MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, VIII, 1 – 1958

O MAXIMÁLNOM SPOLOČNOM ZJEMNENÍ A MINIMÁLNOM SPOLOČNOM ZÁKRYTE DVOCH TOPOLOGICKÝCH FAKTOROIDOV

ROBERT ŠULKA, Bratislava

V článku [4] som sa zaoberal zákrytom topologického faktoroidu. Pretože je známe, že najväčšie spoločné zjemnenie a najmenší spoločný zákryt dvoch faktoroidov sú faktoroidmi (pozri [1]), vyskytla sa tu otázka, či aj najväčšie spoločné zjemnenie a najmenší spoločný zákryt dvoch topologických faktoroidov (pozri [3]) sú topologickými faktoroidmi. Riešenie tejto otázky je predmetom tejto práce.

Väčšinou som zachoval označenia z článku [4]. $a, b, x, y, z, \ldots$ sú prvkami topologického priestoru G, Σ je jeho úplný systém okolí a $U, V, W, \ldots$ sú okolia zo Σ; $[G]_1$ a $[G]_2$ budú rozklady na G, $A_1, B_1, X_1, Y_1, Z_1, \ldots$ budú triedy z $[G]_1$, $A_2, B_2, X_2, Y_2, Z_2, \ldots$ triedy z $[G]_2$, Σ_1 nech je úplný systém okolí topologického priestoru $[G]_1$ a Σ_2 nech je úplný systém okolí topologického priestoru $[G]_2$; $U_1, V_1, W_1, \ldots$ nech sú okolia zo Σ_1 a $U_2, V_2, W_2, \ldots$ zo Σ_2. $[G]_{12}$ nech značí najväčšie spoločné zjemnenie a $\{G\}_{12}$ nech značí najmenší spoločný zákryt rozkladov $[G]_1$ a $[G]_2$. Triedy z $[G]_{12}$ a $\{G\}_{12}$ budeme značiť $A, B, X, Y, Z, \ldots$, úplný systém okolí topologických priestorov $[G]_{12}$ a $\{G\}_{12}$ označíme Σ^* a okolia zo Σ^* nech sú $U^*, V^*, W^*, \ldots$

Každá trieda najväčšieho spoločného zjemnenia $[G]_{12}$ rozkladov $[G]_1$ a $[G]_2$ je prenikom jednej triedy $X_1 \in [G]_1$ a jednej triedy $X_2 \in [G]_2$ (pozri [1]).

Nech ďalej ${}^1X_1$ a ${}^\alpha X_1$ (α konečné celé číslo, $\alpha > 1$) sú také triedy z $[G]_1$, že k nim existujú triedy ${}^\alpha X_1, {}^{(\alpha-1)}X_1, \ldots, {}^2X_1, {}^1X_1$ z $[G]_1$ a triedy ${}^{(\alpha-1)}X_2, {}^{(\alpha-2)}X_2, \ldots, {}^2X_2, {}^1X_2$ z $[G]_2$, kde ${}^\nu X_2 \cap {}^\nu X_1 \neq \emptyset$ a ${}^\nu X_2 \cap {}^{(\nu+1)}X_1 \neq \emptyset$ pre $\nu = 1, 2, \ldots, \alpha - 1$. Potom hovoríme, že triedy ${}^1X_1$ a ${}^\alpha X_1$ sa dajú spojiť reťazcom ${}^\alpha X_1, {}^{(\alpha-1)}X_1, \ldots, {}^2X_1, {}^1X_1$ v rozklade $[G]_2$. Každá trieda najmenšieho spoločného zákrytu $\{G\}_{12}$ rozkladov $[G]_1$ a $[G]_2$ je zjednotením všetkých tried rozkladu $[G]_1$, ktoré sa dajú spojiť nejakým reťazcom v $[G]_2$ s tou istou triedou $X_1 \in [G]_1$ (pozri [1]).

Najsamprv uvediem príklad, z ktorého vyplýva, že ak $[G]_1$ a $[G]_2$ sú dva topologické rozklady na topologickom grupoide G pri úplnom systéme okolí Σ, najväčšie spoločné zjemnenie týchto rozkladov nemusí byť topologickým rozkladom na G pri úplnom systéme okolí Σ.

Príklad 1. Nech $G_{(i)}$ (pre $i = 1, 2$) je množinou všetkých reálnych čísel $\xi_i > 0$. Nech operácia násobenia v $G_{(i)}$ je definovaná takto: $\alpha_i\beta_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$. Okolím z úplného systému okolí $\Sigma_{(i)}$ v $G_{(i)}$ nech je každá množina prvkov ξ_i, $0 \leqq \alpha_i < \xi_i < \beta_i$, pričom $\alpha_i < \beta_i$. Potom zrejme je $G_{(i)}$ topologickým grupoidom pri takto definovanom násobení a pri úplnom systéme okolí $\Sigma_{(i)}$. Podľa pomocnej vety z článku [5] je aj kartézsky súčin $G = G_{(1)} \times G_{(2)}$ (topologických grupoidov $G_{(1)}$ a $G_{(2)}$) topologickým grupoidom.

Definujeme rozklad $[G]_1$ na G. Označme znakom $X_1(\xi)$ množinu všetkých prvkov (ξ, ξ_2), $\xi_2 > 0$. Všetky množiny $X_1(\xi)$ dávajú rozklad na G, ktorý označíme $[G]_1$. Ľahko sa dá zistiť, že tento rozklad je vytvárajúcim rozkladom.

Ďalej označme znakom $X_2(\xi)$ množinu všetkých prvkov (ξ, ξ_2), $0 < \xi_2 \leqq \xi$ a všetkých prvkov (ξ_1, ξ), $0 < \xi_1 \leqq \xi$. Všetky množiny $X_2(\xi)$ sú triedami rozkladu na G, ktorý označíme $[G]_2$. Podobne ako pri rozklade $[G]_1$ sa aj v tomto prípade dá ľahko ukázať, že $[G]_2$ je vytvárajúcim rozkladom.

Zrejme je aj $[G]_i$ (pre $i = 1, 2$) topologickým rozkladom v G. Napriek tomu, nie je najväčšie spoločné zjemnenie $[G]_{12}$ topologických rozkladov $[G]_1$ a $[G]_2$, topologickým rozkladom na G pri úplnom systéme okolí Σ. Každá trieda X rozkladu $[G]_{12}$ je síce uzavretá množina v G (triedy z $[G]_{12}$ sú totiž jednak množiny, obsahujúce jediný prvok $(\xi_1, \xi_2) \in G$, $\xi_1 < \xi_2$, jednak sú to množiny prvkov (ξ, ξ_2), $0 < \xi_2 \leqq \xi$), no ukážeme, že $\bigcup_{X \cap U \neq \emptyset} X$ $(U \in \Sigma)$ nie je pre každé U otvorená množina v G.

Nech U je množina všetkých prvkov (ξ_1, ξ_2), $1 < \xi_1 < 2$, $0 < \xi_2 < 1$. $\bigcup_{X \cap U \neq \emptyset} X$ je v tomto prípade množina všetkých prvkov (ξ, ξ_2), $0 < \xi_2 \leqq \xi$, $1 < \xi < 2$ a táto množina nie je otvorená, pretože obsahuje hraničné prvky (ξ, ξ), $1 < \xi < 2$.

Veta 1. *Nech $[G]_1$ a $[G]_2$ sú topologické rozklady na topologickom priestore G pri úplnom systéme okolí Σ. Nevyhnutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby najväčšie spoločné zjemnenie $[G]_{12}$ rozkladov $[G]_1$ a $[G]_2$ bolo topologickým rozkladom na topologickom priestore G pri úplnom systéme okolí Σ je, aby $\bigcup_{X \cap U \neq \emptyset} X$ bola otvorenou množinou v G pre každé $U \in \Sigma$.*

Dôkaz. Nevyhnutnosť tejto podmienky je zrejmá z definície topologického rozkladu. Ukážeme teraz, že táto podmienka je aj postačujúca. To vyplýva z toho, že každá trieda $X \in [G]_{12}$ je prenikom jednej triedy $X_1 \in [G]_1$ a jednej triedy $X_2 \in [G]_2$, teda $X = X_1 \cap X_2$. Pretože $[G]_1$ a $[G]_2$ sú topologické rozklady, je X_1 aj X_2 uzavretá množina a X ako ich prenik je tiež uzavretá.

Veta 2. *Nech $[G]_1$ a $[G]_2$ sú topologické faktoroidy na topologickom grupoide G pri úplnom systéme okolí Σ. Nevyhnutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby najväčšie spoločné zjemnenie $[G]_{12}$ topologických faktoroidov $[G]_1$ a $[G]_2$ bolo topologickým faktoroidom na topologickom grupoide G pri úplnom systéme okolí Σ je, aby $\bigcup_{X \cap U \neq \emptyset} X$ bola otvorenou množinou v G pre každé $U \in \Sigma$.*

Dôkaz vyplýva z vety 1 a z toho, že najväčšie zjemnenie $[G]_{12}$ je faktoroidom (pozri [1]).

Príklad 2. Nech $G_{(i)}$ $(i = 1, 2)$ sú množiny reálnych čísel $\xi_i > 0$ $(i = 1, 2)$. Tieto množiny sú pri operácii sčítania reálnych čísel grupoidmi. Nech $U_{(i)}$ je množina všetkých reálnych čísel ξ_i, $0 \leqq \alpha_i < \xi_i < \beta_i$ pre $i = 1, 2$ $(\alpha_i, \beta_i \geqq 0$, $\alpha_i < \beta_i$ reálne čísla). Systém všetkých množín $U_{(i)}$ označme $\Sigma_{(i)}$ pre $i = 1, 2$. $G_{(i)}$ je potom topologickým priestorom pri úplnom systéme okolí $\Sigma_{(i)}$ a ľahko sa dá zistiť, že je aj topologickým grupoidom pri úplnom systéme okolí $\Sigma_{(i)}$. Potom podľa pomocnej vety z článku [5] je aj kartézsky súčin $G = G_{(1)} \times G_{(2)}$ (topologických grupoidov $G_{(1)}$ a $G_{(2)}$) topologickým grupoidom.

Definujme teraz rozklady $[G]_1$ a $[G]_2$ na G. Ku každej usporiadanej dvojici (ξ_1, ξ_2), $0 < \xi_i \leqq 1$ $(i = 1, 2)$ priraďme triedu $X_1(\xi_1, \xi_2) = \{(\xi_1 + k, \xi_2 + l) \mid k, l = 0, 1, 2, \ldots\}$. Všetky triedy $X_1(\xi_1, \xi_2)$ tvoria potom rozklad na G, ktorý označíme $[G]_1$. Ďalej ku každému prvku $\xi_1 > 0$ priraďme triedu $X_2(\xi_1) = \{(\xi_1, \xi_2) \mid \xi_2 > 0\}$. Triedy $X_2(\xi_1)$ tvoria tiež rozklad na G, ktorý budeme značiť $[G]_2$. Rozklady $[G]_1$ a $[G]_2$ sú zrejme topologickými rozkladmi na G. Ľahko sa dá ukázať, že $[G]_2$ je vytvárajúcim rozkladom. Dokážeme teraz, že aj $[G]_1$ je vytvárajúcim rozkladom. Za tým účelom nech $A_1(\alpha_1, \alpha_2) = \{(\alpha_1 + k, \alpha_2 + l) \mid k, l = 0, 1, 2, \ldots\}$ a $B_1(\beta_1, \beta_2) = \{(\beta_1 + m, \beta_2 + n) \mid m, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ sú dve triedy z $[G]_1$. A_1B_1 je množinou prvkov $((\alpha_1 + \beta_1) + (k + m), (\alpha_2 + \beta_2) + (l + n)) = (\gamma_1 + r, \gamma_2 + s)$, kde $0 < \gamma_1 \leqq 1$, pričom $\gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, keď $\alpha_1 + \beta_1 \leqq 1$, a $\gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1 - 1$, $r = 1, 2, \ldots$, keď $\alpha_1 + \beta_1 > 1$, ďalej $0 < \gamma_2 \leqq 1$, pričom $\gamma_2 = \alpha_2 + \beta_2$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, keď $\alpha_2 + \beta_2 \leqq 1$ a $\gamma_2 = \alpha_2 + \beta_2 - 1$, $s = 1, 2, \ldots$, keď $\alpha_2 + \beta_2 > 1$. Preto $A_1B_1 \subset C_1(\gamma_1, \gamma_2) = \{(\gamma_1 + r, \gamma_2 + s) \mid r, s = 0, 1, 2, \ldots\}$ a rozklad $[G]_1$ je skutočne vytvárajúci.

Ku každému $\xi_1 > 0$ a ξ_2, $0 < \xi_2 \leqq 1$ môžeme priradiť jednu triedu najväčšieho zjemnenia $[G]_{12}$ (rozkladov $[G]_1$ a $[G]_2$), $X(\xi_1, \xi_2) = \{(\xi_1, \xi_2 + k) \mid k = 0, 1, 2, \ldots\}$. Je zrejmé, že v tomto prípade je splnená podmienka vety 1, a preto $[G]_{12}$ je topologickým rozkladom na G. Pretože $[G]_1$ a $[G]_2$ sú v našom prípade tiež topologickými faktoroidmi na G, je ním podľa vety 2 aj $[G]_{12}$.

Nasledujúci príklad ukazuje, že ak $[G]_1$ a $[G]_2$ sú topologické rozklady na topologickom grupoide G pri úplnom systéme okolí Σ, nemusí byť najmenší spoločný zákryt týchto rozkladov topologickým rozkladom.

Príklad 3. Nech $G_{(1)}$ je rovnako označený topologický grupoid z príkladu 1. Nech $G_{(2)}$ je množina reálnych čísel ξ_2, $0 < \xi_2 < 1$. Násobenie v $G_{(2)}$ nech je definované tak ako v $G_{(1)}$, teda $\alpha_2\beta_2 = \max(\alpha_2, \beta_2)$. Okolím z úplného systému okolí $\Sigma_{(2)}$ v $G_{(2)}$ nech je každá množina prvkov ξ_2, $0 \leqq \alpha_2 < \xi_2 < \beta_2 \leqq 1$. Pri tomto násobení a úplnom systéme okolí je zrejme $G_{(2)}$ topologickým grupoidom. Podľa pomocnej vety z článku [5] je aj kartézsky súčin $G = G_{(1)} \times G_{(2)}$ topologickým grupoidom.

Ďalej budeme definovať rozklady $[G]_1$ a $[G]_2$ na G. Nech $X_1(\xi)$ je množina všetkých prvkov (ξ, ξ_2), $0 < \xi_2 < 1$. Tieto množiny nech sú triedami rozkladu, ktorý označíme $[G]_1$. $X_2(\xi)$ nech znamená množinu všetkých prvkov (ξ, ξ_2), $0 < \xi_2 \leqq \xi < 1$ a všetkých prvkov (ξ_1, ξ), $0 < \xi_1 \leqq \xi < 1$. Pre $\xi \geqq 1$ nech $X_2(\xi)$ znamená množinu všetkých prvkov (ξ, ξ_2), $0 < \xi_2 < 1$. Všetky množiny $X_2(\xi)$ tvoria rozklad na G, ktorý budeme označovať $[G]_2$.

Ľahko možno zistiť, že $[G]_1$ a $[G]_2$ sú vytvárajúce a topologické rozklady na G. No napriek tomu najmenší spoločný zákryt $\{G\}_{12}$ topologických rozkladov $[G]_1$ a $[G]_2$ nie je topologickým rozkladom na G. Množina všetkých prvkov (ξ_1, ξ_2), $0 < \xi_1 < 1$, $0 < \xi_2 < 1$ je totiž jednou z tried zákrytu $\{G\}_{12}$, no táto množina nie je uzavretá v G, pretože neobsahuje hraničné prvky $(1, \xi_2)$, $0 < \xi_2 < 1$. Pritom však predsa pre každé $U \in \Sigma$ je $\bigcup_{X \cap U \neq \emptyset} X$ $(X \in \{G\}_{12})$ otvorená množina v G.

Veta 3. *Nech $[G]_1$ a $[G]_2$ sú topologické rozklady na topologickom priestore G pri úplnom systéme okolí Σ. Nevyhnutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby najmenší spoločný zákryt $\{G\}_{12}$ topologických rozkladov $[G]_1$ a $[G]_2$ bol topologickým rozkladom na topologickom priestore G pri úplnom systéme okolí Σ je, aby každá trieda $X \in \{G\}_{12}$ bola uzavretá množina v G.*

Dôkaz. Nevyhnutnosť tejto podmienky je zrejmá z definície topologického rozkladu. Aby sme dokázali, že táto podmienka je aj postačujúcou, stačí ukázať, že $\bigcup_{X \cap U \neq \emptyset} X$ je otvorená množina v G. Označme $M_1 = \bigcup_{X_1 \cap U \neq \emptyset} X_1$, U_1 množinu všetkých tried X_1, pre ktoré platí $X_1 \cap U \neq \emptyset$ a Φ množinu všetkých tried $X_1 \in [G]_1$, ktoré sa dajú spojiť s niektorou triedou z U_1. Potom $\bigcup_{X \cap U \neq \emptyset} X = \bigcup_{X_1 \in \Phi} X_1$. Skutočne, $X = \bigcup_{X_1 \in \mathfrak{X}} X_1$, kde $\mathfrak{X}$ je množina všetkých takých tried X_1, že tieto triedy X_1 sa dajú navzájom spojiť v $[G]_2$. Keď $X \cap U \neq \emptyset$, vyplýva z toho, že existuje (k tomuto X) také $A_1 \in \mathfrak{X}$, že $A_1 \cap U \neq \emptyset$ a všetky $X_1 \in \mathfrak{X}$ sa dajú spojiť s A_1 v $[G]_2$. Je teda $A_1 \in U_1$, preto $\mathfrak{X} \subset \Phi$ a z toho vyplýva, že $X = \bigcup_{X_1 \in \mathfrak{X}} X_1 \subset \bigcup_{X_1 \in \Phi} X_1$, čiže $\bigcup_{X \cap U \neq \emptyset} X \subset \bigcup_{X_1 \in \Phi} X_1$. Nech teraz naopak $X_1 \in \Phi$. Potom existuje také A_1, že $A_1 \in U_1$, čiže $A_1 \cap U \neq \emptyset$ a X_1 sa dá spojiť s A_1 v $[G]_2$. To znamená, že X_1 a A_1 patria do tej istej množiny $\mathfrak{X}$ (je to množina všetkých tried z $[G]_1$, ktoré sa dajú v $[G]_2$ spojiť s triedou X_1 a teda aj s triedou A_1). Potom $X_1 \subset \bigcup_{X_1 \in \mathfrak{X}} X_1 = X$ a tiež $A_1 \subset \bigcup_{X_1 \in \mathfrak{X}} X_1 = X$. No pretože $A_1 \cap U \neq \emptyset$, je aj $X \cap U \neq \emptyset$. Z toho vyplýva, že $X_1 \subset X \subset \bigcup_{X \cap U \neq \emptyset} X$, čiže $\bigcup_{X_1 \in \Phi} X_1 \subset \bigcup_{X \cap U \neq \emptyset} X$ a tým je tvrdenie dokázané.

Utvorme si teraz pre každé prirodzené číslo n množinu M_n takto definovanú:

$M_1 = \bigcup_{X_1 \cap U \neq \emptyset} X_1$, $M_{2m} = \bigcup_{X_2 \cap M_{2m-1} \neq \emptyset} X_2$, $M_{2m+1} = \bigcup_{X_1 \cap M_{2m} \neq \emptyset} X_1$, $(m = 1, 2, \ldots)$. Pretože rozklady $[G]_1$ a $[G]_2$ sú topologické rozklady na G, sú množiny M_n pre každé prirodzené číslo n otvorenými množinami v G, a preto otvorenou množinou je aj zjednotenie $M = \bigcup M_{2m+1}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$. Stačí ešte dokázať, že $M = \bigcup_{X_1 \in \Phi} X_1$, pretože na základe vyššie dokázaného bude $M = \bigcup_{X \cap U \neq \emptyset} X$ a teda $\bigcup_{X \cap U \neq \emptyset} X$ bude otvorená.

Keď je $X_1 \in \Phi$, dá sa X_1 spojiť s niektorou triedou ${}^{1}X_1 \in U_1$. Nech ${}^{1}X_1$, ${}^{2}X_1, \ldots, {}^{\alpha}X_1 = X_1$ je reťazec v $[G]_1$, ktorý spája prvky ${}^{1}X_1$ a X_1. ${}^{1}X_2$, ${}^{2}X_2, \ldots$, ${}^{(\alpha-1)}X_2$ nech sú tie triedy z $[G]_2$, že ${}^{\nu}X_2 \cap {}^{\nu}X_1 \neq \emptyset$ a ${}^{\nu}X_2 \cap {}^{(\nu+1)}X_1 \neq \emptyset$ pre $\nu = 1, 2, \ldots, \alpha - 1$. Pretože ${}^{1}X_1 \in U_1$, je ${}^{1}X_1 \cap U \neq \emptyset$ a teda ${}^{1}X_1 \subset M_1$. Dokážeme teraz, že ak pre nejaké μ (μ celé číslo, $0 < \mu < \alpha$) platí ${}^{\mu}X_1 \subset M_{2\mu-1}$, potom ${}^{(\mu+1)}X_1 \subset M_{2\mu+1}$. Predovšetkým je ${}^{\mu}X_2 \cap {}^{\mu}X_1 \neq \emptyset$, ${}^{\mu}X_2 \cap {}^{(\mu+1)}X_1 \neq \emptyset$. Pretože podľa predpokladu je ${}^{\mu}X_1 \subset M_{2\mu-1}$, platí ${}^{\mu}X_2 \cap M_{2\mu-1} \neq \emptyset$, teda ${}^{\mu}X_2 \subset M_{2\mu}$. Pretože ${}^{\mu}X_2 \subset M_{2\mu}$ a ${}^{\mu}X_2 \cap {}^{(\mu+1)}X_1 \neq \emptyset$, je ${}^{(\mu+1)}X_1 \cap M_{2\mu} \neq \emptyset$ a teda ${}^{(\mu+1)}X_1 \subset M_{2\mu+1}$. Pretože ${}^{1}X_1 \subset M_1$, je predpoklad ${}^{\mu}X_1 \subset M_{2\mu-1}$ splnený pre $\mu = 1$ a z toho na základe vyššie dokázaného dostávame, že ${}^{\nu}X_1 \subset M_{2\nu-1}$, pre $\nu = 1, 2, \ldots, \alpha$. Z toho ďalej vyplýva, že $X_1 = {}^{\alpha}X_1 \subset M_{2\alpha-1}$ a teda tiež $X_1 \subset M$, z čoho $\bigcup_{X_1 \in \Phi} X_1 \subset M$.

Nech naopak $X_1 \subset M$. Potom existuje také celé číslo α, $1 \leqq \alpha$, že $X_1 \subset M_{2\alpha-1} = \bigcup_{X_1 \cap M_{2\alpha-2} \neq \emptyset} X_1$ (kde pre $\alpha = 1$ položíme $M_{2\alpha-2} = M_0 = U$). Označme $X_1 = {}^{\alpha}X_1$. Potom ${}^{\alpha}X_1 \subset M_{2\alpha-1}$.

Dokážeme najprv, že ak pre nejaké μ (μ celé číslo, $2 \leqq \mu \leqq \alpha$) je ${}^{\mu}X_1 \subset M_{2\mu-1}$, tak existuje také ${}^{(\mu-1)}X_1$, že ${}^{(\mu-1)}X_1 \subset M_{2\mu-3}$ a také ${}^{(\mu-1)}X_2$, že ${}^{(\mu-1)}X_2 \cap {}^{(\mu-1)}X_1 \neq \emptyset$ a ${}^{(\mu-1)}X_2 \cap {}^{\mu}X_1 \neq \emptyset$. Keďže podľa predpokladu je ${}^{\mu}X_1 \subset M_{2\mu-1} = \bigcup_{X_1 \cap M_{2\mu-2} \neq \emptyset} X_1$, je ${}^{\mu}X_1 \cap M_{2\mu-2} \neq \emptyset$. No pretože $M_{2\mu-2} = \bigcup_{X_2 \cap M_{2\mu-3} \neq \emptyset} X_2$, existuje také ${}^{(\mu-1)}X_2$, že ${}^{(\mu-1)}X_2 \subset M_{2\mu-2}$, ${}^{(\mu-1)}X_2 \cap {}^{\mu}X_1 \neq \emptyset$ a ${}^{(\mu-1)}X_2 \cap M_{2\mu-3} \neq \emptyset$. Pretože však $M_{2\mu-3} = \bigcup_{X_1 \cap M_{2\mu-4} \neq \emptyset} X_1$ (kde v prípade, že $\mu = 2$ položíme $M_0 = U$), existuje také ${}^{(\mu-1)}X_1$, že ${}^{(\mu-1)}X_1 \subset M_{2\mu-3}$ a ${}^{(\mu-1)}X_2 \cap {}^{(\mu-1)}X_1 \neq \emptyset$. Ako sme videli, je ${}^{\alpha}X_1 \subset M_{2\alpha-1}$, teda predpoklad ${}^{\mu}X_1 \subset M_{2\mu-1}$ platí pre $\mu = \alpha$. Z toho a z práve dokázaného vyplýva, že k triede X_1 existujú triedy $X_1 = {}^{\alpha}X_1, {}^{(\alpha-1)}X_1, \ldots, {}^{2}X_1, {}^{1}X_1$ z $[G]_1$ a triedy ${}^{(\alpha-1)}X_2, {}^{(\alpha-2)}X_2, \ldots, {}^{2}X_2, {}^{1}X_2$ z $[G]_2$, pričom ${}^{(\lambda-1)}X_2 \cap {}^{(\lambda-1)}X_1 \neq \emptyset$ a ${}^{(\lambda-1)}X_2 \cap {}^{\lambda}X_1 \neq \emptyset$ pre $\lambda = 2, 3, \ldots, \alpha$ a ${}^{1}X_1 \subset M_1$. Teda triedy $X_1 = {}^{\alpha}X_1, {}^{(\alpha-1)}X_1, \ldots, {}^{2}X_1, {}^{1}X_1$ tvoria reťazec od X_1 po ${}^{1}X_1$ v $[G]_1$, a pretože ${}^{1}X_1 \subset M_1 = \bigcup_{X_1 \cap U \neq \emptyset} X_1$, je ${}^{1}X_1 \cap U \neq \emptyset$, čiže ${}^{1}X_1 \in U_1$. No keďže sa X_1 dá spojiť vyššie zostrojeným reťazcom s ${}^{1}X_1 \in U_1$, je $X_1 \in \Phi$, a preto je aj $X_1 \subset \bigcup_{X_1 \in \Phi} X_1$. Z posledného vzťahu teda konečne vyplýva, že $M \subset \bigcup_{X_1 \in \Phi} X_1$, a preto $M = \bigcup_{X_1 \in \Phi} X_1$, čím je dôkaz skončený.

Veta 4. *Nech $[G]_1$ a $[G]_2$ sú topologické faktoroidy na topologickom grupoide G pri úplnom systéme okolí Σ. Nevyhnutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby najmenší spoločný zákryt $\{G\}_{12}$ topologických faktoroidov $[G]_1$ a $[G]_2$ bol topologickým faktoroidom na topologickom grupoide G pri úplnom systéme okolí Σ je, aby každá trieda $X \in \{G\}_{12}$ bola uzavretá množina v G.*

Dôkaz vyplýva z vety 3 a z toho, že zákryt $\{G\}_{12}$ je faktoroidom (pozri [1]).

Príklad 4. Nech $[G]_1$ a $[G]_2$ sú topologické rozklady z príkladu 2. Potom ku každému ξ_1, $0 < \xi_1 \leqq 1$ môžeme priradiť triedu $X(\xi_1) = \{(\xi_1 + k, \xi_2) \mid k = 0, 1, 2, \ldots, \xi_2 > 0\}$ najmenšieho zákrytu $\{G\}_{12}$ (rozkladov $[G]_1$ a $[G]_2$). Pretože je splnená podmienka z vety 3, je aj $\{G\}_{12}$ topologickým rozkladom na G. Pretože $[G]_1$ a $[G]_2$ sú topologické faktoroidy na G, je ním podľa vety 4 aj $\{G\}_{12}$.

LITERATÚRA

[1] O. Borůvka, Úvod do theorie grup, Praha 1952.

[2] Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, Москва 1954.

[3] R. Šulka, Topologické grupoidy, Matematicko-fyzikálny časopis V (1955), 10—21.

[4] R. Šulka, Poznámka o izomorfizme topologických faktoroidov, Matematicko-fyzikálny časopis VI (1956), 137—142.

[5] R. Šulka, O izomorfizme topologických grupoidov, Matematicko-fyzikálny časopis VII (1957), 143—157.

Došlo 7. 4. 1957.

Katedra deskriptívnej geometrie
Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave

О НАИБОЛЬШЕМ ОБЩЕМ УПЛОТНЕНИЙ И НАИМЕНЬШЕМ ОБЩЕМ ЗАКРЫТИЙ ДВУХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ФАКТОРОИДОВ

РОБЕРТ ШУЛКА

Выводы

Эта статья является продолжением авторовых работ [3], [4] и [5]. Автор доказывает следующую лемму:

Пусть $[G]_1$ и $[G]_2$ топологические факторoиды на топологическом группоиде G при полной системе окрестностей Σ.

а) Необходимым и достаточным условием для того, чтобы наибольшее уплотнение $[G]_{12}$ топологических фактороидов $[G]_1$ и $[G]_2$ было топологическим фактороидом на топологическом группоиде G при полной системе окрестностей Σ, является то, чтобы $\bigcup_{X \cap U \neq \emptyset} X$ $(X \in [G]_{12})$ было открытым множеством в G для всякого $U \in \Sigma$.

б) Необходимым и достаточным условием для того, чтобы наименьшее общее закрытие $\{G\}_{12}$ топологических фактороидов $[G]_1$ и $[G]_2$ было топологическим фактороидом на топологическом группоиде G при полной системе окрестностей Σ, является то, чтобы всякий класс $X \in \{G\}_{12}$ был замкнутым множеством в G.

ON THE MAXIMAL COMMON REFINEMENT AND THE MINIMAL COMMON COVERING OF TWO TOPOLOGICAL FACTOROIDS

ROBERT ŠULKA

Summary

This article is a continuation of the author's papers [3], [4] and [5]. He proves the following lemma:

Let $[G]_1$ and $[G]_2$ be topological faktoroids on the topological grupoid G with the complete system of neighborhoods Σ.

a) The necessary and sufficient condition for that the maximal common refinement $[G]_{12}$ of topological factoroids $[G]_1$ and $[G]_2$ be a topological factoroid on the topological grupoid G with the complete system of neighborhoods Σ is that $\bigcup_{X \cap U \neq \emptyset} X (X \in [G]_{12})$ be an open set in G for each $U \in \Sigma$.

b) The necessary and sufficient condition for that the minimal common covering $\{G\}_{12}$ of topological factoroids $[G]_1$ and $[G]_2$ be a topological factoroid on the topological grupoid G with the complete system of neighboorhoods Σ is that each class $X \in \{G\}_{12}$ be a closed set in G.