

ZVÝŠENÍ STYKU KŘIVEK PROMÍTÁNÍM

ALOIS URBAN

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie fakulty strojního inženýrství ČVUT
v Praze

1. Úvod

Problém zvýšení styku křivek promítáním je poměrně starý. První výsledky byly známy již koncem minulého století, kdy francouzský geometr Halphen [6] ukázal, že dvě křivky k_1 , k_2 mající ve společném bodě A styk řádu $s - 1$ ($s \geq 1$) promítají se z bodů jisté roviny, t. zv. hlavní roviny, do křivek, jež mají styk řádu s .

Teprve mnohem později v polovině třicátých let téměř současně Bompiani [1] a Čech [4] ukázali, že za jistých předpokladů existuje v hlavní rovině hlavní přímka, z jejíž bodů se dané křivky promítají do křivek o styku řádu $s + 1$, a na hlavní přímce hlavní bod, z něhož se promítají do křivek o styku řádu $s + 2$.

Současně byla ukázána pěkná geometrická konstrukce hlavní roviny a hlavní přímky [4]. Je-li P libovolná plocha procházející oběma křivkami k_1 a k_2 ; tečná rovina plochy P ve společném bodě A obou křivek je hlavní rovina. Není-li (za předpokladu $s \geq 2$) společná tečna obou křivek ve společném bodě asymptotickou tečnou plochy P , hlavní přímka je k ní sdružená tečna plochy P .

Nalezené výsledky byly poměrně brzy na to jednak doplněny Bompianim pro dvě protínající se křivky [2] a později i pro dvě křivky bez společného bodu [3], jednak zobecněny Čechem pro dotýkající se křivky ($s \geq 2$) v prostoru dimenze $n \geq 3$ [5]; současně byly podány, s výjimkou případu protínajících se křivek, některé geometrické konstrukce hlavních přímek a hlavních bodů.

Úkolem této práce je ukázat geometrickou konstrukci hlavních elementů právě i pro protínající se křivky ($s = 1$). Podrobnější studium vlastností styku křivek [7, 8] ukazuje jednak, že případ $s = 1$ je nutno s analytického hlediska projednávat zvlášť, jednak, že řešení tohoto případu je poněkud složitější než v případě $s > 1$.

V práci je nejprve ve 3. odd. novou metodou nalezeno analytické řešení problému; na to v dalších dvou odstavcích navazuje několik geometrických řešení. Za základní konstrukci hlavních přímek a hlavních bodů je možno

označit jejich konstrukci užitím jistých rozvinutelných ploch ležících v kon-
genci určené oběma danými křivkami (odst. 4), neboť téže metody lze užít
pro jakékoli dvě křivky (ať již mají styk řádu $s-1 \geq 0$ nebo jsou bez spo-
lečného bodu). Další konstrukce (odst. 5) užívá kvadratických přírodně ku-
styk vhodné volené řádu. Konečně je uvedena konstrukce (odst. 5), která
je geometricky nejjednodušší spojena s předloženým problémem. Promítací kuže-
lové plochy daných křivek jsou nahrazeny kvadratickými, případně kubickými
kuželovými plochami, které s danými křivkami mají v jejich společném bodě
styk vhodné řádu.

2. Analytické podmínky pro dvojici protínajících se křivek

Nechť v trojrozměrném projekivním prostoru S_3 , který je vztažený k sys-
tému homogenních souřadnic x_i ($i = 0, 1, 2, 3$), jsou dány dvě křivky k_1, k_2
o parametrických rovnících

$$k_1 \equiv x_i = x_i(w), \quad k_2 \equiv y_i = y_i(v),$$

$$(i = 0, 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

kde $x_i(w), y_i(v)$ jsou analytické funkce parametru $w(v)$ definované v jistém
otevřeném intervalu $W(V)$. Pro stručnost budeme místo rovnice (2.1) psát
jejich vyjádření ve vektorovém tvaru

$$k_1 \equiv x = x(w), \quad k_2 \equiv y = y(v). \quad (2.2)$$

Předpokládejme, že obě křivky mají společný bod A , který nechť je jedno-
bod A ná křivce k_1 (k_2) přísluší parametru $w = 0$ ($v = 0$).
Jestliže zavedeme označení

$$\left[\frac{d^i x(w)}{dw^i} \right]_{w=0} \equiv x_i, \quad \left[\frac{d^i y(v)}{dv^i} \right]_{v=0} = y_i,$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.3)$$

(přitom bod x_w má souřadnice x_0, x_1, x_2, x_3), vektorové funkce $x(w), y(v)$
v rovnících (2.2) lze rozvinout v mocninné řady

$$a) \quad k_1 \equiv x = x_0 + wx_1 + \frac{w^2}{2} x_2 + \frac{w^3}{3!} x_3 + \frac{w^4}{4!} x_4 + \dots$$

$$b) \quad k_2 \equiv y = y_0 + vy_1 + \frac{v^2}{2} y_2 + \frac{v^3}{3!} y_3 + \frac{v^4}{4!} y_4 + \dots \quad (2.4)$$

Protože faktor úměrnosti homogenních souřadnic v (2.1) je možno ještě
vhodně volit, můžeme předpokládat přímo

$$x_0 = y_0. \quad (2.5)$$

Z předpokladu, že bod A je obvyčejný na obou křivkách, plyne

$$(x_0, x_1) \neq 0, \quad (y_0, y_1) \neq 0. \quad (2.6)$$

přítom symbol $(x_0, x_1) \neq 0$ značí, že matice

$$\begin{pmatrix} x_{00} & x_{10} & x_{20} & x_{30} \\ x_{01} & x_{11} & x_{21} & x_{31} \end{pmatrix}$$

má nejvyšší možnou hodnotu; obdobně je tomu u symbolu $(x_0, x_1, y_1) \neq 0$ atd.
Předpokládejme nyní, že křivky k_1, k_2 se v bodě A právě protínají, t. j. že
mají v bodě A styk řádu právě 0; pak je nutně

$$(x_0, x_1, y_1) \neq 0. \quad (2.7)$$

Tečny křivek k_1, k_2 v bodě A určují tedy společnou tečnou rovinu obou
křivek, která se nazývá *hlavní rovina* křivek k_1, k_2 v bodě A [6].

Je-li z libovolný bod prostoru S_3 neležící v hlavní rovině bodu A , jest

$$(x_0, x_1, y_1, z) \neq 0, \quad (2.8)$$

a tedy body x_0, x_1, x_2, x_3 můžeme vzít za vrcholy lokálního souřadnicového
čtyřstěnu. Nechť je

$$x_2 = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 y_1 + \lambda_2 z, \quad y_2 = \lambda'_0 x_0 + \lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 y_1 + \lambda'_2 z,$$

$$x_3 = \mu_0 x_0 + \mu_1 x_1 + \mu_2 y_1 + \mu_2 z, \quad y_3 = \mu'_0 x_0 + \mu'_1 x_1 + \mu'_2 y_1 + \mu'_2 z, \quad (2.9)$$

$$x_4 = \nu_0 x_0 + \nu_1 x_1 + \nu_2 y_1 + \nu_2 z, \quad y_4 = \nu'_0 x_0 + \nu'_1 x_1 + \nu'_2 y_1 + \nu'_2 z.$$

Dosaďme-li (2.9) do (2.4), dostaneme

$$a) \quad x = x_0 \left[1 + \frac{\lambda_0}{2} w^2 + \frac{\mu_0}{3!} w^3 + \frac{\nu_0}{4!} w^4 + (\cdot) \right] +$$

$$+ x_1 \left[w + \frac{\lambda_1}{2} w^2 + \frac{\mu_1}{3!} w^3 + \frac{\nu_1}{4!} w^4 + (\cdot) \right] + y_1 \left[\frac{\lambda_2}{2} w^2 + \frac{\mu_2}{3!} w^3 + \frac{\nu_2}{4!} w^4 + (\cdot) \right] +$$

$$+ z \left[\frac{\lambda_2}{2} w^2 + \frac{\mu_2}{3!} w^3 + \frac{\nu_2}{4!} w^4 + (\cdot) \right], \quad (2.10)$$

$$b) \quad y = x_0 \left[1 + \frac{\lambda'_0}{2} v^2 + \frac{\mu'_0}{3!} v^3 + \frac{\nu'_0}{4!} v^4 + (\cdot) \right] + x_1 \left[\frac{\lambda'_1}{2} v^2 + \frac{\mu'_1}{3!} v^3 + \frac{\nu'_1}{4!} v^4 + (\cdot) \right] +$$

$$+ y_1 \left[v + \frac{\lambda'_2}{2} v^2 + \frac{\mu'_2}{3!} v^3 + \frac{\nu'_2}{4!} v^4 + (\cdot) \right] + z \left[\frac{\lambda'_2}{2} v^2 + \frac{\mu'_2}{3!} v^3 + \frac{\nu'_2}{4!} v^4 + (\cdot) \right],$$

kde $(\cdot)$ vždy značí souhrn členů, z nichž lze vytknout alespoň w^5 nebo v^5 .

Rovnice (2.10) neudávají nejednodušší tvar rovnic křivek k_1, k_2 , jež v bodě A
mají styk řádu 0. Jak známo [4, 5, 7, 8], dostaneme je z rovnice (2.4), resp.
(2.10), jestliže provedeme transformaci parametru w

$$w = F(v) = a_1 v + \frac{a_2}{2} v^2 + \frac{a_3}{3!} v^3 + \frac{a_4}{4!} v^4 + (\cdot), \quad a_1 \neq 0 \quad (2.11)$$

a současně souřadnice x násobíme nenulovým faktorem

$$v = 1 + b_1 v + \frac{b_2}{2} v^2 + \frac{b_3}{4!} v^3 + (\cdot). \quad (2.12)$$

Místo rovnice (2.10a) dostaneme pak rovnici křivky k_1 ve tvaru

$$\begin{aligned} \tilde{x} = v(v) x(v) = &= x_0 \left[1 + b_1 v + \frac{1}{2} (\lambda_0 a_1^2 + b_2) v^2 + \frac{1}{3!} (\lambda_0 b_1 + \mu_0 a_1^3 + b_3) v^3 + \right. \\ &+ \frac{1}{4!} (\lambda_0 b_2 + \mu_0 b_3 + v_0 a_1^4 + b_4) v^4 + (\cdot) \left. \right] + x_1 \left[a_1 v + \frac{1}{2} (\lambda_1 a_1^2 + \right. \\ &+ 2a_1 b_1 + a_2) v^2 + \frac{1}{3!} (\lambda_1 b_1 + \mu_1 a_1^3 + 3a_1 b_2 + 3a_2 b_1 + a_3) v^3 + \frac{1}{4!} (\lambda_1 b_2 + \\ &+ \mu_1 b_3 + v_1 a_1^4 + 4a_1 b_3 + 6a_2 b_2 + 4a_3 b_1 + a_4) v^4 + (\cdot) \left. \right] + y_1 \left[\frac{1}{2} \lambda_2 a_1^2 v^2 + \right. \\ &+ \frac{1}{3!} (\lambda_2 b_1 + \mu_2 a_1^3) v^3 + \frac{1}{4!} (\lambda_2 b_2 + \mu_2 b_3 + v_2 a_1^4) v^4 + (\cdot) \left. \right] + z \left[\frac{1}{2} \lambda_2 a_1^2 v^2 + \right. \\ &+ \frac{1}{3!} (\lambda_2 b_1 + \mu_2 a_1^3) v^3 + \frac{1}{4!} (\lambda_2 b_2 + \mu_2 b_3 + v_2 a_1^4) v^4 + (\cdot) \left. \right], \quad (2.13) \end{aligned}$$

kde pro stručnost jsme zavedli označení

$$\begin{aligned} b_1 &= 3(a_1 a_2 + a_1^2 b_1), & b_2 &= 4a_1 a_3 + 3a_2^2 + 12a_1 a_2 b_1 + 6a_1^2 b_2, \\ b_3 &= 2(3a_1^2 a_2 + 2a_1^3 b_1). \end{aligned} \quad (2.14)$$

3. Analytické řešení problému

Zvolme libovolný střed promítání S a libovolnou průmětnu ξ , která neinciduje s S a pro kterou tedy platí $(S, \xi) \neq 0$; symbol (S, ξ) je známé zkrácené označení pro $\sum_{i=0}^3 s_i \xi_i$, kde $s_i(\xi_i)$, $i = 0, 1, 2, 3$, jsou souřadnice středu S (průmětny ξ). Vhodnou volbou faktoru úměrnosti homogenních souřadnic můžeme souřadnice normalisovat tak, že

$$(S, \xi) = 1. \quad (3.1)$$

Při této volbě najdeme pro průměty K_1, K_2 křivek k_1, k_2

$$K_1 \equiv X = \tilde{x} + \lambda S, \quad K_2 \equiv Y = y + \mu S, \quad (3.2)$$

kde λ, μ určíme užitím podmínek incidence $(X, \xi) = (Y, \xi) = 0$; jest

$$\lambda = -(\tilde{x}, \xi), \quad \mu = -(y, \xi) \quad (3.3)$$

a tedy rovnice průmětů K_1, K_2 mají tvar

$$K_1 \equiv X = \tilde{x} - (\tilde{x}, \xi) S, \quad K_2 \equiv Y = y - (y, \xi) S. \quad (3.4)$$

Z nalezených rovnic je především patrné, že průměty K_1, K_2 křivek k_1, k_2 mají společný průmět A' bodu A . Jest totiž $X_0 = Y_0$. Nutná a postačující podmínka pro to, aby průměty K_1, K_2 měly v bodě A' stejný řádu $\sigma - 1$ ($\sigma \geq 1$ celé číslo) jest, aby bylo možno najít čísla a, b ($a = 1, \dots, \sigma - 1$; $a_1 \neq 0$) tak, aby bylo

$$X_v = Y_v \quad (v = 0, 1, \dots, \sigma - 1), \quad (3.5)$$

tedy, jak plyne dosazením (3.4) do (3.5), aby existoval bod S vyhovující podmínkám

$$e_v S = \tilde{x}_v - y_v \quad (v = 0, 1, \dots, \sigma - 1), \quad (3.6)$$

kde $e_v = (x_v - y_v, \xi)$; za $\tilde{x}_v$ a y_v je třeba sem dosadit z (2.13) a (2.10b). Přitom pro $v = 0$ podmínka (3.6) je splněna identicky pro každé S . Užitím (3.6) snadno dokážeme (Bompiani [2]):

Křivky K_1, K_2 mají v bodě A' styk řádu 1 právě tehdy, je-li S bodem hlavní roviny křivek k_1, k_2 v bodě A , ale neležícím na jejich tečnách v A .

Důkaz plyne z rovnice

$$e_1 S = b_1 x_0 + a_1 x_1 - y_1 \quad (3.7)$$

na níž se v tomto případě redukuje rovnice (3.6).

Dále platí (Bompiani, [2]):

Jestliže oskuláční roviny křivek k_1, k_2 v bodě A jsou různé od hlavní roviny křivek k_1, k_2 v bodě A , existují v hlavní rovině dvě různé přímky procházející bodem A , z jejichž bodů ($\neq A$) křivky k_1, k_2 se promítají do křivek majících v průmětu A' bodu A styk řádu 2. Obě přímky oddělují harmonicky tečnu křivek k_1, k_2 v bodě A .

Jestliže právě jedna oskuláční rovina křivek k_1, k_2 v bodě A splývá s jejich hlavní rovinou v bodě A , neexistují body, z nichž by se křivky k_1, k_2 promítaly do křivek, jež by v A' měly styk řádu vyššího než 1.

Jestliže oskuláční roviny křivek k_1, k_2 v bodě A splývají s jejich hlavní rovinou v bodě A , pak z každého bodu ($\neq A$) hlavní roviny se promítají křivky k_1, k_2 do křivek, které mají v bodě A' styk řádu 2. Není-li hlavní rovina pro žádnou z křivek k_1, k_2 stacionární, existují v ní tři vzájemně různé přímky, z jejichž každého bodu ($\neq A$) křivky k_1, k_2 se promítají do křivek majících v bodě A' styk řádu 3. Trojice těchto přímek je apolární ke dvojici tečen křivek k_1, k_2 v bodě A .

Důkaz. K rovnici (3.7) připojíme rovnici (3.6) pro $v = 2$, t. j. rovnici

$$\begin{aligned} e_2 S = (\lambda_0 a_1^2 + b_2 - \lambda_0) x_0 + (\lambda_1 a_1^2 + 2a_1 b_1 + a_2 - \lambda_1) x_1 + (\lambda_2 a_1^2 - \lambda_2) y_1 + \\ + (\lambda_2^2 - \lambda^2) z. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Z (3.7) a (3.8) plyne, že nutná a postačující podmínka pro to, aby existoval

střed S , z něhož by se křivky k_1, k_2 promítaly do křivek majících v bodě A' styk alespoň 2, jest, aby $a_1 \neq 0$ a aby matice

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & -1 & 0 \\ \lambda_3 a_1^2 + b_2 - \lambda'_0 & \lambda_3 a_1^2 + 2a_1 b_1 + a_2 - \lambda'_1 & \lambda_3 a_1^2 - \lambda'_2 & \lambda_3 a_1^2 - \lambda' \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

měla hodnotu 1. K tomu je nutné a stačí, aby existovalo $a_1 \neq 0$ vyhovující rovnici

$$\lambda a_1^2 - \lambda' = 0 \quad (3.10)$$

a aby platilo

$$\begin{aligned} a) \quad & a_2 = \lambda'_2 a_1 + \lambda'_1 - \lambda_3 a_1^2 - \lambda_1 a_1^2 - 2a_1 b_1, \\ b) \quad & b_2 = \lambda'_2 b_1 + \lambda'_1 - \lambda_3 a_1^2 b_1 - \lambda_1 a_1^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Za předpokladu $\lambda \neq 0, \lambda' \neq 0$, t. j. za předpokladu, že oskulární roviny (x_0, x_1, x_2) a (y_0, y_1, y_2) křivek k_1, k_2 v bodě A jsou různé od hlavní roviny v bodě A , najdeme z (3.10)

$$a_i^{(i)} = \epsilon^{(i)} \sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda}} \quad (i = 1, 2; \quad \epsilon^{(1)} = +1, \quad \epsilon^{(2)} = -1). \quad (3.12)$$

Zvolíme-li za a_i jedno z čísel (3.12), volíme-li dále b_i libovolně a a_3, b_2 t. k. aby platilo (3.11), pak bod

$$b_1 x_0 + a_1^{(i)} x_1 - y_1 \quad (i = 1, 2) \quad (3.13)$$

je středem promítání, z něhož se křivky k_1, k_2 promítají do křivek majících v A' styk řádu 2. Body (3.13) vyplní (s výjimkou bodu A) dvě různé přímky hlavní roviny spojující bod A s body $a_1^{(1)} x_1 - y_1, a_1^{(2)} x_1 - y_1$, jež oddělují harmonicky body x_1, y_1 . Tedy obě přímky oddělují harmonicky tečný křivek k_1, k_2 v bodě A .

Jestliže je buď $\lambda = 0, \lambda' \neq 0$, nebo $\lambda \neq 0, \lambda' = 0$, t. j. jestliže právě jedna oskulární rovina křivek k_1, k_2 v bodě A splývá s jejich hlavní rovinou v bodě A , neexistuje $a_1 \neq 0$ vyhovující rovnici (3.10), a tedy neexistuje střed promítání, z něhož by se dané křivky promítaly do křivek majících styk řádu 2.

Předpokládejme nyní $\lambda = \lambda' = 0$ (pak je již nutné $\lambda_2 \neq 0, \lambda'_1 \neq 0$), t. j. předpokládejme, že oskulární roviny křivek k_1, k_2 v bodě A splývají s jejich hlavní rovinou v bodě A . Rovnice (3.10) je pak splněna identicky pro každé a_1 . Volíme-li při libovolném $a_1 \neq 0$ a libovolném b_1 čísla a_2, b_2 podle (3.11), má matice (3.9) hodnotu 1 a tedy z každého bodu ($\neq A$) hlavní roviny křivky k_1, k_2 se promítají do křivek majících v A' styk řádu 2.

K rovnicím (3.7) a (3.8) připojme ještě rovnici (3.6) pro $v = 3$, t. j. rovnici $g_3 S' = (\lambda_3 h_1 + \mu_0 a_1^3 + b_3 - \mu'_0) x_0 + (\lambda_3 h_1 + \mu_1 a_1^3 + 3a_1 b_2 + 3a_2 b_1 + a_3 - \mu'_1) x_1 +$

$$+ (\lambda_3 b_1 + \mu_2 a_1^3 - \mu'_2) y_1 + (3\lambda(a_1 a_2 + a_2^2 b_1) + \mu a_1^3 - \mu') z, \quad (3.14)$$

v níž je ještě třeba podle předpokladu položit $\lambda = 0$. Nutná a postačující podmínka pro to, aby existoval střed promítání, z něhož by se dané křivky promítaly do křivek majících v bodě A' styk řádu alespoň 3, jest, aby matice

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & -1 & 0 \\ \lambda_3 a_1^2 + b_2 - \lambda'_0 & \lambda_3 a_1^2 + 2a_1 b_1 + a_2 - \lambda'_1 & \lambda_3 a_1^2 - \lambda'_2 & \lambda_3 a_1^2 - \lambda' \\ \lambda_3 b_1 + \mu_0 a_1^3 + b_3 - \mu'_0 & \lambda_3 h_1 + \mu_1 a_1^3 + 3a_1 b_2 + 3a_2 b_1 + a_3 - \mu'_1 & \lambda_3 h_1 + \mu_2 a_1^3 - \mu'_2 & 3\lambda(a_1 a_2 + a_2^2 b_1) + \mu a_1^3 - \mu' \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

(v níž $\lambda = \lambda' = 0$) měla hodnotu 1 a aby $a_1 \neq 0$. K tomu je nutné a stačí, aby existovalo nenulové řešení rovnice

$$\mu a_1^3 - \mu' = 0 \quad (3.16)$$

a aby kromě rovnice (3.11) platily ještě rovnice

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 \mu'_2 + \mu'_1 - a_1 b_1 \lambda_3 - b_1 \lambda_1 - a_1^3 \mu_2 - a_1^3 \mu_1 - 3a_1 b_2 - 3a_2 b_1, \\ b_3 &= b_1 \mu'_2 + \mu'_0 - b_1 b_1 \lambda_3 - b_1 \lambda_0 - a_1^3 b_1 \mu_2 - a_1^3 \mu_0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Předpokládáme-li, že hlavní rovina křivek k_1, k_2 v bodě A není pro žádnou z křivek k_1, k_2 stacionární, jest $\mu \neq 0, \mu' \neq 0$, a tedy existuje vždy $a_1 \neq 0$ vyhovující rovnici (3.16); jejím řešením najdeme

$$a_i^{(i)} = \epsilon^{(i)} \sqrt[3]{\frac{\mu'}{\mu}}, \quad (i = 1, 2, 3; \quad \epsilon^{(1)} = 1, \quad \epsilon^{(2)} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \epsilon^{(3)} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}). \quad (3.18)$$

Zvolíme-li za a_i některé řešení v (3.18), volíme-li dále b_i libovolně, a_2, b_2 podle (3.11) a a_3, b_3 podle (3.17), pak z bodu (3.13) (kam za $a_1^{(i)}$ dosadíme z (3.18)) křivky k_1, k_2 se promítají do křivek majících v průmětu A' bodu A styk řádu 3. Přímky promítající body (3.13) z bodu A tvoří, jak se snadno zjisti, trojici přímek apolární s dvojicí tečen křivek k_1, k_2 v A .

Tím jsou všechna tvrzení věty dokázána. Sestrojené přímky v hlavní rovině se nazývají *hlavní přímky* (Bompiani, [2]).

Konečně platí věta (Bompiani, [2]):

Jestliže oskulární roviny křivek k_1, k_2 v bodě A jsou různé od hlavní roviny křivek v bodě A , existuje na každé z hlavních přímek bod ($\neq A$), z něhož se křivky k_1, k_2 promítají do křivek majících v průmětu A' bodu A styk řádu 3. Jestliže hlavní rovina křivek k_1, k_2 v bodě A je nestacionární oskulární rovinou každé z křivek k_1, k_2 v bodě A , existuje na každé ze tří hlavních přímek bod ($\neq A$), z něhož se křivky k_1, k_2 promítají do křivek majících v průmětu A' bodu A styk řádu 4. Tyto body jsou kolinéární právě tehdy, když při vyjádření (2.9) jest

$$\mu \lambda_1 - \mu' \lambda_2 = 0. \quad (3.19)$$

Důkaz. Předpokládáme-li nejprve, že oskulační roviny křivek k_1, k_2 v A jsou různé od hlavní roviny křivek v bodě A , t. j. je-li $\lambda \neq 0, \lambda' \neq 0$, můžeme tedy $\lambda_2 = \lambda'_1 = 0$. Nutná a postačující podmínka pro to, aby existoval bod S promítající křivky k_1, k_2 do křivek majících v bodě A' styk řádu 3, jest, aby $a_1 \neq 0$ a aby matice (3.15), v níž položíme $\lambda_2 = \lambda'_1 = 0$, měla hodnotu 1. K tomu je nutné a stačí, aby platila rovnice (3.12), rovnice

$$3\lambda(a_1b_1 + a_2)a_1 + \mu a_1^3 - \mu' = 0 \quad (3.20)$$

a rovnice (3.11) a (3.17), v nichž je třeba položit $\lambda_2 = \lambda'_1 = 0$. Z rovnice (3.20) a (3.11a) snadno najdeme

$$b_1 = \lambda'_2 - \lambda_1 a_1 - \frac{1}{3\lambda a_1^2}(\mu' - \mu a_1^3), \quad (3.21)$$

$$a_2 = -\lambda'_2 a_1 + \lambda_1 a_1^2 + \frac{2}{3\lambda a_1}(\mu' - \mu a_1^3).$$

Zvolíme-li nyní a_1 tak, aby vyhovovalo rovnici (3.12), určíme-li b_1, a_2 užitím (3.21), b_2 z (3.11b) a a_3, b_3 podle (3.17), pak křivky k_1, k_2 se promítají do křivek majících v průmětu A' bodu A styk řádu 3 právě ze dvou bodů

$$\begin{aligned} & \left[\lambda \lambda' (\lambda'_2 \lambda^{\frac{1}{2}} - \lambda_1 \lambda'^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}(\mu' \lambda^{\frac{3}{2}} - \mu \lambda'^{\frac{3}{2}}) \right] x_0 + \lambda \lambda'^{\frac{3}{2}} x_1 - \lambda^{\frac{3}{2}} \lambda' y_1, \\ & \left[\lambda \lambda' (\lambda'_2 \lambda^{\frac{1}{2}} + \lambda_1 \lambda'^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}(\mu' \lambda^{\frac{3}{2}} + \mu \lambda'^{\frac{3}{2}}) \right] x_0 - \lambda \lambda'^{\frac{3}{2}} x_1 - \lambda^{\frac{3}{2}} \lambda' y_1, \end{aligned} \quad (3.22)$$

jež po jednom leží na hlavních přímkách křivek k_1, k_2 v bodě A .

Necht' nyní oskulační roviny křivek k_1, k_2 v bodě A splývají s hlavní rovinou křivek k_1, k_2 v bodě A a necht' oskulační roviny nejsou stacionární. Pak v (2.9) je $\lambda = \lambda' = 0, \mu \neq 0, \mu' \neq 0$.

K rovnicím (3.7), (3.8) a (3.14) připojme ještě rovnici

$$\begin{aligned} e_4 S = & (\lambda_0 h_2 + \mu_0 h_2 + v_0 a_1^3 + b_4 - v_0' x_0 + (\lambda_1 h_2 + \mu_1 h_2 + v_1 a_1^3 + 4a_1 b_3 + 6a_2 b_2 + \\ & + 4a_3 b_1 + a_4 - v_1' x_1 + (\lambda_2 h_2 + \mu_2 h_2 + v_2 a_1^3 - v_2' y_1 + (\mu h_3 + v a_1^3 - v') z. \end{aligned}$$

Nutná a postačující podmínka pro to, aby existoval bod S , z něhož by se křivky k_1, k_2 promítaly do křivek majících v A' styk řádu 4, jest, aby matice

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 + \lambda_0 a_1^2 - \lambda'_0 & a_2 + \lambda_1 a_1^2 + 2a_1 b_1 - \lambda'_1 \\ b_3 - B_3 & a_3 - A_3 \\ b_4 - B_4 & a_4 - A_4 \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \lambda_2 a_1^2 - \lambda'_2 & 0 \\ \lambda_3 h_1 + \mu_2 a_1^3 - \mu'_2 & \mu a_1^3 - \mu' \\ \lambda_2 h_2 + \mu_2 h_3 + v_2 a_1^3 - v'_2 & \mu h_3 + v a_1^3 - v' \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

(v níž $A, (i = 3, 4)$ je funkci $a_1, \dots, a_{i-1}, b_1, \dots, b_{i-1}$ a $B_i (i = 3, 4)$ funkci $a_1, \dots, a_{i-1}, b_1, \dots, b_{i-2}$) měla hodnotu 1 a přitom aby $a_1 \neq 0$. To nastane právě tehdy, když a_1 je řešením rovnice (3.16), jestliže platí rovnice (3.11), (3.17) a

$$\begin{aligned} \text{a)} & 2\mu(3a_1^2 a_2 + 2a_1^3 b_1) + v a_1^4 - v' = 0, \\ \text{b)} & a_4 = A_4 - a_1(\lambda_2 h_2 + \mu_2 h_3 + v_2 a_1^3 - v'_2), \\ \text{c)} & b_4 = B_4 - b_1(\lambda_2 h_2 + \mu_2 h_3 + v_2 a_1^3 - v'_2). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Z rovnice (3.11a) a (3.25a) najdeme

$$b_1 = \frac{1}{8a_1^3 \mu} (-6\lambda_2 \mu a_1^4 + 6\lambda'_1 \mu a_1^3 - 6\lambda_2 \mu a_1^5 + 6\lambda'_2 \mu a_1^3 + v a_1^4 - v'). \quad (3.26)$$

Postupným dosazením b_1 z (3.26) do (3.11), (3.17) a (3.25b, c) určíme a_2, b_2 ($x = 2, 3, 4$) jednoznačně jako funkce parametru a_1 . Jestliže výsledek dosazení řešení $a_1^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) rovnice (3.16) do pravé strany (3.26) označíme $b_1^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$), pak z předchozího plyne

$$\begin{aligned} b_1^{(i)} = & \frac{1}{8} (-6e^{i\omega} \lambda_{1i} \mu^{-\frac{1}{3}} \mu'^{\frac{1}{3}} + 6e^{i\omega} \lambda'_{1i} \mu^{-\frac{1}{3}} \mu'^{\frac{1}{3}} - 6e^{i\omega^2} \lambda_{2i} \mu^{-\frac{2}{3}} \mu'^{\frac{2}{3}} + \\ & + 6\lambda'_2 + e^{i\omega} \nu_{1i} \mu^{-\frac{1}{3}} \mu'^{\frac{1}{3}} - v' \mu'^{-1}). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Přitom

$$b_1^{(i)} x_3 + a_1^{(i)} x_1 - y_1 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.28)$$

jsou body, a to jediné, z nichž se křivky k_1, k_2 promítají do křivek majících v průmětu A' bodu A styk řádu 4.

Body (3.28) jsou kolinéární právě tehdy, když

$$\begin{vmatrix} a_1^{(1)}, b_1^{(1)}, 1 \\ a_1^{(2)}, b_1^{(2)}, 1 \\ a_1^{(3)}, b_1^{(3)}, 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.29)$$

Pro dosazení z (3.18) a (3.26) najdeme odtud již dokazovaný vztah (3.19).

Nalezené body jak v prvním, tak i v druhém případě se nazývají *hlavní body* (Bompiani [2]).

4. Základní konstrukce hlavních elementů

Přechodní výsledky je možno interpretovat geometricky; užijeme přitom netriviálních rozvinutelných přímkových ploch přímkové kongruence δ , pro kterou k_1, k_2 jsou fókálními křivkami. Přitom triviální rozvinutelnou přímkovou

plochu rozumíme každou kuželovou plochu, jejíž vřehol je na jedné z křivek k_1, k_2 a jejíž řídící křivkou je druhá křivka.

Nechť P je netriviální přímková plocha ležící v kongruenci $\mathbb{R}$ procházející bodem A , pro kterou body křivek k_1, k_2 nejsou singulární. Povrchové přímky plochy P protínají pak fokaální křivky k_1, k_2 kongruence $\mathbb{R}$ v bodech o parametrech w, v odpovídajících si v analytické korespondenci, která je nutné tvaru

$$w = \phi(v) = \alpha_1 v + \frac{\alpha_2}{2} v^2 + \frac{\alpha_3}{3!} v^3 + \dots \quad (\alpha_1 \neq 0). \quad (4.1)$$

Jestliže obráceně je dána analytická korespondence (4.1) mezi body v o parametrech w, v křivek k_1, k_2 , pak spojnice bodů, které si odpovídají v korespondenci (4.1), vytvoří netriviální přímkovou plochu P ležící v kongruenci $\mathbb{R}$. Její přímku jdoucí společným bodem A obou křivek k_1, k_2 určíme jako limitní polohu přímky

$$p(v) = (y(v), x(\phi(v))). \quad (v \neq 0) \quad (4.2)$$

pro $v \rightarrow 0$. Dosadíme-li (4.1) do (2.10) a užijeme-li (2.10) k úpravě (4.2), najdeme

$$p(v) = (x_0, \alpha_1 x_1 - y_1)v + v^2(\cdot), \quad (4.3)$$

a tedy

$$p(v) = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{p(v)}{v} = (x_0, \alpha_1 x_1 - y_1).$$

Odtud již plyne věta, udávající geometrickou konstrukci hlavní roviny křivek k_1, k_2 v bodě A ; tato věta je speciálním případem obecnější věty, jež platí pro každou plochu procházející křivkami k_1, k_2 (Čech [4], [5]).

Hlavní rovina křivek k_1, k_2 v jejich společném bodě A je tečná rovina v bodě A každé netriviální přímkové plochy P kongruence $\mathbb{R}$.

Pro hlavní přímky dokážeme:

Přímka netriviálně rozvinutelné plochy P kongruence $\mathbb{R}$ procházející společným bodem A křivek k_1, k_2 je hlavní přímkou křivek k_1, k_2 v bodě A . Obráceně: každá hlavní přímka křivek k_1, k_2 v bodě A je přímkou netriviálně rozvinutelné plochy kongruence $\mathbb{R}$.

Důkaz. Přímková plocha, jejíž tvoříci přímky jsou (4.2) a (4.4), t. j. plocha

$$\begin{aligned} a) \quad X(u, v) &= y(v) + ux\phi(v), \quad v \neq 0, \\ b) \quad X(u, 0) &= ux_0 - \alpha_1 x_1 + y_1 \end{aligned} \quad (4.5)$$

je rozvinutelná, jestliže podél každé její tvoříci přímky tečné roviny splývají: přímka $p(v)$, tečna křivky k_1 v bodě $x(\phi(v))$ a tečna křivky k_2 v bodě $y(v)$ leží pak v jedné rovině. Jest proto pro rozvinutelnou plochu pro každé v (a tedy i pro $v = 0$)

$$(x, y, x', y') = 0, \quad (4.6)$$

kde čárkou je označena derivace podle parametru v . Dosadíme-li sem (2.10) [ve je dáno funkcí $\phi(v)$ v (4.1)], dostaneme po dalším výpočtu (po vykrácení determinantem $(x_0, x_1, y_1, z) \neq 0$)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} x_1^2 (\lambda \alpha_1^2 - \lambda') + v^3 \left[-\frac{1}{2} x_2 \lambda' + \lambda x_1^2 x_2 + \frac{1}{2} (\lambda_1' \lambda - \lambda_1 \lambda') x_1^2 - \frac{1}{2} (\lambda_2 \lambda' - \lambda_2' \lambda) x_1^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{3} \mu x_1^4 - \frac{1}{3} \mu' \alpha_1 \right] + v^4 \left[\alpha_2 \left(\frac{5}{6} \mu x_1^3 - \frac{1}{3} \mu' \right) + \lambda_1 \left(\frac{1}{12} \mu x_1^2 - \frac{1}{3} \mu' \alpha_1^2 \right) + \frac{1}{4} \lambda_1 \mu x_1^3 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \lambda_2 \mu' x_1^3 + \frac{1}{3} \lambda_2' \left(\mu x_1^4 - \frac{1}{4} \mu' \alpha_1 \right) + \frac{1}{8} v x_1^5 - \frac{1}{8} v' \alpha_1 + \lambda(\cdot) + \lambda'(\cdot) \right] + v^5(\cdot) = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Koeficienty při jednotlivých mocninách parametru v jsou nutné rovny nule; tím dostáváme podmínky pro koeficienty korespondence (4.1), a tedy i speciálně pro $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2$.

Předpokládejme nejprve, že oskulární roviny křivek k_1, k_2 v bodě A jsou různé od hlavní roviny; pak je $\lambda \neq 0, \lambda' \neq 0$. Bod z zvolíme ještě na průsečnici oskulárních rovin, t. j. zvolíme $\lambda_2 = \lambda_1' = 0$. Rovnice pro α_1, α_2 jsou tedy

$$\begin{aligned} a) \quad \lambda \alpha_1^2 - \lambda' &= 0, \\ b) \quad -\frac{1}{2} \alpha_2 \lambda' + \lambda x_1^2 x_2 - \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda' \alpha_1^2 + \frac{1}{2} \lambda_2 \lambda \alpha_1^3 + \frac{1}{3} \mu \alpha_1^4 - \frac{1}{3} \mu' \alpha_1 &= 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Odtud již plyne

$$\begin{aligned} a) \quad \alpha_1^{(0)} &= \epsilon^{(0)} \sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda}}, \\ b) \quad \alpha_2^{(0)} &= \lambda^{-2} \lambda'^{-\frac{1}{2}} \left[\lambda \lambda' (\lambda_1 \lambda_2^{\frac{1}{2}} - \epsilon^{(0)} \lambda_2 \lambda_2^{\frac{1}{2}}) - \frac{2}{3} (\mu \lambda^{\frac{3}{2}} - \epsilon^{(0)} \mu' \lambda^{\frac{3}{2}}) \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$(i = 1, 2; \quad \epsilon^{(0)} = +1, \quad \epsilon^{(2)} = -1).$$

Z rovnice (4.8a) je zřejmé, že v kongruenci $\mathbb{R}$ leží dvě netriviální rozvinutelné plochy (procházející bodem A a pro něž regulární body křivek k_1, k_2 nejsou singulární). Jejich přímky jdoucí bodem A jsou přímky (4.5b), kde α_1 je dáno podmínkami (4.9a) a tedy podle (3.12) a (3.13) jsou to hlavní přímky křivek k_1, k_2 v bodě A .

Předpokládejme nyní, že oskulární roviny křivek k_1, k_2 v bodě A splývají s hlavní rovinou a nejsou staionární; pak je $\lambda = \lambda' = 0, \mu \neq 0, \mu' \neq 0$. Rovnice (4.5) se redukuje na rovnici

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \alpha_1 v^3 (\mu \alpha_1^3 - \mu') + v^4 \left[\alpha_2 \left(\frac{5}{6} \mu x_1^3 - \frac{1}{3} \mu' \right) + \lambda_1 \left(\frac{1}{12} \mu \alpha_1^2 - \frac{1}{3} \mu' \alpha_1^2 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \lambda_1 \mu \alpha_1^3 - \frac{1}{4} \lambda_2 \mu \alpha_1^3 + \frac{1}{3} \lambda_2' \left(\mu x_1^4 - \frac{1}{4} \mu' \alpha_1 \right) + \frac{1}{8} v x_1^5 - \frac{1}{8} v' \alpha_1 \right] + v^5(\cdot) = 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

kteřá platí identicky pro všechna v . Odtud pro koeficienty $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2, \dots$ korespondence (4.1) plyne

$$a) \mu \alpha_1^3 - \mu' = 0,$$

$$b) \alpha_2 \left(\frac{5}{6} \mu \alpha_1^3 - \frac{1}{3} \mu' \right) = \lambda_1 \left(\frac{1}{3} \mu' \alpha_1^3 - \frac{1}{12} \mu \alpha_1^3 \right) - \frac{1}{4} \lambda_1' \mu \alpha_1^3 + \frac{1}{4} \lambda_2 \mu \alpha_1^3 - \frac{1}{3} \lambda_2' \alpha_1 \left(\mu \alpha_1^3 - \frac{1}{4} \mu' \right) - \frac{1}{8} v \alpha_1^3 + \frac{1}{8} v' \alpha_1 \quad (4.11)$$

a tedy

$$a) \alpha_1^{(3)} = \varepsilon^{(3)} \mu^{\frac{1}{3}} \mu'^{\frac{2}{3}};$$

$$b) \alpha_2^{(3)} = \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon^{(3)2} \mu^{-\frac{2}{3}} \mu'^{\frac{2}{3}} \left(\lambda_1 - \frac{1}{2} v \mu^{-1} \right) - \varepsilon^{(3)} \mu^{-\frac{1}{3}} \mu'^{\frac{1}{3}} \left(\lambda_2' - \frac{1}{2} v' \mu'^{-1} \right) + \lambda_2 \mu' \mu^{-1} - \lambda_1' \right\}$$

$$\left(i = 1, 2, 3; \varepsilon^{(1)} = 1, \varepsilon^{(2)} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \varepsilon^{(3)} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right). \quad (4.12)$$

V tomto případě v kongruenci $\mathbb{R}$ leží tři netriviální rozvinutelné plochy (resp. pláště), které procházejí bodem A a pro které regulární body křivek k_1, k_2 nejsou singulární. Přímký těchto ploch jdoucí bodem A jsou přímký (4.5b), kde α_1 je dáno podmínkami (4.12a); jsou to hlavní přímký křivek k_1, k_2 v jejich společném bodě A , jak plyne z (3.12) a (3.18).

Pro geometrickou konstrukci hlavních bodů platí věta:

Bod hrany vřatu netriviální rozvinutelné plochy P kongruence $\mathbb{R}$ na hlavní přímce křivek k_1, k_2 v bodě A je hlavním bodem křivek k_1, k_2 v bodě A . Obráceně: každý hlavní bod křivek k_1, k_2 v bodě A je bodem hrany vřatu netriviální rozvinutelné plochy P kongruence $\mathbb{R}$.

Důkaz. Necht

$$u = u(v) = \beta_0 + \beta_1 v + \frac{\beta_2}{2} v^2 + v^3 (\cdot) \quad (4.13)$$

je rovnice hrany vřatu netriviální rozvinutelné plochy P (kteřá prochází bodem A a nemá regulární bod křivek k_1, k_2 za singulární bod) kongruence $\mathbb{R}$. Po dosazení (4.13) do (4.5a) najdeme

$$\begin{aligned} X(v) &= X(\beta_0 + \beta_1 v + v^2 (\cdot), v) = \\ &= x_0(1 + \beta_0) + v(\beta_1 x_0 + \beta_0 \alpha_1 x_1 + g_1) + v^2 (\cdot). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Protože vylučujeme případy rozvinutelných ploch kongruence, pro něž je bod A singulární, platí ve (4.14) nutně $\beta_0 = -1$ a tedy pro bod hrany vřatu na tvořící přímce rozvinutelné plochy P najdeme

$$X(0) = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{X(v)}{v} = \beta_1 x_0 - \alpha_1 x_1 + g_1, \quad (4.15)$$

kde, za našich předpokladů o oskulačních rovinách křivek k_1, k_2 v bodě A koeficient α_1 je dán buď podmínkou (4.8a), nebo (4.12a). Zbývá ještě určit β_1 . V bodě hrany vřatu rozvinutelné plochy je tečná rovina

$$(X(u, v), y(v), x(\Phi(v)), y'(v) + u(v)x'(\Phi(v))) = 0 \quad (4.16)$$

neurčitá, a tedy matice (kde $h_1 = \alpha_2 + \lambda_1 \alpha_1^2$)

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{\lambda_0'}{2} v^2 + (\cdot), & \frac{\lambda_1'}{2} v^2 + (\cdot), \\ 1 + \frac{\lambda_0}{2} v^2 + (\cdot), & \alpha_1 v + \frac{1}{2} h_1 v^2 + (\cdot), \\ \lambda_0' v + (\cdot) + (\beta_0 + \beta_1 v + (\cdot))(\lambda_0 \alpha_1^2 v + (\cdot)), & \lambda_1' v + (\beta_0 + \beta_1 v + (\cdot))(\alpha_1 + h_1 v + (\cdot)), \\ v + \frac{\lambda_0'}{2} v^2 + (\cdot), & \frac{\lambda_1'}{2} v^2 + (\cdot) \\ \frac{\lambda_2}{2} \alpha_1^2 v^2 + (\cdot), & \frac{\lambda_2}{2} \alpha_1^2 v^2 + (\cdot) \\ 1 + \lambda_2' v + (\beta_0 + \beta_1 v + (\cdot))\lambda_2 \alpha_1^2 v, & \lambda_1' v + (\beta_0 + \beta_1 v + (\cdot))\lambda_2 \alpha_1^2 v \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

musí mít hodnotu menší než 3. K tomu je nutné a stačí, aby všechny třířádkové determinanty matice (4.17) byly rovny nule. Speciálně musí být rovný nule determinant z prvků 1., 2. a 3. sloupce matice (4.17):

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{\lambda_0'}{2} v^2 + (\cdot), & \frac{\lambda_1'}{2} v^2 + (\cdot), \\ 1 + \frac{\lambda_0}{2} v^2 + (\cdot), & \alpha_1 v + \frac{1}{2} (\alpha_2 + \lambda_1 \alpha_1^2) v^2 + (\cdot), \\ (\lambda_0' + \lambda_0 \beta_0 \alpha_1^2) v + (\cdot), & \beta_0 v_1 + (\lambda_1' + \lambda_1 \beta_0 \alpha_1^2 + \beta_0 v_2 + \beta_1 v_1) v + (\cdot), \end{vmatrix} \quad (4.18)$$

$$= v + \frac{\lambda_0'}{2} v^2 + (\cdot) + \frac{\lambda_2}{2} \alpha_1^2 v^2 + (\cdot) + 1 + (\lambda_2' + \lambda_2 \beta_0 \alpha_1^2) v + (\cdot) = (4.18)$$

$$\begin{aligned} &= v \alpha_1 (1 + \beta_0) + v^2 \left\{ \beta_1 \alpha_1 + \left(\frac{1}{2} + \beta_0 \right) \alpha_2 + \lambda_1 \alpha_1^2 \left(\frac{1}{2} + \beta_0 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \lambda_1' + \frac{1}{2} \lambda_2 \beta_0 \alpha_1^2 + \lambda_2' \alpha_1 \left(\frac{1}{2} \beta_0 + 1 \right) \right\} + v^3 (\cdot). \end{aligned}$$

Rovnice (4.18) platí identicky pro všechna v ; vzhledem k předpokladu $\alpha_1 \neq 0$, najdeme tedy odtud

$$\begin{aligned} a) \quad \beta_0 &= -1, \\ b) \quad \beta_1 &= \frac{1}{2\alpha_1} (\alpha_2 + \lambda_1 \alpha_1^2 - \lambda_1' + \lambda_2 \alpha_1^2 - \lambda_2' \alpha_1). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Nechť $\lambda \neq 0$, $\lambda' \neq 0$ (t. j. nechť oskulační roviny křivek k_1 , k_2 v bodě A jsou různé od jejich hlavní roviny v bodě A). Zvolíme-li bod $z \neq A$ na přímce obou oskulačních rovin ($\lambda_2 = \lambda'_1 = 0$), pak po dosazení (4.9) do (4.19b) dostaneme

$$\beta_1^{(i)} = \lambda^{-\frac{1}{2}} (\varepsilon^{(i)} \lambda_1 \lambda_2^{\frac{1}{2}} - \lambda_2 \lambda^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3} \varepsilon^{(i)} \lambda'^{-\frac{1}{2}} \lambda'^{-1} (\mu \lambda^{\frac{1}{2}} - \varepsilon^{(i)} \mu' \lambda^{\frac{1}{2}}) \quad (4.20)$$

$$(i = 1, 2; \quad \varepsilon^{(1)} = +1, \quad \varepsilon^{(2)} = -1).$$

Odtud je patrné, že body (4.15) (kam dosadíme za x_1 z (4.9) a za β_1 z (4.20)), t. j. body $-\lambda^{-\frac{1}{2}} \lambda' (\beta_1^{(i)} x_0 - \alpha_1^{(i)} x_1 + y_1)$, $i = 1, 2$, jsou hlavní body (3.22).

Nechť $\lambda = \lambda' = 0$, $\mu \neq 0$, $\mu' \neq 0$ (t. j. nechť oskulační roviny křivek k_1 , k_2 v bodě A nejsou stacionární a splývají s hlavní rovinou křivek k_1 , k_2 v bodě A). Po dosazení (4.12) do (4.19b) najdeme

$$\beta_1^{(i)} = \frac{3}{4} (\varepsilon^{(i)} \lambda_1 \mu^{-\frac{1}{2}} \mu'^{\frac{1}{2}} - \varepsilon^{(i)2} \lambda_1 \mu^{-\frac{1}{2}} \mu'^{-\frac{1}{2}} + \varepsilon^{(i)2} \lambda_2 \mu^{-\frac{3}{2}} \mu'^{\frac{3}{2}} - \lambda_2') - \frac{1}{8} (\varepsilon^{(i)} \mu \mu^{-\frac{1}{2}} \mu'^{\frac{1}{2}} - \nu' \mu'^{-1}),$$

$$\left(i = 1, 2, 3; \quad \varepsilon^{(1)} = 1, \quad \varepsilon^{(2)} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon^{(3)} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right). \quad (4.21)$$

Tedy body (4.15) (kam ještě dosadíme za x_1 z (4.9a) a za β_1 z (4.21)), t. j. body $-\lambda^{-\frac{3}{2}} \lambda' (\beta_1^{(i)} x_0 - \alpha_1^{(i)} x_1 + y_1)$, $i = 1, 2, 3$, jsou hlavní body (3.28), kde $\alpha_1^{(i)}$ a $\beta_1^{(i)}$ jsou dány vztahy (3.18) a (3.27).

Tím jsou všechna tvrzení věty dokázána.

5. Další konstrukce hlavních elementů

Konstrukci hlavních přímk a hlavních bodů křivek k_1 , k_2 v bodě A můžeme rovněž podat užitím kvadratických a kubických ploch, které mají s danými křivkami k_1 , k_2 v bodě A styk vhodné voleného řádu.

Pro analytické vyjádření užijeme tělož lokálního souřadnicového systému o vrcholech x_0 , x_1 , y_1 , z , kterého jsme užili v odst. 2. Je-li X bod prostoru, platí pro něj

$$X = \xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 y_1 + \xi_3 z. \quad (5.1)$$

Rovnici libovolné kvadriky Q můžeme pak psát ve tvaru

$$Q \equiv \sum_{i,k=0}^3 a_{ik} \xi_i \xi_k = 0, \quad (5.2)$$

kde a_{ik} jsou konstanty, nikoliv všechny současně rovny nule.

Pro společné body křivky $x(w)$, resp. $y(v)$ (o rovnicích (2.10a, b)) s kvadrikou (5.2) snadno najdeme rovnice

$$\begin{aligned} & a_{00} + 2a_{01}w + (\lambda_0 a_{00} + \lambda_1 a_{01} + \lambda_2 a_{02} + \lambda_3 a_{03} + a_{11})w^2 + [a_{00}^{(*)} + a_{01}^{(*)} + \\ & + a_{02}^{(*)}] + \frac{\mu}{3} a_{03} + \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \lambda_3 a_{13} \Big] w^3 + [a_{00}^{(*)} + a_{01}^{(*)} + a_{02}^{(*)} + \\ & + \left(\frac{\lambda_0}{2} + \frac{\nu}{12} \right) a_{03} + \left(\frac{\lambda_1^2}{4} + \frac{\mu_1}{3} \right) a_{11} + \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2}{2} + \frac{\mu_2}{3} \right) a_{12} + \left(\frac{\lambda_1}{2} + \frac{\mu}{3} \right) a_{13} + \\ & + \frac{\lambda_2^2}{4} a_{22} + \frac{\lambda_2 \lambda_3}{2} a_{23} + \frac{\lambda_3^2}{4} a_{33} \Big] w^4 + w^5 (*) = 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} & a_{00} + 2a_{02}v + (\lambda_0' a_{00} + \lambda_1' a_{01} + \lambda_2' a_{02} + \lambda_3' a_{03} + a_{22})v^2 + [a_{00}^{(*)} + a_{01}^{(*)} + \\ & + a_{02}^{(*)}] + \frac{\mu'}{3} a_{03} + \lambda_1' a_{12} + \lambda_2' a_{22} + \lambda_3' a_{23} \Big] v^3 + [a_{00}^{(*)} + a_{01}^{(*)} + a_{02}^{(*)} + \\ & + \left(\frac{\lambda_0' \lambda_1'}{2} + \frac{\nu'}{12} \right) a_{03} + \frac{\lambda_1'^2}{4} a_{11} + \left(\frac{\lambda_1' \lambda_2'}{2} + \frac{\mu_1'}{3} \right) a_{12} + \frac{\lambda_1' \lambda_1'}{2} a_{13} + \left(\frac{\lambda_2'^2}{4} + \frac{\mu_2'}{3} \right) a_{22} + \\ & + \left(\frac{\lambda_1' \lambda_2'}{2} + \frac{\mu'}{3} \right) a_{23} + \frac{\lambda_2'^2}{4} a_{33} \Big] v^4 + v^5 (*) = 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Z rovnic (5.3) a (5.4) plyne, že nutná a postačující podmínka pro to, aby kvadrika (5.2) měla s křivkami (2.10) v bodě A styk řádu $s-1$ ($s = 2, 3, 4, 5$), jest, aby měla styk řádu $s-2$ a aby ještě platilo

$$\begin{aligned} \text{a) } s = 2 : a_{00} = a_{01} = a_{02} = 0; \\ \text{b) } s = 3 : a_{11} = -\lambda_3 a_{03}, \quad a_{22} = -\lambda_1' a_{03}; \end{aligned}$$

$$\text{c) } s = 4 : \left(\frac{\mu}{3} - \lambda_1 \lambda_1' \right) a_{03} + \lambda_2 a_{12} + \lambda_3 a_{13} = 0;$$

$$\left(\frac{\mu'}{3} - \lambda_2' \lambda_2' \right) a_{03} + \lambda_1' a_{12} + \lambda_3' a_{23} = 0; \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \text{d) } s = 5 : & \left(\frac{\lambda_0}{2} + \frac{\nu}{12} - \frac{\lambda_1 \lambda_1^2}{4} - \frac{\lambda_1 \mu_1}{3} - \frac{\lambda_1' \lambda_2'^2}{4} \right) a_{03} + \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2}{2} + \frac{\mu_2}{3} \right) a_{12} + \\ & + \left(\frac{\lambda_1}{2} + \frac{\mu}{3} \right) a_{13} + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2} a_{22} + \frac{\lambda_2^2}{4} a_{33} = 0, \quad \left(\frac{\lambda_1' \lambda_0'}{2} + \frac{\mu_1'}{3} - \frac{\lambda_1' \lambda_2'}{4} - \frac{\lambda_1' \lambda_2'^2}{4} \right) a_{03} + \\ & + \left(\frac{\lambda_1' \lambda_2'}{2} + \frac{\mu_2'}{3} \right) a_{12} + \left(\frac{\lambda_1' \lambda_1'}{2} + \frac{\mu_1'}{3} \right) a_{13} + \left(\frac{\lambda_1' \lambda_2'}{2} + \frac{\mu'}{3} \right) a_{22} + \\ & + \frac{\lambda_2'^2}{4} a_{33} = 0. \end{aligned}$$

Dokážeme nyní větu:

Nechť oskulační roviny křivek k_1, k_2 v jejich společném bodě A nejsou stationární a necht' jsou různé od hlavní roviny křivek k_1, k_2 v bodě A . Necht' Q_{s-1} ($s = 2, 3, 4$) je kvadratika, která nemá v A singulární bod a která má s křivkami k_1, k_2 v bodě A styl řádu $s - 1$.

Těchť rovina kvadratiky Q_1 v bodě A je hlavní rovina křivek k_1, k_2 v bodě A . Hlavní rovina křivek k_1, k_2 v bodě A protíná kvadratiky Q_2 v přímkách, které tvoří páry involuce, jejíž samodružné přímkou jsou hlavní přímky křivek k_1, k_2 v bodě A . Příмка polární sdružená s průsečíci oskulačních rovin křivek k_1, k_2 v bodě A vzhledem ke kvadrice Q_3 protíná hlavní přímky v hlavních bodech křivek k_1, k_2 v bodě A .

Důkaz. Podle předpokladu o oskulačních rovinách křivek k_1, k_2 v bodě A jest $\lambda \neq 0, \lambda' \neq 0$; bod z ($\neq A$) souřadnicového systému zvolíme na průsečnici obou oskulačních rovin, tedy zvolíme $\lambda_2 = \lambda'_1 = 0$.

Tvrzení o hlavní rovině je speciálním případem známé věty (Čech [4]) a plyne okamžitě z toho, že pro kvadriku Q_1 platí (5.5a).

Rovnice kvadriky Q_2 jest

$$(2\xi_0^2\xi_3 - \lambda\xi_1^2 - \lambda'\xi_2^2)a_{03} + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + 2a_{13}\xi_1\xi_3 + 2a_{23}\xi_2\xi_3 + a_{33}\xi_3^2 = 0 \quad (5.6)$$

$$(a_{03} \neq 0).$$

Její tečná rovina v bodě A , t. j. rovina $\xi_3 = 0$, ji protíná v dvojici přímek

$$\lambda a_{03}\xi_1^2 - 2a_{12}\xi_1\xi_2 + \lambda'a_{03}\xi_2^2 = 0 \quad (5.7)$$

různé od dvojice tečen křivek k_1, k_2 v bodě A ($a_{03} \neq 0$), jež závisí na parametru a_{12} ; a_{03} a je párem involuce, jejíž samodružné přímky jsou

$$\sqrt{\lambda}\xi_1 \pm \sqrt{\lambda'}\xi_2 = 0, \quad (5.8)$$

což jsou, jak plyne porovnáním s (3.12) a (3.13), hlavní přímky dvojice křivek k_1, k_2 v bodě A .

Příмка polární sdružená s průsečíci oskulačních rovin křivek k_1, k_2 v bodě A vzhledem k libovolné kvadrice Q_1 je $a_{03}\xi_0 + a_{13}\xi_1 + a_{23}\xi_2 = 0$, a tedy za předpokladu, že daná kvadratika je Q_3 ,

$$\lambda\xi_0^2 + \lambda' \left(\lambda_1\xi_1 - \frac{\mu}{3} \right) \xi_1 + \lambda \left(\lambda_2\xi_2 - \frac{\mu'}{3} \right) \xi_2 = 0. \quad (5.9)$$

Na této přímce však leží hlavní body křivek k_1, k_2 v bodě A , jak se snadno přesvědčíme dosazením souřadnic hlavních bodů (3.22) do (5.9).

Mezi kvadratikami Q_{s-1} ($s = 2, 3, 4$) existují také kuželové plochy. Dokážeme za předpokladu, že oskulační roviny křivek k_1, k_2 v bodě A nejsou stationární a jsou různé od hlavní roviny křivek k_1, k_2 v bodě A , že pro ně platí:

Nutná a postačující podmínka, aby bod prostoru byl vrcholem kuželové plochy Q_1 , resp. Q_2 , resp. Q_3 , jest, aby byl různý od bodu A a ležel v hlavní rovině, resp. na hlavní přímce, resp. aby byl hlavním bodem křivek k_1, k_2 v bodě A .

Důkaz tvrzení je důsledkem definice hlavních elementů křivek k_1, k_2 v bodě A . O správnosti tvrzení věty se můžeme však také přesvědčit přímým výpočtem. Pro souřadnice $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ vreholu $V \neq A$ kuželové plochy Q_1 pro kterou tedy v (5.2) je nutné $a_{03} \neq 0, a_{12}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, platí

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} : -a_{03} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} : a_{03} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix} : 0; \quad (5.10)$$

je to bod ($\neq A$) hlavní roviny.

Dosaďme-li do (5.10) jednak z (5.5b) $a_{11} = -\lambda a_{03}, a_{22} = -\lambda' a_{03}$, jednak $a_{12} = \varepsilon^{(0)} \sqrt{\lambda\lambda'} a_{03}$ ($i = 1, 2; \varepsilon^{(1)} = 1, \varepsilon^{(2)} = -1$), dostaneme (vzhledem k tomu, že $\lambda \neq 0, \lambda' \neq 0$):

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{03}} \left(a_{23} - \varepsilon^{(1)} \sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda}} a_{13} \right) : \varepsilon^{(1)} \sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda}} : -1 : 0; \quad (5.11)$$

je to bod ($\neq A$) hlavní přímky.

Jestliže konečně volíme kuželovou plochu Q_3 , t. j. jestliže dosadíme do (5.10) ještě za a_{13} a a_{23} z (5.5c) (při současně volbě $\lambda_2 = \lambda'_1 = 0$) najdeme jako vrholy takových ploch Q_3 hlavní body (3.22).

Dokázaná věta umožňuje snadnou konstrukci hlavních přímek a hlavních bodů:

Konstrukce 1. Necht' h_i je jednoduchá oskulační kuželosečka křivky k_i ($i = 1, 2$) v bodě A (tedy necht' h_i má s k_i v bodě A styl 2. řádu) a necht' kuželosečky h_1, h_2 se protínají kromě v bodě A ještě v dalším bodě B ($\neq A$) průsečíce oskulačních rovin křivek k_1, k_2 sestroyených v jejich společném bodě A . Kuželosečky h_1, h_2 leží pak na dvou jednoduchých kuželových plochách. Spojnice jejich vrholů s bodem A jsou hlavní přímky křivek k_1, k_2 v bodě A .

Zvolíme-li za h_i ($i = 1, 2$) kuželosečku mající s křivkou k_i v bodě A styl 3. řádu, pak vreholy jednoduchých kuželových ploch určených kuželosečkami h_1, h_2 jsou hlavní body křivek k_1, k_2 v bodě A .

Jinou konstrukci hlavních přímek a hlavních bodů v případě kdy oskulační roviny křivek k_1, k_2 v bodě A nejsou stationární a jsou různé od hlavní roviny křivek k_1, k_2 v bodě A , dostaneme užitím obou předchozích vět.

Konstrukce 2. Necht' Q je libovolná jednoduchá kvadratika mající s křivkami k_1, k_2 v bodě A styl 2. řádu. Oskulační rovina křivky k_i ($i = 1, 2$) v bodě A je podle předpokladu různá od tečné roviny kvadratiky Q v bodě A . Protože tečný křivky k_1, k_2 neleží na Q , protíná oskulační rovina křivky k_i

($i = 1, 2$) v bodě A kvadriku Q v jednoduché kuželosečce h_i , která má s křivkou k_i v bodě A styk 2. řádu. Můžeme tedy kuželoseček h_1, h_2 užít k sestavení hlavních přímků křivek k_1, k_2 v bodě A podle konstrukce 1.

Zvolíme-li speciálně za Q jednoduchou kvadriku najíjející s křivkami k_i ($i = 1, 2$) v bodě A styk 3. řádu, pak kuželosečka h_i ($i = 1, 2$), v níž oskulaci rovina křivky k_i v bodě A protíná Q , má s k_i v bodě A styk 3. řádu a tedy vchovoly jednoduchých kuželových ploch určených kuželosečkami k_1, k_2 jsou hlavní body křivek k_1, k_2 v bodě A .

Poznámka. Je-li P libovolná plocha, na níž leží dané křivky k_1, k_2 (nebo mají-li křivky k_1, k_2 v bodě A s plochou P styk alespoň 3. řádu), pak kvadratika Q mající v A s křivkami k_1, k_2 styk 3. řádu je Darbouxova kvadratika plochy P v bodě A .

Pro křivky k_1, k_2 mající v bodě A nestacionární oskulaci roviny splývající s hlavní rovinou platí věta (Bompiani [2]; následující znění je formálně obecnější):

Nechť nestacionární oskulaci roviny křivek k_1, k_2 v bodě A splývají s jejich hlavní rovinou v bodě A .

Nutná a postačující podmínka pro to, aby existovala kvadratika Q_3 , jež nemá v A singulární bod a má s křivkami k_1, k_2 v bodě A styk třetího řádu, jest, aby hlavní body křivek k_1, k_2 byly kolinéární.

Důkaz. Za našich předpokladů, t. j. za předpokladu $\lambda = \lambda' = 0, \mu \neq 0, \mu' \neq 0$, plyne z (5.5a, b, c) pro Q_3

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad a_{00} &= a_{01} = a_{02} = a_{11} = a_{22} = 0, \\ \text{b)} \quad \frac{\mu}{3} a_{03} + \lambda_2 a_{12} &= 0, \quad \frac{\mu'}{3} a_{03} + \lambda'_1 a_{12} = 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Nutná a postačující podmínka, aby existovala nesložená kvadratika Q_3 , jest, aby existovalo nennulové řešení rovnice (5.12b), t. j. aby platila rovnice $\mu\lambda'_1 - \lambda_2\mu' = 0$. Je to rovnice (3.19) vyjadřující podmínku kolinéarity tří hlavních bodů křivek k_1, k_2 v bodě A .

Poznámka. Za předpokladu, že hlavní body jsou kolinéární, existuje svazek kvadrik, které mají s křivkami k_1, k_2 v bodě A styk řádu 4. Důkaz tohoto tvrzení plyne okamžitě z rovnice (5.12a) a z podmínky

$$a_{13} = -\frac{3}{\mu} \left(\frac{\lambda_1 \lambda'_2}{2} + \frac{\mu_2}{3} - \frac{\nu \lambda'_2}{4\mu} \right) a_{12}, \quad a_{23} = \frac{3}{\mu'} \left(\frac{\lambda'_1 \lambda_2}{2} + \frac{\mu'_1}{3} + \frac{\nu' \lambda'_1}{4\mu'} \right) a_{12}, \quad (5.13)$$

jež jsou důsledkem rovnice (5.5d) pro případ $\lambda = \lambda' = 0, \mu \neq 0, \mu' \neq 0$.

Geometrickou konstrukci hlavních přímků a hlavních bodů v případě křivek k_1, k_2 se společnou nestacionární oskulací rovinou v bodě A udáme užším kubické plochy.

Nechť je dana kubická plocha; její rovnice v souřadnicovém systému o vrcholech x_0, x_1, y_1, z je

$$K \equiv \sum_{i,j,k=0}^3 a_{ijk} \xi_i \xi_j \xi_k = 0, \quad (5.14)$$

kde a_{ijk} jsou konstanty, jež nejsou současně rovny nule. Pro její průsečky a křivkami $x = x(w)$ a $y = y(v)$ danými rovnicemi (2.10), v nichž nyní podle předpokladu je $\lambda = \lambda' = 0, \mu \neq 0, \mu' \neq 0$, najdeme

$$\begin{aligned} a_{000} + 3a_{001}w + \frac{3}{2} [\lambda_0 a_{000} + \lambda_1 a_{001} + \lambda_2 a_{002} + 2a_{011}]w^2 + [a_{000}^{(*)} + a_{001}^{(*)} + a_{002}^{(*)}] + \frac{1}{2} \mu a_{003} + 3\lambda_1 a_{011} + 3\lambda_2 a_{012} + a_{111}]w^3 + [a_{000}^{(*)} + a_{001}^{(*)} + a_{002}^{(*)}] + \frac{\nu}{8} a_{003} + 3 \left(\frac{\lambda_0}{2} + \frac{\lambda_1^2}{4} + \frac{\mu_1}{3} \right) a_{011} + \left(\frac{3}{2} \lambda_1 \lambda_2 + \mu_2 \right) a_{012} + \mu a_{013} + \frac{3}{4} \lambda_2^2 a_{022} + \frac{3}{2} \lambda_1 a_{111} + \frac{3}{2} \lambda_2 a_{112}]w^4 + w^5 (*) = 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} a_{000} + 3a_{002}v + \frac{3}{2} [\lambda'_0 a_{000} + \lambda'_1 a_{001} + \lambda'_2 a_{002} + 2a_{022}]v^2 + [a_{000}^{(*)} + a_{001}^{(*)} + a_{002}^{(*)}] + \frac{1}{2} \mu' a_{003} + 3\lambda'_1 a_{012} + 3\lambda'_2 a_{022} + a_{222}]v^3 + [a_{000}^{(*)} + a_{001}^{(*)} + a_{002}^{(*)}] + \frac{\nu'}{8} a_{003} + \frac{3}{4} \lambda'_1 a_{011} + \left(\frac{3}{2} \lambda'_1 \lambda'_2 + \mu'_1 \right) a_{012} + 3 \left(\frac{\lambda'_0}{2} + \frac{\lambda'^2_2}{4} + \frac{\mu'_2}{3} \right) a_{022} + \mu' a_{023} + \frac{3}{2} \lambda'_1 a_{122} + \frac{3}{2} \lambda'_2 a_{222}]v^4 + v^5 (*) = 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Nutná a postačující podmínka pro to, aby plocha K měla s křivkami k_1, k_2 v bodě A styk řádu $s - 1$ ($s = 3, 4, 5$), jest, aby měla styk řádu $s - 2$ a aby kromě toho byly splněny rovnice

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad s = 3: a_{000} &= a_{001} = a_{002} = a_{011} = a_{022} = 0; \\ \text{b)} \quad s = 4: \frac{1}{2} \mu a_{003} + 3\lambda_2 a_{012} + a_{111} &= 0, \\ &\quad \frac{1}{2} \mu' a_{003} + 3\lambda'_2 a_{012} + a_{222} = 0; \\ \text{c)} \quad s = 5: \frac{\nu}{8} a_{003} + \left(\frac{3}{2} \lambda_1 \lambda_2 + \mu_2 \right) a_{012} + \mu a_{013} + \frac{3}{2} \lambda_1 a_{111} + \frac{3}{2} \lambda_2 a_{112} &= 0, \\ &\quad \frac{\nu'}{8} a_{003} + \left(\frac{3}{2} \lambda'_1 \lambda'_2 + \mu'_1 \right) a_{012} + \mu' a_{023} + \frac{3}{2} \lambda'_1 a_{122} + \frac{3}{2} \lambda'_2 a_{222} = 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Užitím podmíněk (5.17) dokážeme větu:

Nechť oskulční roviny křivek k_1, k_2 v bodě A nejsou stacionární a necht splývají s hlavní rovinou křivek k_1, k_2 v bodě A .

Necht K_3 je kubická plocha, která nemá v A singulární bod, má s křivkami k_1, k_2 v bodě A styk 3. řádu a má v A oskulční bod (u, i), její tečná rovina v A protíná plochu v trojici přímků jdoucích bodem A).

Hlavní rovina křivek k_1, k_2 v bodě A protíná kubické plochy K_3 v trojicich přímků, jež náleží síti trojic přímků, jejíž splývající trojice jsou hlavní přímků křivek k_1, k_2 v bodě A .

Necht K_4 je kubická plocha, která nemá v A singulární bod, má s křivkami k_1, k_2 v A styk 4. řádu a jejíž tečná rovina v A ji protíná v jedné (trojnásob počítané) přímce p .

Přímka singulárních bodů své polary bodu A vzhledem ke kubické ploše K_4 protíná hlavní přímku p v hlavním bodě křivek k_1, k_2 v A .

Důkaz. Z podmíněk styku (5.17a, b) najdeme, že nutná a postačující podmínka pro to, aby kubická plocha K měla s křivkami k_1, k_2 v bodě A styk 3. řádu a neměla v bodě A singulární bod, jest, aby rovnice (5.14) byla tvaru

$$a_{333}\xi_3^3 + \xi_3^2 u_2(\xi_1, \xi_2) + 3\xi_3 \xi_1(a_{003}\xi_0 + 2a_{013}\xi_1 + 2a_{023}\xi_2) + \xi_3 u_2(\xi_1, \xi_2) + 6a_{012}\xi_1 \xi_2 - \left(\frac{1}{2} \mu a_{003} + 3\lambda_2 a_{012}\right) \xi_1^2 + 3a_{112}\xi_1^2 \xi_2 + 3a_{122}\xi_1 \xi_2^2 - \left(\frac{1}{2} \mu' a_{003} + 3\lambda_1' a_{012}\right) \xi_2^3 = 0, \quad (5.18)$$

kde

$$a_{003} \neq 0 \quad (5.19)$$

a kde u_i ($i = 1, 2$) jsou homogenní formy i -tého stupně ve vyznačených proměnných.

Z rovnice (5.18) je okamžitě zřejmé, že nutná a postačující podmínka, aby plocha (5.18) byla plochou K_3 , t. j. aby její tečná rovina $\xi_3 = 0$ v bodě A ji protínala v trojici přímků jdoucích bodem A , jest, aby

$$a_{012} = 0. \quad (5.20)$$

Plocha K_3 je pak prořezána tečnou rovinou $\xi_3 = 0$ v trojici přímků

$$\frac{1}{2} \mu a_{003} \xi_1^3 - 3a_{112} \xi_1^2 \xi_2 - 3a_{122} \xi_1 \xi_2^2 + \frac{1}{2} \mu' a_{003} \xi_2^3 = 0, \quad (5.21)$$

jež náleží lineární dvojparametrické soustavě přímkových trojic, v níž existují právě tři různé trojice splývajících přímků; dostaneme je, položíme-li v (5.21)

$$a_{112} = -\frac{1}{2} \epsilon^{(1)} \mu \mu' \frac{1}{3} a_{003}, \quad a_{122} = -\frac{1}{2} \epsilon^{(1)2} \mu \mu' \frac{1}{3} a_{003}, \quad (5.22)$$

$$\left(i = 1, 2, 3; \epsilon^{(1)} = 1, \epsilon^{(2)} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \epsilon^{(3)} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right).$$

Nalezené přímků mají rovnici

$$\mu^{\frac{1}{3}} \xi_1 + \epsilon^{(i)} \mu' \frac{1}{3} \xi_2 = 0; \quad (5.23)$$

jsou to tedy hlavní přímků (3.13), (3.18) křivek k_1, k_2 v bodě A .

Necht nyní K_4 je kubická plocha K (5.18), která je rovinou $\xi_3 = 0$ protínána v trojnásob počítané přímce (jež je nutné hlavní přímkou) a má s křivkami k_1, k_2 v bodě A styk 4. řádu, její rovnice je

$$a_{333}\xi_3^3 + \xi_3^2 u_1(\xi_0, \xi_1, \xi_2) + 3\xi_3 \xi_0(a_{003}\xi_0 + 2a_{013}\xi_1 + 2a_{023}\xi_2) + \xi_3 u_1(\xi_1, \xi_2) - \frac{1}{2}(\xi_1 \mu' + \epsilon^{(i)} \xi_2 \mu')^3 a_{003} = 0, \quad (5.24)$$

v níž kromě podmíněk (5.19), (5.20) a (5.22) platí ještě (5.17c).

Prvá (kvadratická) polára bodu A vzhledem k ploše (5.24) je tedy

$$\xi_3(a_{003}\xi_0 + a_{013}\xi_1 + a_{023}\xi_2 + \xi_3(*)) = 0; \quad (5.25)$$

rozpadá se zřejmě na rovinu $\xi_3 = 0$ a na další rovinu různou od $\xi_3 = 0$. Singulární body své polary (5.25) vyplní přímku

$$a_{003}\xi_0 + a_{013}\xi_1 + a_{023}\xi_2 = 0. \quad (5.26)$$

Rovnici (5.26) můžeme po dosazení z (5.17c) a po vykrácení $a_{003} \neq 0$ upravit na tvar

$$8\xi_0 + (6\lambda_1 + 6\lambda_2 \epsilon^{(i)} \mu^{-\frac{1}{3}} \mu'^{\frac{1}{3}} - \mu \mu^{-1} \xi_1 + (6\lambda_1' \epsilon^{(i)2} \mu \mu'^{\frac{1}{3}} + 6\lambda_2' - \mu' \mu'^{-1}) \xi_2) = 0. \quad (5.27)$$

Shadno se přesvědčíme, že přímka (5.27) protíná hlavní přímku (5.23) v hlavním bodě (3.28) (kde $a_i^{(i)}, b_i^{(i)}$ jsou dány podmínkami (3.18) a (3.27)).

Tím jsou všechna tvrzení věty dokázána.

Jinou geometrickou konstrukci hlavních elementů, v případě kdy nestacionární oskulční roviny křivek k_1, k_2 v bodě A splývají, je možno uvést užitím kubických kuželových ploch, které mají vhodné volené styk s danými křivkami k_1, k_2 v bodě A . Platí:

Necht K_{s-1} ($s = 3, 4, 5$) je kubická kuželová plocha, která nemá vrchol v bodě A a má s křivkami k_1, k_2 v bodě A , jejížž nestacionární oskulční roviny v bodě A splývají, styk řádu $s - 1$.

Nutná a postačující podmínka, aby bod prostoru byl vrcholem kuželové plochy K_s , resp. K_3 , resp. K_4 , jest, aby byl různý od bodu A a ležel v hlavní rovině, resp. na hlavní přímce, resp. aby byl hlavním bodem křivek k_1, k_2 v bodě A .

Důkaz. Kubická plocha K (5.14) je jednoduchou kuželovou plochou právě tehdy, když existuje právě jedno řešení rovnice

$$\sum_{k=0}^3 a_{ik} \xi_k = 0 \quad (i, j = 0, 1, 2, 3). \quad (5.28)$$

Za předpokladu, že daná kubická plocha má s křivkami k_1, k_2 v bodě A styk 2. řádu, platí pro koeficienty a_{ijk} rovnice (5.17a).

Abych kubická plocha (5.14) byla kuželovou plochou K_2 , musí nutně existovat řešení rovnice (5.28) různé od bodu $(1; 0; 0; 0)$, a tedy musí existovat nenulové řešení tří rovnic (5.28) pro $ij = 00, 01, 02$:

$$\begin{aligned} a_{003}\xi_3 &= 0, \\ a_{012}\xi_2 + a_{013}\xi_3 &= 0, \\ a_{012}\xi_1 + a_{023}\xi_3 &= 0. \end{aligned} \quad (5.29)$$

K tomu je nutné a stačí, aby determinant soustavy (5.29) byl nulový, t. j. aby $a_{003}a_{012} = 0$. Vzhledem k tomu, že bod A musí být jednoznačným bodem plochy K_2 , jest $a_{003} \neq 0$, a tedy z předchozí podmínky plyne

$$a_{012} = 0. \quad (5.30)$$

Z rovnice (5.29) již plyne, že všechny kubické kuželové plochy K_2 mají svůj vrchol v hlavní rovině $\xi_3 = 0$ křivek k_1, k_2 v bodě A . Užitím rovnice (5.28) se snadno ukáže, že také obráceně každý bod (různý od A) roviny $\xi_3 = 0$ je vrcholem kubické kuželové plochy K_2 . Je-li $(\xi_0; \xi_1; \xi_2) \neq (1; 0; 0)$ libovolný pevný bod roviny $\xi_3 = 0$, pak totiž rovnice (5.28) spolu s rovnicemi (5.17a) a (5.30) představují 13 lineárních homogenních rovnic pro 20 homogenních proměnných a_{ijk} , jež jsou vázány jednou nerovností $a_{003} \neq 0$. Je tedy možno určit a_{ijk} tak, aby zvolený bod byl jediným řešením soustavy rovnic (5.28).

Abych kubická plocha (5.14) byla kuželovou plochou K_3 , musí být jednak plochou K_2 , jednak musí splňovat podmínky styku 3. řádu s křivkami k_1, k_2 v bodě A , a tedy pro koeficienty a_{ijk} její rovnice musí kromě (5.17a), (5.30) platit ještě podmínky (5.17b). Rovnice (5.28) musí mít řešení $(\xi_0; \xi_1; \xi_2; 0) \neq (1; 0; 0; 0)$, a tedy speciálně rovnice (5.28) pro $ij = 11, 12, 22$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\mu a_{003}\xi_1 + a_{112}\xi_2 &= 0, \\ a_{112}\xi_1 + a_{122}\xi_2 &= 0, \end{aligned} \quad (5.31)$$

musí mít nenulové řešení. Vzhledem k podmínce $a_{003} \neq 0$, nutná a postačující podmínka, aby rovnice (5.31) měly nenulové řešení, je splnění rovnice

$$a_{112} \equiv -\frac{1}{2}\mu' a_{003}\xi_2 = 0, \quad a_{122} \equiv -\frac{1}{2}\mu' a_{003}\xi_1 = 0, \quad (5.32)$$

Nalezené podmínky jsou však podmínky (5.22), a tedy kubické kuželové plochy K_3 mají své vrcholy na hlavních přímkách křivek k_1, k_2 v bodě A .

Snadno se uvěří, že obráceně každý bod hlavní přímky (různý od bodu A) je vrcholem kubické kuželové plochy K_3 . Při daném bodu $(\xi_0; \xi_1; \xi_2; 0) \neq (1; 0; 0; 0)$ ležícím na hlavní přímce rovnice (5.28) spolu s rovnicemi (5.17a, b), (5.30) a (5.32) představují 14 lineárních homogenních rovnic pro 20 homogenních proměnných a_{ijk} , jež jsou vázány jednou nerovností $a_{003} \neq 0$. Je tedy možno určit a_{ijk} tak, aby zvolený bod byl jediným řešením soustavy rovnic (5.28).

Abych konečně kubická plocha (5.14) byla kuželovou plochou K_4 , musí být jednak kuželovou plochou K_3 , jednak musí mít s křivkami k_1, k_2 v bodě A styk 4. řádu. Tedy pro koeficienty a_{ijk} její rovnice kromě (5.17a, b), (5.30) a (5.32) musí ještě platit (5.17c). Souřadnice vrcholu kuželové plochy K_4 musí vyhovovat rovnici (5.28), a tedy speciálně také rovnici pro $ij = 03$, t. j. rovnici

$$a_{003}\xi_0 + a_{013}\xi_1 + a_{023}\xi_2 = 0, \quad (5.33)$$

kde

$$\begin{aligned} a_{013} &= \frac{1}{8}(6\lambda_1 + 6\lambda_2 e^{v_1}\mu^{-\frac{1}{2}}\mu' - v_1\mu^{-1})a_{003}, \\ a_{023} &= \frac{1}{8}(6\lambda_1' e^{v_1}\mu^{-\frac{1}{2}}\mu' + 6\lambda_2' - v_1'\mu^{-1})a_{003}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Protože rovnice (5.33) s koeficienty (5.34) je rovnicí (5.27), vrcholy kuželových ploch K_4 jsou hlavní body křivek k_1, k_2 v bodě A . Obráceně každý hlavní bod je vrcholem kuželové plochy K_4 . Dosadíme-li totiž souřadnice hlavního bodu do (5.28), dostaneme spolu s (5.17a, b, c), (5.30) a (5.32) celkem 15 lineárních homogenních rovnic pro 20 homogenních proměnných a_{ijk} , které jsou vázány jednou nerovností $a_{003} \neq 0$. Je tedy možno určit a_{ijk} tak, aby hlavní bod byl jediným řešením soustavy (5.28). Tím je věta dokázána.

Závěrem uvedeme ještě jednu větu, která udává geometrickou podmínku pro kolinearitu hlavních bodů křivek k_1, k_2 , které ve společném bodě A mají splývající nestacionární oskulační roviny.

Nutná a postačující podmínka, aby hlavní body křivek k_1, k_2 v bodě A byly kolineární, jest, aby existovala kubická plocha, pro níž bod A není singulární, která má s křivkami k_1, k_2 v bodě A styk 3. řádu a která prochází tečnami obou křivek k_1, k_2 v bodě A .

Důkaz. Z rovnice (5.18), která spolu s podmínkou (5.19) určuje kubickou plochu, jež nemá v A singulární bod a má s křivkami k_1, k_2 v bodě A styk 3. řádu, plyne, že tečny $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0$ a $\xi_3 = 0$ křivek k_1, k_2 v bodě A na ní leží právě tehdy, když

$$\frac{1}{2}\mu a_{003} + 3\lambda_2 a_{012} = 0, \quad \frac{1}{2}\mu a_{003} + 3\lambda_2' a_{012} = 0, \quad (5.35)$$

Rovnice (5.35) jsou dvě lineární homogenní rovnice pro neznámé a_{003}, a_{012} . Vzhledem k podmínce (5.19) musí (5.35) mít nenulové řešení. K tomu je však nutné a stačí, aby determinant soustavy byl nulový

$$\mu\lambda'_1 - \mu'\lambda_2 = 0; \quad (5.36)$$

to však je již známá rovnice (3.19) pro kolinearnost hlavních bodů.

LITERATURA

1. Bompiani E., Sul contatto di due curve sghembe, *Memorie dell' Accademia delle Scienze di Bologna*, sv. 3(8), 1925—1926. 2. Bompiani E., Invarianti d'intersezione di due curve sghembe, *Rendiconti del Lineei*, XIV, serie 6a, 29sem., sv. 11, 1931. 3. Bompiani E., Sulle curve sghembe, *Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari*, Pavia 1936. 4. Čech E., Projektivní diferenciální geometrie, Praha 1926. 5. Čech E., Pro přímé projekcevis du contact I, *Spisy vydávané přírod. fak. Masarykovy univ.*, Brno 1928, č. 91. 6. Halphen, Sur les invariants différentiels des courbes gauches, *Journal de l'École Polytechnique*, Paris, XXVIII, 1, 1880. 7. Urban A., Štyk křivek v projektivním prostoru, Šporník I., vědecká konference ČVUT, fakulta strojní, 1956. 8. Urban A., Théorème fondamental de la théorie du contact des courbes, *Čex. mat. zpráva* 1957, sv. 7(52), c. 2.

Došlo 27. 3. 1957.

AUGMENTATION DU CONTACT DES COURBES PAR PROJECTION

ALOIS URBAN

Résumé

Les premiers résultats dans la solution du problème d'augmentation du contact des courbes par projection sont dus à Halphen [6], qui a trouvé, que les projections de deux courbes ayant, à un point commun, un contact d'ordre $s-1$ ($s \geq 1$), des points d'un plan, appelé plan principal, ont le contact d'ordre s .

Plus tard, Bompiani [1] et Čech [4], [5] ont démontré qu'il existe (sous certaines suppositions) dans le plan principal une droite principale et un point principal (appartenant à la droite principale) tels que les projections des courbes données ont le contact d'ordre $s+1$ où $s+2$ lorsque le centre de la projection est situé sur la droite où dans le point en vue.

Le problème était résolu par Bompiani [2], [3], même pour les courbes n'ayant aucun point commun et pour les courbes rencontrantes l'une l'autre ($s=1$). Dans le dernier cas, la construction géométrique n'était pas donnée.

Dans ce Mémoire on s'occupe du problème d'augmentation du contact des courbes qui permet en même temps de donner une construction géométrique de tous les points, projetant les courbes données dans les courbes ayant un contact plus grand que 0. En outre, quelques autres constructions géométriques des droites principales et des points principaux sont développées.

Étant données, dans un espace S_3 , deux courbes

$$C_1 \equiv x = x(v), \quad C_2 \equiv y = y(v); \quad (1)$$

ayant au point commun A , correspondant aux valeurs $v=0$ et $v=0$, un contact d'ordre précisément 0, les points $x_0 = y_0$, x_1 , y_1 , $\left[\left[\frac{d^2 x(v)}{dv^2} \right]_{v=0} = x_2, \left[\frac{d^2 y(v)}{dv^2} \right]_{v=0} = y_2 \right)$ déterminent un plan (le plan principal) tangent au point A simultanément les courbes C_1, C_2 . Si l'on choisit un point z de telle manière que les points x_0, x_1, y_1, z soient linéairement indépendants, on peut écrire

$$\begin{aligned} x_2 &= \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 y_1 + \lambda_2 z, & y_2 &= \lambda'_0 x_0 + \lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 y_1 + \lambda'_2 z, \\ x_3 &= \mu_0 x_0 + \mu_1 x_1 + \mu_2 y_1 + \mu_2 z, & y_3 &= \mu'_0 x_0 + \mu'_1 x_1 + \mu'_2 y_1 + \mu'_2 z, \\ x_4 &= \nu_0 x_0 + \nu_1 x_1 + \nu_2 y_1 + \nu_2 z, & y_4 &= \nu'_0 x_0 + \nu'_1 x_1 + \nu'_2 y_1 + \nu'_2 z. \end{aligned} \quad (2)$$

En développant les fonctions (1) en séries, en faisant usage de (2), en introduisant la correspondance analytique

$$v = F(v) = a_1 v + \frac{a_2}{2} v^2 + \frac{a_3}{3!} v^3 + \frac{a_4}{4!} v^4 + \dots, \quad C_1 \neq 0, \quad (3)$$

et en multipliant les fonctions x par le facteur

$$q = 1 + b_1 v + \frac{b_2}{2} v^2 + \frac{b_3}{3!} v^3 + \frac{b_4}{4!} v^4 + \dots, \quad (4)$$

(Čech [5], Urban [7], [8]), on obtient en définitive

$$\begin{aligned} \tilde{x} = q(v)x(F(v)) &= x_0 \left[1 + b_1 v + \frac{1}{2} (2b_0 a_1^2 + b_2) v^2 + \frac{1}{3!} (2b_0 b_1 + \mu_0 a_1^2 + b_3) v^3 + \frac{1}{4!} (2b_0 b_2 + \right. \\ &+ \mu_0 b_3 + \nu_0 a_1^3 + b_4) v^4 + \dots \left. \right] + x_1 \left[a_1 v + \frac{1}{2} (2a_1 a_2 + 2a_0 b_1 + a_2) v^2 + \frac{1}{3!} (2a_1 b_1 + \mu_1 a_1^2 + \right. \\ &+ 3a_0 b_2 + 3a_0 b_1 + a_3) v^3 + \frac{1}{4!} (2a_1 b_2 + \mu_1 b_3 + \nu_1 a_1^3 + 4a_0 b_2 + 4a_0 b_1 + a_4) v^4 + \dots \left. \right] + \\ &+ y_1 \left[\frac{1}{2} 2a_1 a_2 v^2 + \frac{1}{3!} (2a_1 b_1 + \mu_0 a_1^2) v^3 + \frac{1}{4!} (2a_1 b_2 + \mu_0 b_3 + \nu_0 a_1^3) v^4 + \dots \right] + \\ &+ \frac{1}{3!} (\mu_1 x_1 + \mu_0 a_1^2) v^3 + \frac{1}{4!} (2b_2 + \mu_1 b_3 + \nu_1 a_1^3) v^4 + \dots \left. \right] \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} y &= x_0 \left[1 + \frac{\lambda'_0}{2} v^2 + \frac{\mu'_0}{3!} v^3 + \frac{\nu'_0}{4!} v^4 + \dots \right] + x_1 \left[\frac{\lambda'_1}{2} v^2 + \frac{\mu'_1}{3!} v^3 + \frac{\nu'_1}{4!} v^4 + \dots \right] + \\ &+ y_1 \left[v + \frac{\lambda'_2}{2} v^2 + \frac{\mu'_2}{3!} v^3 + \frac{\nu'_2}{4!} v^4 + \dots \right] + z \left[\frac{\lambda'_3}{2} v^2 + \frac{\mu'_3}{3!} v^3 + \frac{\nu'_3}{4!} v^4 + \dots \right] \end{aligned}$$

où $h_1 = 3(a_1 a_2 + a_1 b_1)$, $h_2 = 4a_1 a_3 + 3a_2^2 + 12a_1 a_2 b_1 + 6a_1^2 b_2$, $h_3 = 2(3a_1^2 a_2 + 2a_1^2 b_1)$.

Étant donné n'importe quel centre de projection S et plan de projection ξ , dont les coordonnées sont assujetties à la condition $(S, \xi) = 1$, les projections C_1, C_2 des courbes C_1, C_2 sont données par les équations

$$C_1 \equiv \tilde{x} = \tilde{x}(v), \quad C_2 \equiv \tilde{y} = \tilde{y}(v), \quad (6)$$

On trouve, des relations

$$X_v = Y_v \quad (v = 0, 1, 2, \dots, \sigma - 1) \quad (7)$$

qui expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que les projections C_1, C_2

aient un contact d'ordre $\sigma - 1$ ($\sigma \geq 1$) au point A , qu'il existe des nombres a_v, b_v ($v = 1, \dots, \sigma - 1$; $a_1 \neq 0$) tels que les équations

$$q_v S = x_v - y_v \quad (v = 0, 1, \dots, \sigma - 1) \quad (8)$$

sont satisfaites.

On peut déduire des conditions (8) (Bompiani [2]):

Théorème 1. Les courbes C_1, C_2 ont au point A un contact d'ordre 1 lorsque et seulement lorsque S est un point du plan principal, qui n'appartient pas aux tangentes des courbes C_1, C_2 au point A .

L'équation du plan principal est

$$q_1 S = b_1 x_0 + a_1 x_1 - y_1. \quad (9)$$

Théorème 2. Si les plans osculateurs des courbes C_1, C_2 au point A sont différents du plan principal, il y a au plan principal, deux droites distinctes (droites principales) passant par le point A : les courbes C_1, C_2 se projettent des points ($\neq A$) de ces droites et des tangentes des courbes C_1, C_2 au point A sont harmoniques. Sur chaque droite est situé un tel point (point principal), que les projections C_1, C_2 des courbes C_1, C_2 de ces points ont un contact d'ordre 3.

Les droites principales sont données par l'équation (9), où $a_1 = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}}$. Si nous choisissons z sur la droite d'intersection des plans osculateurs, les points principaux sont

$$\left[\lambda \lambda' \lambda^{\frac{1}{2}} \mp \lambda_1 \lambda'^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} (\mu' \lambda^{\frac{3}{2}} \mp \mu \lambda'^{\frac{3}{2}}) \right] x_0 \pm \lambda \lambda'^{\frac{1}{2}} x_1 - \lambda^{\frac{3}{2}} \lambda' y_1.$$

Théorème 3. Si les plans osculateurs des courbes C_1, C_2 au point A et le plan principal sont confondus, les courbes C_1, C_2 se projettent de chaque point ($\neq A$) du plan principal dans les courbes ayant au point A' un contact d'ordre 2. Si le plan principal n'est pas stationnaire pour aucune des courbes C_1, C_2 , il y a dans le plan principal trois droites distinctes (les droites principales) passant par le point A , des points desquelles ($\neq A$) les courbes C_1, C_2 se projettent dans les courbes ayant au point A' un contact d'ordre 3. Les trois droites principales forment un trièdre des droites épipolaires par rapport au couple des tangentes des courbes C_1, C_2 au point A . Sur chaque droite principale il y a un point (point principal); les courbes C_1, C_2 se projettent de ce point dans les courbes ayant un contact d'ordre 4. Les points principaux sont colinéaires alors et alors seulement si l'équation $\mu \lambda_1' - \mu' \lambda_2 = 0$ est vraie.

Les droites principales sont données par l'équation (9), où on doit poser pour a_1 l'un des nombres $a_1^{(i)} = \varepsilon^{(i)} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}}$ ($\varepsilon^{(1)} = 1, \varepsilon^{(2)} = -1 + i\sqrt{3}, \varepsilon^{(3)} = -1 - i\sqrt{3}$). En choisissant un des nombres $a_1^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$), les points principaux sont donnés par (9), où on pose b_1 égal à

$$b_1^{(i)} = \frac{1}{8} (-6\varepsilon^{(i)} \lambda_1 \mu^{\frac{1}{2}} \mu'^{\frac{1}{2}} + 6\varepsilon^{(i)} \lambda_1 \mu^{\frac{1}{2}} \mu'^{\frac{1}{2}} - 6\varepsilon^{(i)} \lambda_2 \mu^{\frac{3}{2}} \mu'^{\frac{3}{2}} + 6\lambda_2' + \varepsilon^{(i)} \mu \mu'^{\frac{3}{2}} \mu'^{\frac{1}{2}} - \mu' \mu'^{\frac{1}{2}}).$$

Pour donner l'interprétation géométrique des résultats trouvés, nous rappelons que la correspondance analytique

$$w = \Phi(v) = x_1 v + \frac{x_2}{2} v^2 + \dots, x_1 \neq 0, \quad (10)$$

détermine une surface réglée dans la congruence des droites donnée par les courbes focales C_1, C_2 . Sa génératrice $p(0)$ passant par le point A est donnée par l'expression $p(v) = (y(v), x(\Phi(v))) = (x_0, x_1 x_1' - y_1 v + v^2)$ pour $v \rightarrow 0$

$$p(0) = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{p(v)}{v} = (x_0, \alpha_1 x_1' - y_1). \quad (11)$$

Si la surface (10) est développable, la condition que les plans tangents aux points $x(\Phi(v))$ et $y(v)$ de la droite $p(v)$ sont confondus ($v \neq 0$) nous donne l'équation

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} x_1 v^2 (\lambda x_1^2 - \lambda') + v^3 \left[-\frac{1}{2} x_1 \lambda' + \lambda x_1^2 x_2 + \frac{1}{2} (\lambda_1 \lambda' - \lambda_1 \lambda') x_1^2 - \frac{1}{2} (\lambda_2 \lambda' - \lambda_2 \lambda') x_1^3 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{3} \mu x_1^4 - \frac{1}{3} \mu' x_1 \right] + v^4 \left[\frac{5}{6} \mu x_1^3 - \frac{1}{3} \mu' \right] + \lambda_1 \left(\frac{1}{12} \mu x_1^5 - \frac{1}{3} \mu' x_1^3 \right) + \frac{1}{4} \lambda_1' \mu x_1^3 - \\ & - \frac{1}{4} \lambda_2 \mu' x_1^3 + \frac{1}{3} \lambda_2' \left(\mu x_1^4 - \frac{1}{4} \mu' x_1 \right) + \frac{1}{8} v x_1^3 - \frac{1}{8} v' x_1 + \lambda(v) + \lambda'(v) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

valable identiquement pour chaque v . En supposant que les plans osculateurs des courbes C_1, C_2 au point A et le plan principal sont distincts (et en choisissant $\lambda_2 = \lambda_1' = 0$) nous trouvons $x_1 = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}}$; en supposant que les plans osculateurs ne sont pas stationnaires, mais sont confondus avec le plan principal ($\lambda = \lambda' = 0$), nous obtenons $\alpha_1 = \varepsilon \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}, \varepsilon^2 = 1$. En comparant les résultats trouvés avec les théorèmes 2 et 3, nous obtenons:

Théorème 4. Chaque droite principale au point A des courbes C_1, C_2 (et seulement une telle droite) est la droite de la surface développable (qui n'est pas un cône projetant une courbe donnée du point d'autre courbe donnée) appartenante au congruence des droites déterminée par les courbes C_1, C_2 .

Si

$$u = u(v) = \beta_0 + \beta_1 v + \frac{\beta_2}{2} v^2 + v^3 \quad (13)$$

est l'équation de l'arête de rebroussement de la surface développable, son point $X(v)$ sur la droite $p(v)$ est donné par $X(v) = v(\beta_1 x_0 - x_1 x_1' + y_1) + v^2$ et c'est pourquoi le point $X(0)$ sur $p(0)$ est déterminé par

$$X(0) = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{X(v)}{v} = \beta_1 x_0 - \alpha_1 x_1 + y_1. \quad (14)$$

Le plan tangent de la surface développable au point de l'arête de rebroussement étant indéterminé, nous trouvons l'équation

$$\begin{aligned} & v x_1 (1 + \beta_0) + v^2 \left\{ \beta_1 \alpha_1 + \left(\frac{1}{2} + \beta_0 \right) \alpha_2 + \lambda_1 x_1^3 \left(\frac{1}{2} + \beta_0 \right) + \frac{1}{2} \lambda_1' + \frac{1}{2} \lambda_2 \beta_0 x_1^3 + \right. \\ & \left. + \lambda_2' \alpha_1 \left(\frac{1}{2} \beta_0 + 1 \right) \right\} + v^3 (\cdot) = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

valable identiquement pour chaque v . On en peut déterminer β_1 . En supposant que les plans osculateurs des courbes C_1, C_2 au point A et le plan principal sont distincts, on obtient (en choisissant $\lambda_2 = \lambda_1' = 0$)

$$\beta_1 = \lambda^{\frac{1}{2}} (\varepsilon \lambda_1 \lambda^{\frac{1}{2}} - \lambda_2 \lambda^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3} \varepsilon \lambda^{\frac{3}{2}} \lambda^{-1} (\mu \lambda^{\frac{3}{2}} - \varepsilon \mu' \lambda^{\frac{3}{2}}), \quad \varepsilon^2 = 1;$$

en supposant que tous les deux plans osculateurs (qui ne sont pas stationnaires) et le plan principal sont confonctus, on obtient

$$\beta_1 = \frac{3}{4} (e^2 h_1 \mu^{-\frac{1}{3}} \mu'^{\frac{2}{3}} - e^2 h_1 \mu'^{\frac{1}{3}} \mu^{-\frac{2}{3}} + e^2 h_2 \mu^{-\frac{2}{3}} \mu'^{\frac{2}{3}} - h_2) - \frac{1}{8} (e^2 \mu^{-\frac{1}{3}} \mu'^{\frac{1}{3}} - \mu' \mu^{-1}), \quad e^3 = 1.$$

En comparant les résultats trouvés avec les théorèmes 2 et 3, nous trouvons:

Théorème 5. *Chaque point principal au point A des courbes C_1, C_2 (et seulement un tel point) est le point de l'arête de rebroussement de la surface développable (qui n'est pas un cône projetant une courbe donnée du point d'autre courbe donnée) appartenante au congruence des droites déterminée par les courbes C_1, C_2 .*

En utilisant des cônes quadratiques et cubiques ayant avec des courbes données C_1, C_2 au point A un contact d'ordre convenablement choisi, on a trouvé encore quelques constructions ultérieures des droites principales et des points principaux.

On peut démontrer particulièrement la construction suivante (en supposant que les plans osculateurs des courbes données au point A ne sont pas stationnaires et sont différents du plan principal). Si les courbes C_1, C_2 sont situées sur une surface κ , on détermine une quadrique Q ayant avec la surface κ au point A un contact d'ordre 3. Les plans osculateurs des courbes C_1, C_2 au point A rencontrent la quadrique Q aux coniques h_1, h_2 . Les droites joignant les sommets des cônes déterminés par h_1, h_2 avec le point A sont les droites principales, les sommets des cônes sont les points principaux.