nie je polojednoduchá. Z vety 4 z [2] však priamo vyplýva, že ani algebra $\mathfrak{A}_K(S)$ nie je polojednoduchá, č. b. t. d.

Pomocou vety 2 z [2] a vety 1.1 by sme teraz ľahko našli radikál algebry $\mathfrak{A}_K(S)$. Nám však postačí nájsť faktorovú algebru podľa radikálu. O tom hovorí:

Veta 2.2. *Nech S je jednoduchá pologrupa typu A, G jej grupový komponent a K komutatívne teleso charakteristiky 0. Potom platí*

$$\mathfrak{A}_K(S)/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{A}_K(G),$$

kde $\mathfrak{N}$ je radikál algebry $\mathfrak{A}_K(S)$.

Dôkaz. Ak S je grupa, je naše tvrdenie triviálne, pretože v tom prípade $\mathfrak{N} = (0)$ [znak (0) bude znamenať nulový ideál algebry]. Nech S nie je grupa, t. j. pologrupa E jej idempotentov je rádu $n \geqq 2$. Ak grupový komponent G pologrupy S je rádu $g = 1$, vtedy naše tvrdenie je totožné s druhým tvrdením vety 1.1 (pozri dôsledok vety 1.1). Ak $g \geqq 2$, tak podľa vety 3.2 z [1] platí

$$S \cong G \times E.$$

Ako bolo odôvodnené v dôkaze vety 2.1, pre algebry $\mathfrak{A}_K(S)$, $\mathfrak{A}_K(G)$, $\mathfrak{A}_K(E)$ platí

$$\mathfrak{A}_K(S) \cong \mathfrak{A}_K(G) \times \mathfrak{A}_K(E).$$

Ak označíme postupne $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ radikály algebier $\mathfrak{A}_K(S)$, $\mathfrak{A}_K(G)$, $\mathfrak{A}_K(E)$, tak podľa vety 3 z [2] platí

$$\mathfrak{A}_K(S)/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{A}_K(G)/\mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{A}_K(E)/\mathfrak{N}_2.$$

Ale algebra $\mathfrak{A}_K(G)$ je polojednoduchá, t. j. $\mathfrak{N}_1 = (0)$ a teda $\mathfrak{A}_K(G)/\mathfrak{N}_1 \cong \mathfrak{A}_K(G)$. Podľa vety 1.1 faktorová algebra $\mathfrak{A}_K(E)/\mathfrak{N}_2$ je algebra rádu 1. Na základe toho je zrejmé, že $\mathfrak{A}_K(G) \times \mathfrak{A}_K(E)/\mathfrak{N}_2 \cong \mathfrak{A}_K(G)$, teda je $\mathfrak{A}_K(S)/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{A}_K(G)/\mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{A}_K(E)/\mathfrak{N}_2 \cong \mathfrak{A}_K(G) \times \mathfrak{A}_K(E)/\mathfrak{N}_2 \cong \mathfrak{A}_K(G)$, č. b. t. d.

Z dokázanej vety a zo známych základných viet o reprezentácii algebier (pozri napr. [3], kap. 12) vyplýva nasledujúca veta o reprezentácii jednoduchej pologrupy S typu A.

Veta 2.3. *Nech S je jednoduchá pologrupa typu A, G jej grupový komponent a K komutatívne teleso charakteristiky 0. Potom každý ireducibilný priestor reprezentácie pologrupy S v telese K je izomorfný s niektorým ireducibilným priestorom reprezentácie grupy G v telese K a naopak.*

Dôsledok. *Jednoduchá pologrupa S typu A má v komutatívnom telese K charakteristiky 0 práve toľko neekvivalentných ireducibilných reprezentácií ako jej grupový komponent G.*

Problém nájsť všetky ireducibilné reprezentácie jednoduchej pologrupy S typu A sa teda redukuje na problém nájsť všetky ireducibilné reprezentácie jej grupového komponentu G. Otázka je, ako dostaneme ireducibilnú reprezentáciu pologrupy S, ak poznáme ireducibilnú reprezentáciu grupy G. Nech napr. zobrazenie $G \sim G^*$ je ireducibilná reprezentácia grupového komponentu G. Keďže S je súčtom navzájom izomorfných disjunktných grúp: $S = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{t} G_{ik}$ (pozri napr. [1]) a $G \cong G_{ik}$, je prirodzený napr. takýto postup: Zobrazím najprv jednu z grúp G_{ik}, napr. grupu G_{11} homomorfne na G^* (to je vždy možné, pretože $G_{11} \cong G$ a $G \sim G^*$). Otázka je, ako zobrazíme prvky ostatných grúp G_{ik}. Je zrejmé, že prvok $a_{ik} \in G_{ik}$ môžeme zobraziť iba na takú maticu, na ktorú sa v zobrazení $G_{11} \sim G^*$ zobrazí ten prvok grupy G_{11}, ktorý v nejakom izomorfizme $G_{ik} \cong G_{11}$ odpovedá prvku a_{ik}. Avšak izomorfných zobrazení G_{ik} na G_{11} môže vo všeobecnosti existovať viac. Na prvý pohľad by sa preto mohlo zdať, že z jednej ireducibilnej reprezentácie grupy G by sme mohli utvoriť viac ireducibilných reprezentácií pologrupy S. To by však odporovalo vete 2.3. Ukážeme, že v tom prípade zo všetkých možných izomorfizmov môžeme použiť len jeden.

V [1] je dokázané, že zobrazenie

$$x_{11} \longleftrightarrow x_{ik} = e_{ik} x_{11} e_{i1}$$

grupy G_{11} na ľubovoľnú grupu G_{ik} je izomorfizmus. Bude výhodné dať tým elementom pologrupy S, ktoré si v tomto izomorfizme navzájom odpovedajú, zvláštne pomenovanie.

Definícia. Nech $S = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{t} G_{ik}$ je konečná jednoduchá pologrupa bez nuly, nech x_{11} je ľubovoľný element z G_{11}. Potom element $x_{ik} = e_{ik} x_{11} e_{i1} \in G_{ik}$ nazveme *elementom príbuzným* s x_{11}. Dva elementy príbuzné s x_{11} budeme nazývať *navzájom príbuznými elementami*. Množinu všetkých navzájom príbuzných elementov nazveme *triedou navzájom príbuzných elementov*.

Je zrejmé, že v zmysle tejto definície element x_{11} je príbuzný s x_{11} a že celá pologrupa S sa takto rozpadne na g disjunktných tried príbuzných elementov, kde g je rád grupového komponentu G.

Nech x_{ik}, x_{jl} sú ľubovoľné dva navzájom príbuzné elementy jednoduchej pologrupy S typu A. Uvažujme element $x_{ik} - x_{jl}$ algebry $\mathfrak{A}_K(S)$. Priamo sa môžeme presvedčiť (berúc do úvahy vetu 1.8 z [1]), že platí

$$(x_{ik} - x_{jl})^3 = 0, \tag{1}$$

t. j. element $x_{ik} - x_{jl} \in \mathfrak{A}_K(S)$ je nilpotentný. Ukážeme, že je vlastne nilpotentný.

Nech $y_{\mu\nu}$ je ľubovoľný element pologrupy S. Potom na základe vety 1.8 z [1] je $(x_{ik} - x_{jl}) y_{\mu\nu} = x_{ik} y_{\mu\nu} - x_{jl} y_{\mu\nu} = x_{\mu k} y_{\mu k} - x_{\mu l} y_{\mu l} = z_{\mu k} - z_{\mu l}$. Elementy $z_{\mu k}$, $z_{\mu l}$ sú navzájom príbuzné, teda podľa (1) platí $(z_{\mu k} - z_{\mu l})^3 = 0$, teda aj $[(x_{ik} - x_{jl}) y_{\mu\nu}]^3 = 0$. Z toho vyplýva, že pre ľubovoľný element $a \in \mathfrak{A}_K(S)$ platí

$$[(x_{ik} - x_{jl}) a]^3 = 0,$$

čo však znamená, že element $x_{ik} - x_{jl} \in \mathfrak{A}_K(S)$ je vlastne nilpotentný a teda patrí do radikálu $\mathfrak{R}$ algebry $\mathfrak{A}_K(S)$:

$$x_{ik} - x_{jl} \in \mathfrak{R}. \tag{2}$$

To znamená, že dva navzájom príbuzné elementy x_{ik}, x_{jl} patria do jednej zvyškovej triedy mod $\mathfrak{R}$.

Nech Γ je nejaká ireducibilná reprezentácia algebry $\mathfrak{A}_K(S)$ a nech v tejto reprezentácii elementom x_{ik}, x_{jl} prislúchajú matice X_{ik}, X_{jl}, t. j.

$$x_{ik} \to X_{ik}, \quad x_{jl} \to X_{jl}$$

$$x_{ik} - x_{jl} \to X_{ik} - X_{jl}. \tag{3}$$

Ako je známe (pozri napr. [3]) v ireducibilnej reprezentácii každý element radikálu $\mathfrak{R}$ sa zobrazí na nulovú maticu. Z toho a z (2) a (3) vyplýva:

$$X_{ik} - X_{jl} = O,$$

t. j.

$$X_{ik} = X_{jl}.$$

Tým je dokázaná

Veta 2.4. *V každej ireducibilnej reprezentácii Γ jednoduchej pologrupy S typu A v komutatívnom telese K charakteristiky 0 všetkým navzájom príbuzným elementom pologrupy S odpovedá tá istá matica (t. j. celá trieda navzájom príbuzných elementov sa zobrazí na jednu maticu).*

Na základe vety 2.3 problém nájsť všetky ireducibilné reprezentácie jednoduchej pologrupy S typu A v komutatívnom telese charakteristiky 0 sa redukuje na problém nájsť v tomto telese všetky ireducibilné reprezentácie jej grupového komponentu G. Ak poznáme všetky ireducibilné reprezentácie grupy G, tak na základe vety 2.4 poznáme aj všetky ireducibilné reprezentácie pologrupy S.

LITERATÚRA

[1] J. Ivan, O rozklade jednoduchých pologrúp na direktný súčin, Matematicko-fyzikálny časopis SAV IV (1954), 181—202.
[2] J. Ivan, Radikál a polojednoduchosť direktného súčinu algebier, Matematicko-fyzikálny časopis SAV VII (1957), 158—167.
[3] R. Kochendörfer, Einführung in die Algebra, Berlin 1955.
[4] M. Teissier, Sur l'algèbre d'un demi-group fini simple, C. R. Acad. Sci., Paris 234 (1952), 2413—14 a 2511—13.
[5] И. С. Понизовский, О матричных представлениях ассоциативных систем, Матем. сб. 38 (80) (1956), 241—260.
[6] W. D. Munn, On semigroup algebras, Proc. of Cambr. Phil., Soc. 51 (1955), 1—15.
[7] A. H. Clifford, Matrix representation of completely simple semigroups, Amer. J. Math. 64 (1942), 327—342.
[8] Š. Schwarz, Teória pologrúp, Sborník prác Prírodovedeckej fakulty Slovenskej univerzity v Bratislave 6 (1943), 1—64.
[9] Н. Г. Чеботарев, Введение в теорию алгебр, Москва 1949.

Došlo 29. 4. 1957.

Katedra matematiky Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave

О МАТРИЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ПРОСТЫХ ПОЛУГРУПП

ЯН ИВАН

Выводы

Полугруппа называется *простой*, если она не имеет нетривиальных двусторонних идеалов. Как известно, конечная простая полугруппа S без нуля имеет следующую структуру (см. напр. [1], § 1):

$$S = \sum_{i=1}^{s} L_i = \sum_{k=1}^{t} R_k = \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{t} G_{ik},\ L_i = \sum_{k=1}^{t} G_{ik},\ R_k = \sum_{i=1}^{s} G_{ik},\ G_{ik} = L_i \cap R_k,$$

Σ значит сумму множеств, не имеющих общих элементов, L_i (R_k) минимальные левые (правые) идеалы полугруппы S и G_{ik} попарно изоморфные группы. Мы говорим, что эти группы G_{ik} и абстрактная группа $G \cong G_{ik}$ *групповые компоненты* полугруппы S. Каждый идемпотент $e_{ik} \in S$ является единицей группы G_{ik}. Пусть E значит множество всех идемпотентов $e_{ik} \in S$. Если E является подполугруппой полугруппы S (т. е. произведение произвольных двух идемпотентов тоже идемпотент), то полугруппу S мы называем *простой полугруппой типа A*; в противном случае мы говорим о *простой полугруппе типа B*. В этой работе дается простое доказательство нескольких теорем о матричном представлении простых полугрупп типа A. Настоящие россуждения опираются на работы [1], [2].

Пусть S конечная полугруппа и пусть K произвольное поле; *алгеброй* $\mathfrak{A}_K(S)$ *полугруппы* S над полем K называется линейная ассоциативная алгебра над K, базисными элементами которой являются элементы полугруппы S.

В § 1 исследуется алгебра $\mathfrak{A}_K(E)$ полугруппы E — множества всех идемпотентов простой полугруппы S типа A. Полугруппа E является тоже простой полугруппой без нуля (см. [1]). При помощи свойств следов элементов в регулярном представлении алгебры $\mathfrak{A}_K(E)$ доказана следующая теорема:

Теорема 1.1. *Пусть E — конечная простая полугруппа без нуля порядка $n \geq 2$, каждый элемент которой идемпотент. Пусть K — поле характеристики нуль. Потом:*
1° алгебра $\mathfrak{A}_K(E)$ не является полупростой,
2° порядок r радикала $\mathfrak{R}$ алгебры $\mathfrak{A}_K(E)$ есть $r = n - 1$.

Следствие: *Факторалгебра $\mathfrak{A}_K(E)/\mathfrak{R}$ — алгебра порядка 1.*

Из этой теоремы и из фундаментальных теорем теории представлений алгебр следует:

Теорема 1.2. *Конечная простая полугруппа E без нуля, каждый элемент которой идемпотент, имеет в поле K характеристики нуль только одно неприводимое представление. В этом представлении каждый элемент из E отображается на единицу поля K.*

В § 2 мы даем обобщение теоремы 1.1 Пусть S — простая полугруппа типа A. По теореме 3.2 из [1] имеет место:

$$S \cong G \times E, \tag{1}$$

G — групповый компонент полугруппы S, E — множество всех идемпотентов из S. Из определения прямого произведения полугрупп (см. [1]) и из определения прямого произведения алгебр (см. [2]) следует: если $S \cong S_1 \times S_2$, потом $\mathfrak{A}_K(S) \cong \mathfrak{A}_K(S_1) \times \mathfrak{A}_K(S_2)$. Поэтому из (1) следует:

$$\mathfrak{A}_K(S) \cong \mathfrak{A}_K(G) \times \mathfrak{A}_K(E). \tag{2}$$

По теореме 4 из [1] алгебра $\mathfrak{A}_K(S)$ полупроста тогда и только тогда, когда обе алгебры $\mathfrak{A}_K(G)$, $\mathfrak{A}_K(E)$ полупростые. Если E есть алгебра порядка $n \geq 2$ (т. е. S не является группой), то по теореме 1.1 алгебра $\mathfrak{A}_K(E)$ не является полупростой и поэтому алгебра $\mathfrak{A}_K(S)$ не является тоже полупростой. Из этого следует:

Теорема 2.1. *Пусть S — простая полугруппа типа A и пусть K — поле характеристики нуль. Потом алгебра $\mathfrak{A}_K(S)$ полупроста тогда и только тогда, когда S группа.*

Далее, из (2) пользуясь теоремой 1.1 и теоремой 3 из [2] получаем:

Теорема 2.2. *Пусть S — простая полугруппа типа A и пусть G её групповый компонент. Пусть K — поле характеристики нуль. Потом имеет место:*

$$\mathfrak{A}_K(S)/\mathfrak{R} \cong \mathfrak{A}_K(G),$$

где $\mathfrak{R}$ значит радикал алгебры $\mathfrak{A}_K(S)$.

Из этой теоремы и из фундаментальных теорем теории представлений следует:

Теорема 2.3. *Пусть S — простая полугруппа типа A, пусть G — ей групповый компонент и пусть K — поле характеристики нуль. Потом каждый неприводимый модуль представления полугруппы S в поле K изоморфный с некоторым неприводимым модулем представления группы G в поле K и обратно.*

Следствие: *Число неэквивалентных неприводимых представлений простой полугруппы S типа A в поле K характеристики нуль ровно числу неэквивалентных неприводимых представлений её группового компонента G в поле K.*

Наконец доказана следующая теорема:

Теорема 2.4. *Пусть Γ неприводимое представление простой полугруппы $S = \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{t} G_{ik}$ типа A в поле K характеристики нуль. Пусть $x_{11} \in G_{11}$. Потом в представлении Γ все элементы $x_{ik} = e_{ik}x_{11}e_{i1}$ отображаются на одну матрицу.*

Отображение $x_{11} \to x_{ik} = e_{ik}x_{11}e_{i1}$ группы G_{11} в группу G_{ik} изоморфно (см. напр. [1]).

Выражения: представление, модуль представления, регулярное представление, неприводимое (приводимое, вполне приводимое) представление имеют обычный смысл (см. напр. [3]).

Главный результат этой стати — теоремы 2.1 и 2.2. Отметим, что эти результаты уже известны; новый только метод исследования. Эти теоремы содержит напр. работа [4]. Теорему 2.1 содержат тоже работы [5], [6] как следствие более общих теорем об алгебре конечной полугруппы S.

ON THE MATRIX REPRESENTATIONS OF SIMPLE SEMIGROUPS

JÁN IVAN

Summary

A semigroup is called *simple* if it does not contain non-trivial two-sided ideals. It is known that the finite simple semigroup S without zero has the following structure (see e. g. [1], § 1):

$$S = \sum_{i=1}^{s} L_i = \sum_{k=1}^{t} R_k = \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{t} G_{ik},\ L_i = \sum_{k=1}^{t} G_{ik},\ R_k = \sum_{i=1}^{s} G_{ik},\ G_{ik} = L_i \cap R_k,$$

Σ designates here the sum of disjoint sets, $L_i(R_k)$ are the minimal left (right) ideals of S, G_{ik} are groups isomorphic together. We call the groups G_{ik} and the abstract group $G \cong G_{ik}$ *group-components* of S. Every idempotent $e_{ik} \in S$ is the identity of the group G_{ik}. Let E be the set of all idempotents $e_{ik} \in S$. If E is a subsemigroup of S (i. e. the product of any two idempotents is idempotent) then we call S *simple semigroup of the type A*; if E is not a subsemigroup of S then S is called *simple semigroup of the type B*. In this paper we give simple proofs of several theorems on matrix representations of simple semigroups of type A. The starting point of the present investigations are the papers [1], [2].

If S is a finite semigroup and K is a field, the *semigroup algebra* $\mathfrak{A}_K(S)$ *(algebra of S over K)* is the linear associative algebra over K having the elements of S as a basis.

In § 1 we discuss the algebra $\mathfrak{A}_K(E)$ of semigroup E consisting of all idempotents of a simple semigroup S of type A. The semigroup E is also simple without zero (see [1]). Using the properties of the traces of elements in the regular representation of $\mathfrak{A}_K(E)$ the following theorem is proved:

Theorem 1,1. *Let E be a finite simple semigroup without zero of order $n \geqq 2$, every element of which is idempotent. Let K be a field of characteristic zero. Then there holds:*

1° *the algebra $\mathfrak{A}_K(E)$ is not semisimple,*

2° *the radical $\mathfrak{N}$ of the algebra $\mathfrak{A}_K(E)$ is of order $r = n - 1$.*

Corollary: *The factor algebra $\mathfrak{A}_K(E)/\mathfrak{N}$ is an algebra of order 1.*

This theorem and the fundamental theorems of the theory of representation of algebras imply:

Theorem 1.2. *A finite simple semigroup E without zero, every element of which is idempotent, has in a field K of characteristic zero an unique irreducible representation. In this representation every element of E corresponds to the identity of K.*

In § 2 we give a generalisation of Theorem 1.1. Let S be a simple semigroup of the type A. According to Theorem 3.2 in [1] holds:

$$S \cong G \times E, \tag{1}$$

G is group-component of S, E is a semigroup consisting of all idempotents of S. From the definition of direct product of semigroups (see [1]) and from the definition of direct product of algebras (see [2]) follows: if $S \cong S_1 \times S_2$ then $\mathfrak{A}_K(S) \cong \mathfrak{A}_K(S_1) \times \mathfrak{A}_K(S_2)$. Then from (1) follows:

$$\mathfrak{A}_K(S) \cong \mathfrak{A}_K(G) \times \mathfrak{A}_K(E). \tag{2}$$

According to Theorem 4 in [2] algebra $\mathfrak{A}_K(S)$ is semisimple if and only if both $\mathfrak{A}_K(G)$ and $\mathfrak{A}_K(E)$ are semisimple. If E is of order $n \geqq 2$ (i. e. S is not a group), then according to Theorem 1.1 the algebra $\mathfrak{A}_K(E)$ is not semisimple and hence the algebra $\mathfrak{A}_K(S)$ is not semisimple. From that follows:

Theorem 2.1. *Let S be a simple semigroup of the type A, let K be a field of characteristic zero. Then the algebra $\mathfrak{A}_k$ (S) is semisimple if and only if S is a group.*

Further from (2), Theorem 1.1 and Theorem 3 in [2] follows:

Theorem 2.2. *Let S be a simple semigroup of the type A and G a group-component of S. Let K be a field of characteristic zero. Then holds:*

$$\mathfrak{A}_K(S)/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{A}_K(G),$$

$\mathfrak{N}$ is the radical of $\mathfrak{A}_K(S)$.

This theorem and the fundamental theorems of representation theory imply:

Theorem 2.3. *Let S be a simple semigroup of the type A, G the group-component of S and K a field of characteristic zero. Then every irreducible representation space of S in K is isomorphic with one of the irreducible representation spaces of G in K, and vice versa.*

Corollary: *The number of inequivalent irreducible representations of a simple semigroup S of the type A in a field K of characteristic zero is equal to the number of inequivalent irreducible representations of their group-component G in K.*

Finally, the following theorem is proved:

Theorem 2.4. *Let Γ be an irreducible representation of the simple semigroup $S = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{t} G_{ik}$ of the type A in a field K of characteristic zero. Let $x_{11} \in G_{11}$. Then in the representation Γ every element $x_{ik} = e_{ik}\, x_{11} e_{i1} \in G_{ik}$ corresponds to an unique matrix.*

The mapping $x_{11} \to x_{ik} = e_{ik}\, x_{11} e_{i1}$ of G_{11} onto G_{ik} is isomorphic (see e. g. [1]).

The concepts representation, representation space, regular representation, irreducible (reducible, completely reducible) representation are used in the usual sense (see e. g. [3]).

The main result of this paper are the theorems 2.1 and 2.2. We remark that this results are already known; only the method of the investigation is new. The theorems 2.1 and 2.2 are contained in the paper [4]. The theorem 2.1 is contained also in [5] and [6] as a corollary of the general theorems on algebra of a finite semigroup S.