MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK VII ČÍSLO 4

# O ISTÝCH PRIESTOROCH RADOV S BAIROVSKOU METRIKOU

TIBOR ŠALÁT
Katedra matematiky Univerzity Komenského v Bratislave

Nech

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

je rad s kladnými členmi. Nech

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n, \ldots \tag{2}$$

je postupnosť, v ktorej pre každé prirodzené $n$ je $\varepsilon_n = 1$ alebo $-1$.

Označme znakom X množinu všetkých radov $x$, kde

$$x = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \varepsilon_3 a_3 + \ldots + \varepsilon_n a_n + \ldots$$

X je zrejme nespočítateľná množina mohutnosti kontinua. Ďalej definujme na množine $X \times X$ funkciu $\varrho(x, y)$ takto: Ak $x, y \in X$,

$$x = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n + \ldots,$$
$$y = \varepsilon_1' a_1 + \varepsilon_2' a_2 + \ldots + \varepsilon_n' a_n + \ldots,$$

potom $\varrho(x, y) = 0$, ak $x = y$, ak však $x \neq y$, potom $\varrho(x, y) = \frac{1}{k}$, kde $k$ je najmenší index s vlastnosťou: $\varepsilon_k \neq \varepsilon_k'$. V práci [3] je dokázané, že takto definovaná funkcia je metrikou na $X$. O priestore $(X, \varrho)$ je taktiež v [3] dokázané, že je to kompaktný priestor. Metrika $\varrho(x, y)$ je zrejme analogická s metrikou Bairovho priestoru.

V prvých dvoch odsekoch tejto práce budeme predpokladať, že rad (1) konverguje. V treťom odseku podáme isté zovšeobecnenie výsledkov práce [4] pre divergentné rady.

## 1.

Nech (1) je konvergentný rad. Pre každé $x \in X$ $S(x)$ značí súčet radu $x$. $S(x)$ je funkcia definovaná na celom priestore $X$. V práci [3] je dokázané, že $S(x)$ je spojitá na $(X, \varrho)$. Označme znakom $W$ množinu všetkých tých reálnych čísel, z ktorých každé je súčtom nejakého radu $x \in X$, teda $W = S(X)$. Zrejme $W \subset \langle -A, A \rangle$, kde $A$ je súčet radu (1).

V tomto odseku budeme vyšetrovať podmienky, za ktorých je $S(x)$ prostým (alebo homeomorfným) zobrazením.

Pre stručnosť vyjadrovania zavedieme toto pomenovanie: Postupnosť $\{\eta_l\}_l$, kde index $l$ prebieha nejakú spočítateľnú množinu prirodzených čísel a $\eta_l$ je pre každé $l$ jedným z čísel $0, 1, -1$, budeme nazývať postupnosťou typu $(\eta)$.

Dokážeme túto pomocnú vetu:

**Lemma 1.** *Nevyhnutná a postačujúca podmienka pre to, aby funkcia $S(x)$ bola prostá na $X$, je, aby pre každé prirodzené $k$ a pre každú postupnosť $\{\eta_l\}_l$ typu $(\eta)$ platil výrok: Rad*

$$a_k + \eta_{k+1}a_{k+1} + \ldots + \eta_{k+i}a_{k+i} + \ldots$$

*má nenulový súčet.*

Dôkaz.

1. Nech funkcia $S(x)$ nie je prostá na $(X, \varrho)$. Potom existujú dva rôzne rady $x, y \in X$ také, že platí: $S(x) = S(y)$. Nech

$$x = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n + \ldots, \tag{3}$$

$$y = \varepsilon_1' a_1 + \varepsilon_2' a_2 + \ldots + \varepsilon_n' a_n + \ldots \tag{4}$$

Nech $\varrho(x, y) = \frac{1}{k}$, $k \geqq 1$. Potom rad

$$2\varepsilon_k a_k + (\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_{k+1}')a_{k+1} + \ldots + (\varepsilon_{k+i} - \varepsilon_{k+i}')a_{k+i} + \ldots,$$

ktorý vznikol odčítaním radov (3), (4), má nulový súčet a ten istý súčet má zrejme aj rad

$$a_k + \eta_{k+1}a_{k+1} + \ldots + \eta_{k+i}a_{k+i} + \ldots,$$

kde $\eta_l = \dfrac{\varepsilon_l - \varepsilon_l'}{2\varepsilon_k}$. Pritom $\eta_l$ nadobúda jednu z hodnôt $0, 1, -1$.

2. Nech existuje prirodzené číslo $k$ a postupnosť $\{\eta_l\}_l$ typu $(\eta)$ taká, že platí: Rad

$$a_k + \eta_{k+1}a_{k+1} + \ldots + \eta_{k+i}a_{k+i} + \ldots$$

má nulový súčet. Zostrojme rady

$$x = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + a_k + \varepsilon_{k+1}a_{k+1} + \ldots + \varepsilon_{k+n}a_{k+n} + \ldots, \tag{5}$$

$$y = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} - a_k + \varepsilon_{k+1}'a_{k+1} + \ldots + \varepsilon_{k+n}'a_{k+n} + \ldots \tag{6}$$

také, aby $x, y \in X$ a aby pre každé $l = k+1, k+2, \ldots$ platilo $\eta_l = \dfrac{\varepsilon_l - \varepsilon_l'}{2}$. To je zrejme možné. Ak totiž $\eta_l = 0$, kladieme $\varepsilon_l = \varepsilon_l' = +1$, ak $\eta_l = 1$, kladieme $\varepsilon_l = 1$, $\varepsilon_l' = -1$ a konečne, ak $\eta_l = -1$, kladieme $\varepsilon_l = -1$, $\varepsilon_l' = 1$. Rady (5), (6) sú dva rôzne body priestoru $(X, \varrho)$ a pritom zrejme $S(x) = S(y)$.

Označme v ďalšom znakom $R_k$ zvyšok po $k$-tom člene v rade (1).

**Veta 1.**

a) *Nech aspoň pre jedno prirodzené číslo $k$ platí $a_k = R_k$. Potom $S(x)$ nie je prostá funkcia.*

b) *Nech pre všetky prirodzené čísla $k$ platí $a_k > R_k$. Zobrazenie $S(x)$ je vtedy prosté, dokonce homeomorfné.*

c) *Nech existuje prirodzené číslo $n$ s vlastnosťou takou, že pre všetky prirodzené $k \geqq n$ je $a_k \leqq R_k$. Potom $S(x)$ nie je prostá funkcia.*

Dôkaz.

a) Z podmienky $a_k = R_k$ vyplýva, že rad

$$a_k + \eta_{k+1}a_{k+1} + \ldots + \eta_{k+j}a_{k+j} + \ldots,$$

$\eta_l = -1$ pre každé $l = k+1, k+2, \ldots$ má nulový súčet, a teda podľa lemmy 1 $S(x)$ nie je prosté zobrazenie.

b) Pre každé prirodzené $k$ a pre každú postupnosť $\{\eta_l\}_l$ typu $(\eta)$ platí:

$$a_k + \sum_{k+1}^{\infty} \eta_l a_l \geqq a_k - R_k > 0,$$

v dôsledku toho rad $a_k + \sum_{l=k+1}^{\infty} \eta_l a_l$ má nenulový súčet a tvrdenie vyplýva zase z lemmy. Zobrazenie $S(x)$ je teda podľa lemmy 1 prosté. Keďže $S(x)$ je podľa dokázaného a podľa [3] spojité prosté zobrazenie priestoru $(X, \varrho)$ na $W$ ($W$ s euklidovskou metrikou), je $S(x)$ podľa známych viet o spojitých zobrazeniach kompaktných priestorov homeomorfným zobrazením priestoru $(X, \varrho)$ na $W$. (Pozri [1], str. 135.)

c) Nech existuje prirodzené číslo $n$ také, že pre všetky prirodzené $k \geqq n$ platí $a_k \leqq R_k$. Potom podľa [3] existuje taká postupnosť $\{\varepsilon_k\}_1^{\infty}$ typu (2), že súčet radu $\sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k a_k$ je nula. Potom rad $a_n + \sum_{l=n+1}^{\infty} \eta_l a_l$, kde $\eta_l = \dfrac{\varepsilon_l}{\varepsilon_n}$ pre každé $l = n+1, n+2, \ldots$, má nulový súčet a postupnosť $\{\eta_l\}_l$ je zrejme postupnosťou typu $(\eta)$. Z lemmy 1 vyplýva správnosť tvrdenia.

## 2.

V tomto odseku budeme zase predpokladať, že rad (1) konverguje.

Predpokladajme, že pre každé prirodzené číslo $k$ v rade (1) platí $a_k > R_k$. Podľa vety 1 je $S(x)$ prosté (dokonce homeomorfné) zobrazenie priestoru $(X, \varrho)$ na množinu $W$. V práci [5] je dokázané, že $\mu(W) = \lim_{n \to \infty} 2^{n+1} . R_n$ aj v [5] vidíme, že ku každému nezápornému číslu $x$ možno zostrojiť rad $\sum_1^\infty a_n$ taký, že k tomuto radu príslušná množina $W$ má mieru $\mu(W) = x$.

V tomto odseku sa budeme zaoberať štúdiom mier niektorých špeciálnych podmnožín množiny $W$.

Nech $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \dots \varepsilon_k^0$ je pevne zvolená konečná postupnosť, ktorej členy sú 1 alebo $-1$. Označme znakom $M\begin{pmatrix} 1, 2, \dots k \\ \varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \dots \varepsilon_k^0 \end{pmatrix}$ množinu všetkých tých čísel $w \in W$, pre ktoré platí $w = S(x)$, kde

$$x = \varepsilon_1^0 a_1 + \varepsilon_2^0 a_2 + \dots + \varepsilon_k^0 a_k + \varepsilon_{k+1} a_{k+1} + \dots + \varepsilon_{k+n} a_{k+n} + \dots,$$

pričom postupnosť $\{\varepsilon_l\}_{l=k+1}^\infty$ prebieha všetky možné postupnosti, ktorých členy sú 1, resp. $-1$.

**Veta 2.** *Pre mieru $\mu(M)$ množiny $M\begin{pmatrix} 1, 2, \dots k \\ \varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \dots \varepsilon_k^0 \end{pmatrix}$ platí, že $\mu(M) = \frac{1}{2^k}\mu(W)$.*

Dôkaz. Zrejme $\mu(M) = \mu(W_{k+1})$, kde $W_{k+1}$ je množina všetkých tých reálnych čísel, ktoré sú súčtami radov tvaru

$$\varepsilon_{k+1} a_{k+1} + \varepsilon_{k+2} a_{k+2} + \dots + \varepsilon_{k+n} a_{k+n} + \dots,$$

kde $\varepsilon_l = 1$ alebo $-1$ pre každé $l = k+1, k+2, \dots$. Podľa [5] je $\mu(W_{k+1}) = \lim_{n\to\infty} 2^{n+1} R_n^*$, kde $R_n^*$ je zvyšok po $n$-tom člene v rade

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+n} + \dots$$

Teda

$$R_n^* = a_{k+n+1} + a_{k+n+2} + \dots + a_{k+n+i} + \dots = R_{k+n},$$

takže

$$\mu(M) = \lim_{n\to\infty} 2^{n+1} \cdot R_{k+n} = \frac{1}{2^k} \lim_{n\to\infty} 2^{k+n+1} \cdot R_{k+n} = \frac{1}{2^k} \cdot \mu(W).$$

Tým je dôkaz hotový.

Tento výsledok možno ľahko zovšeobecniť. Nech $j_1, j_2, \dots j_k$ sú prirodzené čísla, $j_1 < j_2 < \dots < j_k$. Nech $\varepsilon_{j1}^0, \varepsilon_{j2}^0, \dots \varepsilon_{jk}^0$ je pevne zvolená konečná postupnosť, ktorej členy sú 1, resp. $-1$. Označme znakom $M\begin{pmatrix} j_1, j_2, \dots j_k \\ \varepsilon_{j1}^0, \varepsilon_{j2}^0, \dots \varepsilon_{jk}^0 \end{pmatrix}$ množinu všetkých tých čísel $w \in W$, pre ktoré platí $w = S(x)$, kde

$$x = \varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_{j1-1} a_{j1-1} + \varepsilon_{j1}^0 a_{j1} + \dots + \varepsilon_{jk-1} a_{jk-1} + \varepsilon_{jk}^0 a_{jk} + \varepsilon_{jk+1} a_{jk+1} + \dots$$

pričom $\varepsilon_l = 1$ alebo $-1$ pre všetky indexy $l \neq j_1, j_2, \dots j_k$.

**Veta 3.** *Pre mieru $\mu(M)$ množiny $M\begin{pmatrix} j_1, j_2, \dots j_k \\ \varepsilon_{j1}^0, \varepsilon_{j2}^0, \dots \varepsilon_{jk}^0 \end{pmatrix}$ platí $\mu(M) = \frac{1}{2^k} \cdot \mu(W)$.*



Dôkaz. Zrejme platí, že

$$M\begin{pmatrix} j_1, j_2, \dots j_k \\ \varepsilon_{j1}^0, \varepsilon_{j2}^0, \dots \varepsilon_{jk}^0 \end{pmatrix} = \bigcup_{(\varepsilon_1^0 \dots \varepsilon_{j_1-1}^0, \varepsilon_{j_1+1}^0, \dots \varepsilon_{j_k-1}^0)} M\begin{pmatrix} 1, 2, \dots j_1, \dots j_k \\ \varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \dots \varepsilon_{j1}^0, \dots \varepsilon_{jk}^0 \end{pmatrix}.$$

Zjednotenie vpravo treba brať cez všetky možné konečné postupnosti $(\varepsilon_1^0 \dots \varepsilon_{j_1-1}^0, \varepsilon_{j_1+1}^0, \dots \varepsilon_{j_k-1}^0)$, ktorých členy sú 1 alebo $-1$. Teda ide o zjednotenie $2^{j_k-k}$ množín. Tieto množiny sú po dvoch disjunktné. Skutočne, nech jedna z nich patrí k postupnosti

$$\varepsilon_1^0, \dots \varepsilon_{j_1-1}^0, \varepsilon_{j_1+1}^0, \dots \varepsilon_{j_k-1}^0 \tag{a}$$

a druhá k postupnosti

$$\bar{\varepsilon}_1^0, \dots \bar{\varepsilon}_{j_1-1}^0, \bar{\varepsilon}_{j_1+1}^0, \dots \bar{\varepsilon}_{j_k-1}^0 \tag{b}$$

a nech $(a)$, $(b)$ sú dve rôzne postupnosti. Nech $l$ je najmenšie prirodzené číslo s vlastnosťou: $\varepsilon_l^0 \neq \bar{\varepsilon}_l^0$ a nech $\varepsilon_l^0 = 1$ a $\bar{\varepsilon}_l^0 = -1$ (v opačnom prípade je dôkaz analogický). Vtedy zrejme všetky prvky množiny prislúchajúcej k postupnosti $(a)$ ležia vpravo od čísla $\varepsilon_1^0 a_1 + \dots + \varepsilon_{l-1}^0 a_{l-1}$, kdežto všetky prvky množiny prislúchajúcej k postupnosti $(b)$ ležia vľavo od čísla $\varepsilon_1^0 a_1 + \dots + \varepsilon_{l-1}^0 a_{l-1}$.

Preto

$$\mu(M) = \sum_{(\varepsilon_1^0, \dots \varepsilon_{j_1-1}^0, \varepsilon_{j_1+1}^0 \dots \varepsilon_{j_k-1}^0)} \mu\left(M\begin{pmatrix} 1, 2, \dots j_k \\ \varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \dots \varepsilon_{j_k}^0 \end{pmatrix}\right) = 2^{j_k-k}\frac{1}{2^{j_k}} \cdot \mu(W) = \frac{1}{2^k} \cdot \mu(W).$$

Tým je dôkaz hotový.

Poznámka. Pri pevnom $k$ je množina $W$ zjednotením množín $M\begin{pmatrix} j_1, j_2, \dots j_k \\ \varepsilon_{j1}^0, \varepsilon_{j2}^0, \dots \varepsilon_{jk}^0 \end{pmatrix}$, teda

$$W = \bigcup_{(\varepsilon_{j1}^0, \dots \varepsilon_{jk}^0)} M\begin{pmatrix} j_1, j_2, \dots j_k \\ \varepsilon_{j1}^0, \varepsilon_{j2}^0, \dots \varepsilon_{jk}^0 \end{pmatrix}$$

Vpravo sa sčituje cez všetky konečné postupnosti $(\varepsilon_{j1}^0, \varepsilon_{j2}^0, \dots \varepsilon_{jk}^0)$, ktorých členy sú 1, resp. $-1$.

Nech $x \in X$,

$$x = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \dots + \varepsilon_n a_n + \dots \tag{7}$$

Nech $f(n, x)$ značí počet členov $+1$ v postupnosti $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n)$, podobne $g(n, x)$ značí počet členov $-1$ v tej istej postupnosti. Teda pre každé prirodzené číslo $n$ platí $f(n, x) + g(n, x) = n$.

Pre stručnosť budeme hovoriť, že rad (7) je znamienkovým rozvojom čísla $w$ (vzhľadom na rad (1)), ak $w = S(x)$.

Zaveďme ďalej označenie

$$\overline{D}^*(f, x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n, x)}{n}, \quad \underline{D}^*(f, x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{f(n, x)}{n},$$

$$\overline{D}^*(g, x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{g(n, x)}{n}, \quad \underline{D}^*(g, x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{g(n, x)}{n}.$$

Čísla $\overline{D}^*(f, x)$, resp. $\overline{D}^*(g, x)$ budeme nazývať hornou hustotou čísel 1, resp. $-1$ v postupnosti $\{\varepsilon_n\}_1^\infty$, podobne čísla $\underline{D}^*(f, x)$, resp. $\underline{D}^*(g, x)$ dolnou hustotou čísel 1, resp. $-1$ v postupnosti $\{\varepsilon_n\}_1^\infty$. Zrejme $\overline{D}^*(f, x) \in \langle 0, 1 \rangle$, podobne pre $\underline{D}^*(f, x)$, $\overline{D}^*(g, x)$, $\underline{D}^*(g, x)$.

Platí veta:

**Veta 4.** *Nech $W^*$ je množina všetkých tých $w = S(x) \in W$, pre ktoré nie je splnená aspoň jedna z nasledujúcich nerovností:*

$$\underline{D}^*(f, x) \leqq \frac{1}{2}, \quad \overline{D}^*(f, x) \geqq \frac{1}{2}.$$

*Potom pre mieru $\mu(W^*)$ množiny $W^*$ platí: $\mu(W^*) = 0$.*

Poznámka.

a) Analogické tvrdenie platí aj pre čísla $\underline{D}^*(g, x)$, $\overline{D}^*(g, x)$ a je jednoduchým dôsledkom vyslovenej vety.

b) Teda podľa vyslovenej vety pre skoro všetky čísla $w = S(x) \in W$ platí

$$\underline{D}^*(f, x) \leqq \frac{1}{2} \leqq \overline{D}^*(f, x).$$

Dôkaz vety.

Zrejme $W^* = W_1^* \cup W_2^*$, kde $W_1^*$ je množina všetkých $w \in W$, pre ktoré platí: $w = S(x)$ a $\overline{D}^*(f, x) < \frac{1}{2}$, $W_2^*$ je množina všetkých tých $w \in W$, pre ktoré platí $w = S(x)$, $\underline{D}^*(f, x) > \frac{1}{2}$. Ukážeme, že $\mu(W_1^*) = 0$, podobne sa dá dokázať, že $\mu(W_2^*) = 0$ a potom aj $\mu(W^*) = 0$.

Nech $\tau$ je pevne zvolené kladné číslo, $0 < \tau < \frac{1}{2}$. Nech $N$ je pevne zvolené prirodzené číslo. Označme znakom $W_1^*(\tau, N)$ množinu všetkých tých $w \in W$, pre ktoré platí $w = S(x)$, a pre všetky $n \geqq N$ je $\frac{f(n, x)}{n} \leqq \tau$. Teda $f(n, x) \leqq [\tau n]$ pre všetky $n \geqq N$. Teda v znamienkovom rozvoji čísla $w$, t. j. v $x = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n + \ldots$ je na prvých $n$ miestach ($n \geqq N$) najviac $[\tau n]$ členov rovných $+1$. Myslime si $n$ pevne zvolené. Zrejme

$$W_1^*(\tau, N) \subset \bigcup_{(\varepsilon_1^0, \ldots \varepsilon_n^0)} M \begin{pmatrix} 1, 2, \ldots n \\ \varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \ldots \varepsilon_n^0 \end{pmatrix},$$

kde $(\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \ldots \varepsilon_n^0)$ (8) prebieha všetky také konečné postupnosti o $n$ členoch, ktorých členy sú $+1$ alebo $-1$ a ktoré neobsahujú viac než $[\tau n]$ členov $+1$. Keďže existuje jediná postupnosť (8) neobsahujúca žiadny člen $+1$, ďalej existuje práve $\binom{n}{1}$ postupností tvaru (8), ktoré obsahujú jediný člen $+1$ atď., zrejme platí, že

$$\mu(W_1^*(\tau, N)) \leqq \left[1 + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n_1}\right] \mu\left(M \begin{pmatrix} 1, 2, \ldots n \\ \varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \ldots \varepsilon_n^0 \end{pmatrix}\right),$$

$(\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \ldots \varepsilon_n^0)$ je pevne zvolená postupnosť tvaru (8)

a $n_1 = [\tau n]$. Keďže $0 < \tau < \frac{1}{2} \to \binom{n}{i} \leqq \binom{n}{n_1}$ pre všetky $i = 0, 1, 2, \ldots n_1$.

Teda

$$\mu(W_1^*(\tau, N)) \leqq (1 + n_1) \binom{n}{n_1} \frac{1}{2^n} \cdot \mu(W). \tag{9}$$

Nerovnosť (9) platí pre všetky $n \geqq N$. Ukážeme, že limita pravej strany v (9) pre $n \to +\infty$ je 0. Za tým účelom označme znakom $\varphi(n)$ súčin $(1 + n_1) \cdot \binom{n}{n_1} \frac{1}{2^n}$, vtedy podľa Stirlingovej formuly dostávame

$$\varphi(n) = (1 + n_1) \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} (1 + o(1)) \cdot 2^{-n}}{\sqrt{2\pi n_1}\, n_1^{n_1} e^{-n_1} \sqrt{2\pi(n - n_1)}\, (n - n_1)^{n-n_1} e^{-(n-n_1)} (1 + o(1))}$$

Keďže

$$(1 + n_1) \frac{\sqrt{2\pi n}\,(1 + o(1))}{\sqrt{2\pi n_1}\sqrt{2\pi(n - n_1)}\,(1 + o(1))} = O\left(n^{\frac{1}{2}}\right),$$

je

$$\varphi(n) = O\left(n^{\frac{1}{2}}\right) \frac{n^n e^{-n} \cdot 2^{-n}}{n_1^{n_1} e^{-n_1} (n - n_1)^{n-n_1} e^{-(n-n_1)}} \leqq$$

$$\leqq O\left(n^{\frac{1}{2}}\right) \cdot O\left(e^{\log n + n(-\log 2 - \psi(\tau))}\right),$$

kde

$$\psi(\tau) = (1 - \tau) \log (1 - \tau) + \left(\tau - \frac{1}{n}\right) \log \left(\tau - \frac{1}{n}\right); \ \frac{1}{n} < \tau.$$

Uvážme ďalej, že

$$\lim_{n\to\infty}\left(\tau-\frac{1}{n}\right)\log\left(\tau-\frac{1}{n}\right)=\tau\log\tau,$$

preto

$$\psi(\tau)=(1-\tau)\log(1-\tau)+\tau\log\tau+o(1).$$

Položme

$$\psi_1(\eta)=(1-\eta)\log(1-\eta)+\eta\log\eta$$

pre

$$0<\eta\leqq\frac{1}{2}\,.\quad \psi_1'(\eta)=\log\frac{\eta}{1-\eta}<0$$

$$\text{v }\left(0,\frac{1}{2}\right),\ \text{t. j. } \psi_1(\eta) \text{ klesá v } \left(0,\frac{1}{2}\right),$$

a teda

$$\psi_1(\tau)>\psi_1\left(\frac{1}{2}\right)=-\log 2,$$

teda

$$\psi_1(\tau)=-\log 2+\delta,$$

kde

$$\delta>0.$$

Potom

$$\psi(\tau)=\psi_1(\tau)+o(1)=-\log 2+\delta+o(1),$$

a preto

$$\varphi(n)=O\left(n^{\frac{1}{2}}\right).O\left(e^{\log n-n\delta_1}\right),\quad 0<\delta_1<\delta,$$

takže

$$\varphi(n)=O\left(n^{\frac{3}{2}}e^{-n\delta_1}\right)=o(1).$$

V dôsledku toho $\mu(W_1^*(\tau,N))=0$ pre každé prirodzené $N$.

Označme pri pevnom $\tau$, $0<\tau<\frac{1}{2}$ znakom $W_1^*(\tau)$ množinu všetkých tých $w\in W$, pre ktoré platí $w=S(x)$, $\overline{D^*}(f,x)<\tau$. Zrejme vtedy

$$W_1^*(\tau)\subset\bigcup_{N=1}^{\infty}W_1^*(\tau,N),$$

a preto

$$\mu(W_1^*(\tau))=0.$$

Nech teraz je $\{\tau_n\}_1^\infty$ ľubovoľná postupnosť kladných reálnych čísel, $\tau_n<\frac{1}{2}$ pre všetky $n=1,2,3,\ldots$ a nech $\tau_n\to\frac{1}{2}$. Potom podľa dokázaného je

$$\mu(W_1^*(\tau_n))=0$$

pri každom pevnom $n$.



Zrejme

$$W_1^*\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}W_1^*(\tau_n),$$

a teda

$$\mu(W_1^*)=0.$$

Tým je dôkaz vety hotový.

Poznámka. Podľa dokázanej vety *podstatnú časť* (čo do miery) množiny $W$ tvoria súčty tých radov $x\in X$, pre ktoré platia súčasne tieto nerovnosti:

$$\underline{D^*}(f,x)\leqq\frac{1}{2}\leqq\overline{D^*}(f,x),$$

$$\underline{D^*}(g,x)\leqq\frac{1}{2}\leqq\overline{D^*}(g,x).$$

Ak označíme znakom $D^*(f,x)$ limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n,x)}{n}$ (za predpokladu, že táto limita existuje), z uvedených nerovností vidieť: Spomedzi radov $x\in X$, pri ktorých existuje $D^*(f,x)$ (prirodzená hustota členov $+1$ v postupnosti $\{\varepsilon_n\}_1^\infty$, v zmysle terminológie obvyklej v teórii čísel), neprispievajú k miere množiny $W$ tie rady, pri ktorých je $D^*(f,x)\neq\frac{1}{2}$. (Pri týchto radoch je tiež $D^*(g,x)\neq\frac{1}{2}$, kde $D^*(g,x)$ má podobný význam ako $D^*(f,x)$).

Dokázaná veta je v istom zmysle analogon nasledujúcej známej vety Cesàrovej o rozdelení znamienok v neabsolútne konvergentných radoch:

Nech $a_1\geqq a_2\geqq\ldots\geqq a_n\geqq\ldots$, $a_n>0$, $a_n\to 0$, $\sum\limits_1^\infty a_n=+\infty$, nech rad $\sum\limits_1^\infty\varepsilon_n a_n$, $\varepsilon_n=+1$ alebo $-1$, konverguje, vtedy pre dolnú $\underline{D}$ a hornú $\overline{D}$ hustotu znamienok $+1$ v postupnosti $\{\varepsilon_n\}_1^\infty$ platí $\underline{D}\leqq\frac{1}{2}\leqq\overline{D}$ (pozri [6]).

## 3.

Predpokladajme, že rad (1) diverguje a $a_n\to 0$. Potom, ako je známe (pozri [4]), existuje nespočítateľná množina $X_1$ tých radov $x\in X$, ktoré majú súčet (vlastný alebo nevlastný), a nespočítateľná množina $X_2$ tých radov $x\in X$, ktoré nemajú súčet, teda oscilujú. V práci [4] je dokázané, že množina $X_1$ je množinou prvej kategórie v $(X,\varrho)$, a teda $X_2$ je množinou druhej kategórie v $(X,\varrho)$, keďže $(X,\varrho)$ je neprázdny úplný priestor.

V tomto odseku podáme isté zovšeobecnenie citovaného výsledku.

Nech $x \in X$,

$$x = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n + \ldots$$

Pre každé prirodzené $n$ položme $S_n(x) = \varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n$. $S_n(x)$ je spojitou funkciou na $(X, \varrho)$ (pozri [4]).

Nech ďalej $K$ je pevne zvolené reálne číslo. Znakom $A(K)$ označíme množinu všetkých tých radov $x \in X$, ktoré majú vlastnosť takú, že ku každému $x \in A(K)$ existuje prirodzené číslo $n(x)$ také, že platí $S_{n(x)}^{(x)} > K$. Označme ďalej znakom $A$, resp. $A'$ množinu všetkých tých $x \in X$, pre ktoré postupnosť $\{S_n(x)\}_1^\infty$ nie je zhora, resp. zdola ohraničená.

**Lemma 2.** *Množiny $A$, $A'$ sú množinami $G_\delta(X)$.*

Dôkaz. Ukážeme predovšetkým, že množina $A(K)$ je pre každé reálne $K$ otvorená. Nech $x_0 \in A(K)$. Potom existuje prirodzené číslo $n(x_0)$ také, že platí: $S_{n(x_0)}^{(x_0)} > K$.

Zvoľme $\delta = \dfrac{1}{n(x_0)}$, vtedy pre $x \in \Omega(x_0, \delta)$ platí $S_{n(x_0)}^{(x)} = S_{n(x_0)}^{(x_0)} > K$, a teda $x \in A(K)$. Teda celkom $\Omega(x_0, \delta) \subset A(K)$, t. j. $A(K)$ je otvorená množina. Zrejme $A = \bigcap_{K=1}^{\infty} A(K)$, a tým je dôkaz hotový.

Podobne sa dokáže tvrdenie pre množinu $A'$.

**Lemma 3.** *Nech $B = A \cap A'$. Potom $B$ je hustá $v(X, \varrho)$.*

Dôkaz. Nech $x_0 \in X$,

$$x_0 = \varepsilon_1^0 a_1 + \varepsilon_2^0 a_2 + \ldots + \varepsilon_n^0 a_n + \ldots$$

Ukážeme, že $x_0 \in \overline{B}$. Nech $\delta > 0$, $\delta$ ľubovoľné reálne číslo. Nech $N$ je prirodzené číslo, $\dfrac{1}{N} \leqq \delta$.

Podľa Riemannovej vety existuje rad

$$\varepsilon_{N+1} a_{N+1} + \varepsilon_{N+2} a_{N+2} + \ldots + \varepsilon_{N+k} a_{N+k} + \ldots,$$

kde $\varepsilon_i = 1$ alebo $-1$ pre všetky $i = N+1, N+2, \ldots$ taký, že pre jeho čiastočné súčty $S_k^*$ platí:

$$\limsup_{k=\infty} S_k^* = +\infty, \quad \liminf_{k\to\infty} S_k^* = -\infty.$$

Položme

$$x = \varepsilon_1^0 a_1 + \ldots + \varepsilon_N^0 a_N + \varepsilon_{N+1} a_{N+1} + \varepsilon_{N+2} a_{N+2} + \ldots$$

Zrejme

$$\limsup_{n\to\infty} S_n(x) = +\infty \text{ a } \liminf_{n\to\infty} S_n(x) = -\infty, \quad x \in \Omega(x_0, \delta).$$

Keďže $\delta$ je ľubovoľné kladné číslo, je tým dôkaz hotový.



**Veta 5.** *Nech $X_3$ je množina všetkých tých radov $x \in X$, pre ktoré je postupnosť $\{S_n(x)\}_1^\infty$ ich čiastočných súčtov buď zhora, alebo zdola ohraničená. Potom $X_3$ je množina prvej kategórie v priestore $(X, \varrho)$.*

Dôkaz. Zrejme je $X_3 = X - B$, teda $X_3$ je množina $F_\sigma(X)$, keďže $B$ je podľa lemmy 2 množinou $G_\delta$. Ďalej množina $X - X_3 = B$ je podľa lemmy 3 hustá v $X$. Teda (pozri [2], str. 66) je $X_3$ množinou prvej kategórie v $X$.

Dôsledok. Množina $X_1$ tých radov $x \in X$, ktoré majú súčet (vlastný alebo nevlastný), je prvej kategórie v $(X, \varrho)$. To vyplýva z toho, že $X_1 \subset X_3$.

Z dokázanej vety na základe známych vlastností úplných priestorov taktiež ihneď vyplýva, že množina $B$ všetkých tých radov $x \in X$, ktorých čiastočné súčty tvoria postupnosť neohraničenú zdola i zhora, je množinou druhej kategórie v $(X, \varrho)$.

## LITERATÚRA

1. Kuratowski, Wstep do teorii mnogosci i topologii, Warszawa 1955. 2. Čech E, Bodové množiny, Praha 1936. 3. Šalát T., O súčtoch istých konvergentných radov, Mat.-fyz. čas. SAV IV, 1954, 203—211. 4. Šalát T., Poznámky k Riemannovej vete o divergentných radoch, Mat.-fyz. čas. SAV V, 1955, 94—100. 5. Šalát T., O istých vlastnostiach radov s kladnými členmi, Sborník prác Prír. fak. UK (v tlači). 6. Rademacher, Über die asymptotische Verteilung gewisser konvergenzerzeugenden Faktoren. Math. Z., zv. 11, 1921, 276—288.

Došlo 24. 2. 1957.

# О НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ РЯДОВ С МЕТРИКОЙ БЭРА

ТИБОР ШАЛАТ

Выводы

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) — сходящийся ряд с положительными членами. Пусть $X$ обозначает множество всех рядов вида:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i a_i, \quad \varepsilon_i = +1, \text{ или } -1.$$

$S(x)$ — обозначает сумму ряда $x$. В первой части этой работы автор исследует условия, при которых $S(x)$ является одно-однозначным изображением пространства $(X, \varrho)$ в $E_1$, где $\varrho$ — метрика Бэра, введена автором в его предшествующей работе [3]. Основным результатом этой части работы является теорема:

а) Пусть по крайней мере для одного натурального $k$ имеет место $a_k = R_k$ ($R_k$ — остаток ряда [1] после $k$-ого члена). Потом $S(x)$ не является одно-однозначным изображением.

б) Пусть для всех натуральных $k$ имеет место: $a_k > R_k$. Потом $S(x)$ является гомеоморфным изображением.

в) Пусть существует натуральное число $n$ обладающее свойством: для всех $k \geqq n$ $a_k \leqq R_k$. Потом $S(x)$ не является одно-однозначным изображением.

Во второй части предполагается для каждого $k$ $a_k > R_k$. В этой части работы автор исследует некоторые свойства множества $W$ всех вещественных чисел $w \in W$, которые возможно выразить в виде: $w = S(x)$, где

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i a_i, \qquad \varepsilon_i = +1, \qquad \text{или} -1.$$

Означим через $M\begin{pmatrix} j_1, j_2, \ldots, j_k \\ \varepsilon_{j_1}^0, \varepsilon_{j_2}^0, \ldots \varepsilon_{j_k}^0 \end{pmatrix}$ множество всех таких $w \in W$, которые имеют вид: $w = S(x)$, $x = \varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_{j_1-1} a_{j_1-1} + \varepsilon_{j_1}^0 a_{j_1}^0 + \ldots + \varepsilon_{j_k-1} a_{j_k-1} + \varepsilon_{j_k}^0 a_{j_k} + \ldots$ т. е. факторы $\varepsilon_{j_1}^0, \varepsilon_{j_2}^0, \ldots \varepsilon_{j_k}^0$ — фиксированны, $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$.

Остальные факторы $\varepsilon_j$ $i \neq j_1, \ldots j_k$, принимают значения $+1$ и $-1$. Потом для меры этого множества имеет место:

$$\mu\left(M\begin{pmatrix} j_1, j_2, \ldots j_k \\ \varepsilon_{j_1}^0, \varepsilon_{j_2}^0, \ldots \varepsilon_{j_k}^0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2^k} \cdot \mu(W),$$

где $\mu(W)$ — мера множества $W$.

Пусть $x \in X$, $x = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n + \ldots$

Пусть $f(n, x)$ обозначает число членов $+1$ в последовательности: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ Означим через $\overline{D^*}(f, x)$ $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{f(n, x)}{n}$, $\underline{D^*}(f, x) = \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{f(n, x)}{n}$, $D^*(f, x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n, x)}{n}$ (если существует).

Основным результатом этой части работы является теорема:

Почти для всех $w = S(x) \in W$ (в смысле меры Лебега) имеет место: $\underline{D^*}(f,x) \leqq \frac{1}{2} \leqq \overline{D^*}(f, x)$.

Эту теорему можно считать как определённую аналогию (для абсолютно сходящихся рядов) известной теоремы Чезаро о распределении знаков в релятивно сходящемся ряде.

В третьей части этой работы предполагается, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — расходящийся ряд с положительными членами, $a_n \to 0$. Построим опять пространство $(X, \varrho)$, где $\varrho$ метрика Бэра, введена автором в работе (4) на множестве $X$ всех рядов вида $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i a_i$, где $\varepsilon_i = +1$, или $-1$ для каждого $i = 1, 2, \ldots$

Означим через $A$, или-же $A'$ множество всех рядов $x \in X$, для которых последовательность $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сверху или-же снизу неограничена. $S_n(x)$ притом обозначает $n$-тую частичную сумму ряда $x$. Автор показывает, что множества $A$, $A'$ являются множествами типа $G_\delta(X)$, и множество $B = A \cap A'$ — плотное $B(X, \varrho)$.

Основным результатом является доказательство теоремы:

Множество $X_3$ всех таких рядов $x \in (X, \varrho)$, для которых $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — или сверху, или снизу ограничена, является множеством первой категории $B(X, \varrho)$.

Таким образом множество $X_4'$ всех таких рядов $x \in X$ для которых $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ неограничена ни сверху, ни снизу (т. е., для которых $\limsup\limits_{n\to\infty} S_n(x) = +\infty$, $\liminf\limits_{n\to\infty} S_n(x) = -\infty$) является, как следствие приведенной теоремы, множеством второй категории $B(X, \varrho)$.

Эта теорема является обобщением одного результата полученного автором в предшествующей уже опубликованной работе [4].



# ÜBER GEWISSE RÄUME DER REIHEN MIT BAIRESCHER METRIK

TIBOR ŠALÁT


## Zusammenfassung

Es sei $\sum\limits_1^{\infty} a_n$ (1) eine konvergente Reihe mit positiven Gliedern. Es bedeute $X$ die Menge aller Reihen $x$, welche die Gestalt $x = \sum\limits_1^{\infty} \varepsilon_i a_i$, $\varepsilon_i = 1$ oder $-1$, haben. $S(x)$ bedeutet die Summe der Reihe $x$.

Im ersten Teil dieser Arbeit untersucht der Verfasser die Bedingugen, bei denen $S(x)$ eine ein-eindeutige (resp. Homeomorfismus) Funktion im Raum $(X, \varrho)$ definiert, deren Werte in $E_1$ sind, wo $\varrho$ die Bairesche Metrik ist, die vom Verfasser in der Arbeit [3] eingeführt war. Das Hauptergebnis dieses Teiles der Arbeit ist der Satz:

*a) Es sei wenigstens für ein natürliches $k$: $a_k = R_k$ [$R_k$ sind Reihenreste der Reihe (1)]. Dann ist $S(x)$ keine ein-eindeutitge Funktion.*

*b) Es sei für alle $k$: $a_k > R_k$. Dann ist $S(x)$ ein Homeomorfismus.*

*c) Es existiere eine natürliche Zahl $n$ derart, daß für alle $k \geqq n$, $a_k \leq R_k$ ist. Dann ist $S(x)$ keine ein-eindeutige Funktion.*

Im zweiten Teil setzen wir voraus, daß für alle $k$ $a_k > R_k$ ist. Im diesen Teil der Arbeit studiert der Verfasser einige Eigenschaften der Menge $W$ aller derjenigen reellen Zahlen $w$, welche die Gestalt $w = S(x)$, $x = \sum\limits_1^{\infty} \varepsilon_i a_i$, $\varepsilon_i = 1$ oder $-1$, haben.

Es bedeute $\begin{pmatrix} j_1, j_2, \ldots, j_k \\ \varepsilon_{j_1}^0, \varepsilon_{j_2}^0, \ldots \varepsilon_{j_k}^0 \end{pmatrix}$ die Menge aller derjenigen $w \in W$ welche die Form $w = S(x)$, $x = \varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_{j_1-1} a_{j_1-1} + \varepsilon_{j_1}^0 a_{j_1} + \ldots + \varepsilon_{j_k-1} a_{j_k-1} + \varepsilon_{j_k}^0 a_{j_k} + \ldots$ haben, d. h. die Faktoren $\varepsilon_{j_1}^0, \varepsilon_{j_2}^0, \ldots \varepsilon_{j_k}^0$ sind fest gewählt, die übrigen $\varepsilon_i$, $i \neq j_1, j_2, \ldots j_k$ durchlaufen die Zahlen 1, $-1$. *Dann gilt für das Maß $\mu(M)$ dieser Menge, daß $\mu(M) = \frac{1}{2^k}\mu(W)$,* wo $\mu(W)$ das Maß von $W$ bedeutet. Es sei $x \in X$, $x = \varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n + \ldots$. Es bedeute $f(n, x)$ die Anzahl der Zahlen $+1$ in der Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$. Wir bezeichnen

$$\underline{D^*}(f, x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{f(n, x)}{n}, \quad \overline{D^*}(f, x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n, x)}{n}$$

Das Hauptergebnis dieses Teiles der Arbeit ist der Satz:

*Für fast alle $w = S(x) \in W$ (im Sinne des Lebesgueschen Maßes) gilt:*

$$\underline{D^*}(f, x) \leqq \frac{1}{2} \leqq \overline{D^*}(f, x).$$

Dieser Satz ist eine Analogie (für absolut konvergente Reihen) eines bekannten Satzes von Cesàro über die Verteilung der Vorzeichen in nicht-absolut konvergenten Reihen.

Im dritten Teil der Arbeit setzen wir voraus, daß $\sum\limits_1^{\infty} a_n$ eine divergente Reihe mit positiven Gliedern ist, $a_n \to 0$. Konstruiert man wieder den Raum $(X, \varrho)$, wo $\varrho$ die Bairesche Metrik ist, die vom Verfasser in der Arbeit [4] eingeführt war. Wir bezeichnen mit $A$ resp. $A'$ die Menge aller derjenigen Reihen $x \in X$, für die die Folge $\{S_n(x)\}_1^{\infty}$ eine nach oben

(resp. nach unten) unbeschränkt ist. Dabei $S_n(x)$ die $n$-te Teilsumme der Reihe bedeutet. Man beweist, dass die Mengen $A$, $A'$ die Mengen $G_\delta$ in $(X, \varrho)$ sind und daß die Menge $B = A \cap A'$ in $(X, \varrho)$ dicht ist.

Das Hauptergebniss dieses Teiles der Arbeit ist der Satz:
*Die Menge $X_3$ aller derjenigen $x \in X$, für die die Folge $\{S_n(x)\}_1^\infty$ nach oben oder nach unten beschränkt ist, ist eine Menge von erster Kategorie in $(X, \varrho)$.* Infolge des vorhergehenden Satzes ist die Menge $B$ aller derjenigen $x \in X$, welche die beiden Bedingungen

$$\liminf_{n\to\infty} S_n(x) = -\infty, \quad \limsup_{n\to\infty} S_n(x) = +\infty$$

erfüllen, eine Menge von zweiter Kategorie in $(X, \varrho)$.

Diese Ergebnisse sind eine Verallgemeinerung der früheren Ergebnisse des Verfassers. (Siehe [4].)