MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, VII, 3 — 1957

O VEKTOROVEJ MIERE

IGOR KLUVÁNEK

Katedra matematiky Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave

Tento článok sa zaoberá mierou, ktorej hodnoty sú z Banachovho priestoru. Hlavne je vyšetrovaná otázka, kedy sa dá takáto miera definovaná na algebre rozšíriť na mieru definovanú na σ-algebre.

1. Nech X je ľubovoľný (reálny alebo komplexný) Banachov priestor. X^* je jeho združený priestor (množina všetkých lineárnych spojitých funkcií na X) a X^{**} je združený priestor priestoru X^*. Normu prvku $x \in X$ označíme $|x|$.

Nech S je ľubovoľná neprázdna množina.

Vektorovou mierou nazveme funkciu μ, ktorej obor definície $\boldsymbol{R}$ je algebra podmnožín množiny S, hodnoty sú z X a pre každú postupnosť $\{E_n\} \subset \boldsymbol{R}$ disjunktných množín je $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$, ak $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \boldsymbol{R}$.

Posledná rovnica znamená, že $\lim_i |\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) - \sum_{n=1}^{i} \mu(E_n)| = 0$.

Ak hodnoty vektorovej miery sú čísla (X je množina reálnych alebo komplexných čísiel), nazývame ju zovšeobecnenou mierou. Ak zovšeobecnená miera nadobúda iba reálne nezáporné hodnoty, voláme ju jednoducho mierou.

Nech μ je vektorová miera na algebre $\boldsymbol{R}$. Definujme funkciu $\|\mu\|$ na $\boldsymbol{R}$ vzorcom

$$\|\mu\|(E) = \sup |\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i)|$$

pre každé $E \in \boldsymbol{R}$, pričom supremum sa berie pre všetky konečné systémy disjunktných množín $E_i \in \boldsymbol{R}$, $E_i \subset E$ a všetky voľby čísiel $|\alpha_i| \leqq 1$. Funkciu $\|\mu\|$ voláme polovariáciou vektorovej miery μ.

Zrejme $|\mu(E)| \leqq \|\mu\|(E)$ a $\|\mu\| E \leqq \|\mu\|(F)$ pre $E \subset F$. Ďalej $\|\mu\|(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \|\mu\|(E_n)$ pre každú postupnosť $\{E_n\} \subset \boldsymbol{R}$, pre ktorú $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \boldsymbol{R}$. Poznamenajme, že $\|\mu\|$ nemusí byť miera.

Budeme hovoriť, že vektorová miera μ splňuje podmienku (A), ak platí tvrdenie:

(A) Existuje konečná miera ν, definovaná na $\boldsymbol{R}$ s vlastnosťou: Ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ tak, že $\|\mu\|(E) < \varepsilon$ pre každú množinu $E \in \boldsymbol{R}$, pre ktorú $\nu(E) < \delta$.

2. Veta. *Nech μ je vektorová miera na algebre $\boldsymbol{R}$. Nech $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ je najmenšia σ-algebra nad algebrou $\boldsymbol{R}$. Na σ-algebre $\boldsymbol{S}$ existuje vektorová miera $\bar{\mu}$, pre ktorú $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$ pre $E \in \boldsymbol{R}$, vtedy a len vtedy, keď μ splňuje podmienku (A).*

Dôkaz. I. Nech μ splňuje podmienku (A). Mieru ν z tejto podmienky môžeme považovať za definovanú na celej σ-algebre $\boldsymbol{S}$, pretože ju môžeme v prípade potreby z algebry $\boldsymbol{R}$ na σ-algebru $\boldsymbol{S}$ jednoznačne rozšíriť.

Nazvime dve množiny $E, F \in \boldsymbol{S}$ ekvivalentnými, ak $\nu(E \triangle F) = 0$ ($E \triangle F = (E - F) \cup (F - E)$). Táto dohoda splňuje všetky predpoklady ekvivalencie, a preto sa systém $\boldsymbol{S}$ rozpadne na disjunktné triedy navzájom ekvivalentných množín. Označme množinu týchto tried $[\boldsymbol{S}]$ a triedu, v ktorej leží množina E, označme $[E]$. V množine $[\boldsymbol{S}]$ zaveďme nasledovnú metriku ϱ: $\varrho([E], [F]) = \nu(E \triangle F)$.

Množinu tých tried, v ktorých leží aspoň po jednej množine z $\boldsymbol{R}$, označme $[\boldsymbol{R}]$. Z vety o aproximácii miery vyplýva, že $[\boldsymbol{R}]$ je hustá množina v $[\boldsymbol{S}]$ pri metrike ϱ.

Ak sú dve množiny $E, F \in \boldsymbol{R}$ ekvivalentné, zrejme $\|\mu\|(E \triangle F) = 0$, teda $\mu(E) = \mu(F)$. Môžeme preto na $[\boldsymbol{R}]$ definovať funkciu φ tak, že $\varphi([E]) = \mu(E)$, pričom E zvolíme z $\boldsymbol{R}$.

Funkcia φ je rovnomerne spojitá na $[\boldsymbol{R}]$. Aby sme to dokázali, zvoľme $\varepsilon > 0$. Nájdime $\delta > 0$ tak, aby pre $\nu(E) < \delta$ bolo $\|\mu\|(E) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ak je $\varrho([E], [F]) = \nu(E \triangle F) < \delta$, je $|\varphi([E]) - \varphi([F])| = |\mu(E) - \mu(F)| = |\mu(E - F) - \mu(F - E)| \leqq |\mu(E - F)| + |\mu(F - E)| \leqq \|\mu\|(E - F) + \|\mu\|(F - E) \leqq 2\|\mu\|(E \triangle F) < \varepsilon$.

Pretože hodnoty funkcie φ sú z úplného priestoru X, z toho, že $[\boldsymbol{R}]$ je hustá množina v $[\boldsymbol{S}]$, vyplýva, že existuje jediná rovnomerne spojitá funkcia $\bar{\varphi}$ definovaná na $[\boldsymbol{S}]$, ktorá sa zhoduje na $[\boldsymbol{R}]$ s φ.

Pre ľubovoľnú množinu $E \in \boldsymbol{S}$ položme $\bar{\mu}(E) = \bar{\varphi}([E])$. Zrejme pre $E \in \boldsymbol{R}$ je $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$. Ukážme, že $\bar{\mu}$ je vektorová miera.

Najskôr dokážeme, že pre $E, F \in \boldsymbol{S}$, $E \cap F = \emptyset$ je $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$. Zvoľme $\varepsilon > 0$. K tomuto ε nájdime $\delta > 0$ tak, aby pre $E, F \in \boldsymbol{S}$, $\nu(E \triangle F) < \delta$ bolo $|\bar{\mu}(E) - \bar{\mu}(F)| < \varepsilon$. Existencia čísla δ vyplýva z rovnomernej spojitosti funkcie $\bar{\varphi}$.

Pre $E, F \in \boldsymbol{S}$, $E \cap F = \emptyset$ nájdeme množiny $E_\varepsilon, F_\varepsilon \in \boldsymbol{R}$ tak, aby $\nu(E \triangle E_\varepsilon) < \frac{\delta}{2}$, $\nu(F \triangle F_\varepsilon) < \frac{\delta}{2}$.

Je $|\bar{\mu}(E) - \mu(E_\varepsilon)| < \varepsilon$, $|\bar{\mu}(F) - \mu(F_\varepsilon)| < \varepsilon$. Ďalej $\nu((E \cup F) \triangle (E_\varepsilon \cup F_\varepsilon)) \leqq \nu((E \triangle E_\varepsilon) \cup (F \triangle F_\varepsilon)) < \delta$ teda i $|\bar{\mu}(E \cup F) - \mu(E_\varepsilon \cup F_\varepsilon)| < \varepsilon$.

Ešte si všimnime, že $E_\varepsilon \cap F_\varepsilon \subset (E_\varepsilon - E) \cup (F_\varepsilon - F)$, lebo $E \cap F = \emptyset$, z toho $\nu(E_\varepsilon \cap F_\varepsilon) \leqq \nu(E_\varepsilon - E) + \nu(F_\varepsilon - F) \leqq \nu(E \triangle E_\varepsilon) + \nu(F \triangle F_\varepsilon) < \delta$, čiže $|\mu(E_\varepsilon) + \mu(F_\varepsilon) - \mu(E_\varepsilon \cup F_\varepsilon)| = |\mu(E_\varepsilon \cap F_\varepsilon)| < \varepsilon$.

Môžeme teda napísať odhad $|\bar{\mu}(E) + \bar{\mu}(F) - \bar{\mu}(E \cup F)| \leqq |\bar{\mu}(E) - \mu(E_\varepsilon)| + |\bar{\mu}(F) - \mu(F_\varepsilon)| + |\mu(E_\varepsilon) + \mu(F_\varepsilon) - \mu(E_\varepsilon \cup F_\varepsilon)| + |\mu(E_\varepsilon \cup F_\varepsilon) - \bar{\mu}(E \cup F)| < 4\varepsilon$. Pretože $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné, je $\bar{\mu}(E \cup F) = \bar{\mu}(E) + \bar{\mu}(F)$.

Teraz dokážeme: Ak $\{E_n\} \subset \boldsymbol{S}$ je rastúca postupnosť a $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, platí rovnosť $\bar{\mu}(E) = \lim_n \bar{\mu}(E_n)$. Z toho, že $\lim_n \nu(E_n \triangle E) = \lim_n \nu(E - E_n) = 0$ vyplýva, že aj $\lim_n |\bar{\mu}(E_n) - \bar{\mu}(E)| = 0$.

Tým sme dokázali, že $\bar{\mu}$ je vektorová miera na $\boldsymbol{S}$, lebo pre ľubovoľnú postupnosť $\{E_n\} \subset \boldsymbol{S}$ disjunktných množín je $\lim_i |\bar{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) - \sum_{n=1}^{i} \bar{\mu}(E_n)| = \lim_i |\bar{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) - \bar{\mu}(\bigcup_{n=1}^{i} E_n)| = 0$.

II. Nech existuje na $\boldsymbol{S}$ vektorová miera $\bar{\mu}$ tak, že pre $E \in \boldsymbol{R}$ je $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$. Máme ukázať, že μ splňuje podmienku (A). Podľa [1], str. 294, vektorová miera $\bar{\mu}$ splňuje podmienku (A), lebo je definovaná na σ-algebre. Zrejme je $\|\bar{\mu}\|(E) \geqq \|\mu\|(E)$ pre každú množinu $E \in \boldsymbol{R}$, teda μ splňuje podmienku (A) s tou istou mierou ν ako $\bar{\mu}$.

Tým je dôkaz úplný.

Poznamenajme ešte k tejto vete, že vektorová miera $\bar{\mu}$, ak existuje, je určená vektorovou mierou μ jednoznačne. To sa dokáže úplne podobne ako pre mieru, ktorej hodnoty sú čísla.

3. Podľa [1] každá vektorová miera definovaná na σ-algebre splňuje podmienku (A). Vzniká teda otázka, či nesplňuje podmienku (A) každá vektorová miera, ktorá je definovaná iba na algebre. Odpoveď na túto otázku je záporná, ako ukazuje nasledujúci príklad.

Nech X je množina reálnych čísiel s absolútnou hodnotou ako normou. S nech je ľubovoľná nespočítateľná množina. Algebra $\boldsymbol{R}$ nech pozostáva z prázdnej množiny, z konečných množín, z komplementov konečných množín a z množiny S.

Ak $E \in \boldsymbol{R}$ je konečná množina, kladieme $\mu(E)$ rovné počtu prvkov množiny E. Ak $E \in \boldsymbol{R}$ je nekonečná množina, t. j. $E = S - F$, kde F je konečná, kladieme $\mu(E) = -\mu(F)$. $\mu(\emptyset) = \mu(S) = 0$.

σ-algebra $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ pozostáva z najviac spočítateľných množín a ich komplementov. Zrejme sa nedá μ rozšíriť na σ-algebru $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$, teda ani nesplňuje podmienku (A).

4. Budeme sa zaoberať otázkou, kedy vektorová miera splňuje podmienku (A).

Nech μ je vektorová miera na algebre $\boldsymbol{R}$. Definujme funkciu $|\mu|$ na $\boldsymbol{R}$ vzorcom

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(E_n)|$$

pre každú množinu $E \in \boldsymbol{R}$, kde supremum sa berie pre všetky postupnosti $\{E_n\} \subset \boldsymbol{R}$ disjunktných množín takých, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset E$.

$|\mu|$ je miera na algebre $\boldsymbol{R}$ a voláme ju variáciou vektorovej miery μ.

Ak ide o zovšeobecnenú mieru ($\mu(E)$ sú čísla), vtedy pojmy polovariácie a variácie splynú. To je zrejmé z toho, že pre každé $\varepsilon > 0$ existujú disjunktné množiny $E_i \in \boldsymbol{R}$, $\bigcup_{i=1}^{n} E_i \subset E$ tak, že $|\mu|(E) - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| = |\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i)|$ pričom táto rovnosť platí, ak zvolíme α_i tak, že $\alpha_i \mu(E_i) = |\mu(E_i)|$.

Zrejme platí, že $\|\mu\|(E) \leqq |\mu|(E)$ pre každú množinu $E \in \boldsymbol{R}$. Z toho vyplýva:

Ak variácia vektorovej miery μ je konečná, μ splňuje podmienku (A).

5. V [1], str. 293, je dokázané, že polovariácia každej vektorovej miery, definovanej na σ-algebre, je konečná. Z toho vyplýva, že polovariácia každej vektorovej miery μ definovanej i na algebre $\boldsymbol{R}$ je konečná, ak μ splňuje podmienku (A). Takáto miera sa totiž dá rozšíriť na vektorovú mieru $\bar{\mu}$ na σ-algebre $\boldsymbol{S}$ a $\|\mu\|(E) \leqq \|\bar{\mu}\|(E)$ pre $E \in \boldsymbol{R}$.

Čiastočným obrátením tohto tvrdenia je nasledujúca

Veta. *Nech μ je vektorová miera na algebre $\boldsymbol{R}$. Ak priestor X, z ktorého sú hodnoty μ, je reflexívny, t. j. $X = X^{**}$ a polovariácia vektorovej miery μ je konečná, vektorová miera μ splňuje podmienku* (A) *a dá sa rozšíriť na σ-algebru $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$.*

Dôkaz. Dokážeme, že za predpokladov uvedených vo vete sa μ dá rozšíriť na σ-algebru $\boldsymbol{S}$.

Nech $x^* \in X^*$. Funkcia $x^*\mu$ definovaná na $\boldsymbol{R}$ rovnicou $x^*\mu(E) = x^*(\mu(E))$ je zovšeobecnená miera na $\boldsymbol{R}$. Jej variácia $|x^*\mu|$ je konečná, pretože

$$|x^*\mu|(E) = \sup |\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x^*\mu(E_i)| \leqq \sup |x^*| \, |\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \mu(E_i)| = |x^*| \, \|\mu\|(E).$$

Teda pre každé $x^* \in X^*$ existuje zovšeobecnená miera ν_{x^*} na $\boldsymbol{S}$ s konečnou variáciou, pre ktorú platí: Pre $E \in \boldsymbol{R}$ je $\nu_{x^*}(E) = x^*(\mu(E))$.

Nech $E \in \boldsymbol{S}$. Ak definujeme x_E^{**} rovnicou $x_E^{**}(x^*) = \nu_{x^*}(E)$, potom $x_E^{**} \in X^{**}$, t. j. x_E^{**} je lineárna spojitá funkcia na X^*. Pre $E \in \boldsymbol{R}$ je to zrejmé. I to je zrejmé, že x_E^{**} je lineárna pre ľubovoľnú množinu $E \in \boldsymbol{S}$. Stačí teda dokázať: Ak $\lim_n |x_n^*| = 0$, tak $\lim_n x_E^{**}(x_n^*) = 0$. Zvoľme $\varepsilon > 0$. Pre každé $n = 1, 2, 3, \ldots$ existuje množina $F_n \in \boldsymbol{R}$ taká, že $|\nu_{x_n^*}(E) - \nu_{x_n^*}(F_n)| < \varepsilon$. Ale $|\nu_{x_n^*}(F_n)| = |x_n^*\mu(F_n)| \leqq |x_n^*| \, |\mu(F_n)| \leqq |x_n^*| \, \|\mu\|(F_n) \leqq |x_n^*| \, \|\mu\|(S)$. Ak teraz

$\lim_n |x_n^*| = 0$, tak aj $\lim_n |\nu_{x_n^*}(F_n)| = 0$ a $\limsup_n |\nu_{x_n^*}(E)| \leq \varepsilon$. To platí pre každé $\varepsilon > 0$, čím je dokázané, že $x_E^{**} \in X^{**}$. Ale priestor X je reflexívny, preto existuje $x_E \in X$ také, že $x_E^{**}(x^*) = x^*(x_E)$ pre všetky $x^* \in X^*$.

Položme $\bar{\mu}(E) = x_E$. Pre $E \in \boldsymbol{R}$ je $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$. Okrem toho Pettis dokázal [4, str. 283], že funkcia $\bar{\mu}$ na S, s hodnotami v X s tou vlastnosťou, že pre každé $x^* \in X^*$ je $x^*\bar{\mu}$ zovšeobecnená miera, je vektorovou mierou. Ale z toho dôkaz našej vety už okamžite vyplýva.

6. Vo vete z predošlého odseku nemôžeme vypustiť požiadavku, aby bol priestor X reflexívny ako ukazuje nasledujúci príklad.

Nech množina S i algebra $\boldsymbol{R}$ je tá istá ako v **3.** Nech X je množina všetkých reálnych ohraničených funkcií x definovaných na množine S, pričom normu $|x|$ kladieme rovnú $\sup_{t \in S} |x(t)|$.

Ak $E \in \boldsymbol{R}$ je konečná množina, položíme $\mu(E) = x_E$, pričom $x_E(t) = 1$, ak $t \in E$, a $x_E(t) = 0$, ak $t \in E$. Ak $E \in \boldsymbol{R}$ je nekonečná množina, tak $S - E = F$ je konečná a položíme $\mu(E) = -\mu(F)$.

μ je vektorová miera na $\boldsymbol{R}$. Polovariácia $\|\mu\|$ tejto miery vyzerá takto: $\|\mu\|(\emptyset) = 0$, $\|\mu\|(E) = 1$, ak $E \neq \emptyset$ je konečná množina, a $\|\mu\|(E) = 2$ pre nekonečné množiny $E \in \boldsymbol{R}$. Polovariácia $\|\mu\|$ je teda konečná. Pritom vektorová miera μ nesplňuje podmienku (A), pretože keby ju splňovala, musela by miera ν z tejto podmienky byť jednak konečná na algebre $\boldsymbol{R}$ a okrem toho by muselo platiť, že $\inf_{\emptyset \neq E \in R} \nu(E) > 0$, čo nie je možné. Priestor X však nie je reflexívny.

7. Podobne ako pri miere definujeme úplnosť vektorovej miery.

Vektorovú mieru μ definovanú na σ-algebre $\boldsymbol{S}$ nazveme úplnou, ak platí: Ak $E \in \boldsymbol{S}$, $\|\mu\|(E) = 0$ a $F \subset E$, tak i $F \in \boldsymbol{S}$, a teda $\|\mu\|(F) = 0$.

Veta. *Nech vektorová miera μ definovaná na algebre $\boldsymbol{R}$ splňuje podmienku (A). Existuje σ-algebra $\boldsymbol{S}_1$ a úplná vektorová miera μ_1 na $\boldsymbol{S}_1$ tak, že $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{S}_1$ a $\mu_1(E) = \mu(E)$ pre $E \in \boldsymbol{R}$.*

Dôkaz. Podľa **2** rozšírime mieru μ na σ-algebru $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ a dostaneme mieru $\bar{\mu}$, ktorá sa na $\boldsymbol{R}$ zhoduje s μ. Označme $\boldsymbol{N}$ systém tých množín G, pre ktoré existujú množiny $E \in \boldsymbol{S}$, pričom $G \subset E$ a $\|\bar{\mu}\|(E) = 0$. $\boldsymbol{N}$ je σ-okruh, a ak $G \in \boldsymbol{N}$ a $H \subset G$, tak i $H \in \boldsymbol{N}$.

Označme $\boldsymbol{S}_1$ systém množín tvaru $E \triangle G$, pre $E \in \boldsymbol{S}$ a $G \in \boldsymbol{N}$. $\boldsymbol{S}_1$ je σ-algebra. Ak definujeme $\mu_1(E \triangle G) = \mu(E)$, μ_1 je úplná vektorová miera na $\boldsymbol{S}_1$ a $\mu_1(E) = \mu(E)$ pre $E \in \boldsymbol{R}$.

Rozšírenie vektorovej miery μ na úplnú vektorovú mieru μ_1 opísané v tejto vete je najmenšie v tomto zmysle. Ak μ_2 na $\boldsymbol{S}_2$ je iné také rozšírenie, ktoré vyhovuje vete, potom $\boldsymbol{S}_1 \subset \boldsymbol{S}_2$ a $\mu_2(E) = \mu_1(E)$ pre $E \in \boldsymbol{S}_1$.

8. Nech $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S}_1$, μ a μ_1 majú taký význam ako v **7.** Označme $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{R})$ (resp. $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{R})$) systém všetkých množín E tvaru $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ (resp. $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$), pričom $E_n \in \boldsymbol{R}$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$

Veta. *Ku každej množine $E \in \boldsymbol{S}_1$ a každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje*
1. *množina $C \in \boldsymbol{R}$,*
2. *množiny $G \in \boldsymbol{G}$, $F \in \boldsymbol{F}$,*

pričom platí:
1. $\|\mu_1\|(E \triangle C) < \varepsilon$,
2. $F \subset E \subset G$ a $\|\mu_1\|(G - E) < \varepsilon$, $\|\mu_1\|(E - F) < \varepsilon$.

Dôkaz. Pretože μ_1 je definovaná na σ-algebre, $\boldsymbol{S}_1$ splňuje podmienku (A). Existuje teda taká miera ν, že pre každé číslo $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $\|\mu_1\|(E) < \varepsilon$, ak $\nu(E) < \delta$.

1. Nájdime množinu $C \in \boldsymbol{R}$ tak, aby $\nu(E \triangle C) < \delta$. Pre množinu C bude $\|\mu_1\|(E \triangle C) < \varepsilon$.

2. Podobne nájdime množiny $F \in \boldsymbol{F}$ a $G \in \boldsymbol{G}$, $F \subset E \subset G$, aby $\nu(G - E) < \delta$ a $\nu(E - F) < \delta$, z čoho ihneď dostávame tvrdenie vety.

LITERATÚRA

1. Bartle R. G., Dunford N., Schwartz J., Weak compactness and vector measures, Canadian J. Math. 7 (1955), 289—305. 2. Halmos P. R., Measure theory, New York 1950. 3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, Москва 1954. 4. Pettis B. J., On integration in vector spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938) 277—304.

Došlo 4. 4. 1957 (v inej forme 20. 11. 1956).

О ВЕКТОРНОЙ МЕРЕ

ИГОР КЛУВАНЕК

Выводы

В этой статье доказаны некоторые теоремы о расширении векторной меры.

Векторная мера — это счетноаддитивная функция μ определенная на алгебре $\boldsymbol{R}$ подмножеств некоторого множества S; принимающая значения из некоторого пространства Банаха X, т. е. если $\{E_n\}$ последовательность непересекающихся множеств из $\boldsymbol{R}$ такая, что $\bigcup E_n \in \boldsymbol{R}$, то $\lim_i |\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) - \sum_{n=1}^{i} \mu(E_n)| = 0$

Пусть $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ наименьшая σ-алгебра содержащая $\boldsymbol{R}$. Справедливы следующие теоремы:

На $\boldsymbol{S}$ существует векторная мера $\bar{\mu}$, являющаяся продолжением μ (т. е. $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$ для $E \in \boldsymbol{R}$) тогда и только тогда, если существует неотрицательная конечная мера ν на $\boldsymbol{R}$ такая, что $\lim_{\nu(E)\to 0} \|\mu\|(E) = 0$ ($\|\mu\|$ обозначает полувариацию μ, см. [1]).

Если пространство X рефлективно и полувариация $\|\mu\|$ векторной меры μ конечна на $\boldsymbol{R}$, то существует конечная неотрицательная мера ν такая, что $\lim_{\nu(E)\to 0} \|\mu\|(E) = 0$.

Построен пример векторной меры показающий, что условие рефлективности пространства X в последней теореме нельзя отбросить.

ON VECTOR MEASURE

IGOR KLUVÁNEK

Summary

In this paper some theorems concerning extension of vector measure are proved.

A vector measure is a σ-additive function μ defined on algebra $\boldsymbol{R}$ of subsets of an abstract set S, with values in a (real or complex) Banach space X, i. e., if $\{E_n\}$ is any sequence of disjoint sets $\in \boldsymbol{R}$ and $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \boldsymbol{R}$, then $\lim_i | \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) - \sum_{n=1}^{i} \mu(E_n) | = 0$.

Let $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ be the minimal σ-algebra over $\boldsymbol{R}$.

The following theorems hold.

There exists a vector measure $\bar{\mu}$ on $\boldsymbol{S}$, which is extension of (i. e., $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$ for $E \in \boldsymbol{R}$) if and only if there exists a finite non-negative measure ν on $\boldsymbol{R}$ such that $\lim_{\nu(E)\to 0} \| \mu \| (E) = 0$ ($\| \mu \|$ denotes the semivariation of μ, see [1]).

If the space X is reflexive and the semivariation $\| \mu \|$ of μ is finite on $\boldsymbol{R}$, then there exists a finite non-negative measure ν on $\boldsymbol{R}$, such that $\lim_{\nu(E)\to 0} \| \mu \| (E) = 0$.

An example of vector measure is constructed, showing that the requirement of reflexivity of X in the last theorem, must not be omitted.