MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, VII, 3 — 1957

O NĚKTERÝCH VLASTNOSTECH HERMITOVSKÝCH MATIC

MIROSLAV FIEDLER, Praha

Budeme se zabývat jednak vztahy mezi znaménky prvků symetrické matice a souřadnic těch vlastních vektorů matice, které příslušejí nejmenšímu (resp. největšímu) vlastnímu číslu, jednak vztahy mezi znaménky prvků positivně definitní matice a stejnolehlých prvků matice inversní. Věty jsou však formulovány a dokázány pro obecnější případ hermitovských matic. Ty věty z teorie matic, jichž se k důkazům užívá, najde čtenář na př. v knize [1].

1. Čtvercová komplexní matice A se nazývá rozložitelná, existuje-li permutace jejích řádků a zároveň sloupců, která ji převádí na tvar

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{pmatrix},$$

kde A_1, A_2 jsou čtvercové matice stupně alespoň jedna a 0 matice nulová. V opačném případě se A nazývá nerozložitelná.

Převádí-li nějaká permutace řádek a zároveň sloupců matici A na tvar

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ B_{21} & A_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{k1} & B_{k2} & \dots & A_k & 0 \\ B_{k+1,1} & B_{k+1,2} & \dots & B_{k+1,k} & A_{k+1} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

kde čtvercové matice $A_1, A_2, \dots, A_{k+1}$ stupně alespoň jedna jsou nerozložitelné, potom lze ukázat, že číslo k závisí jen na matici A samé a ne na výběru permutace. Toto číslo k nazveme stupněm rozložitelnosti matice A a značíme je $r(A)$.

Jsou-li dále $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ čtvercové matice téhož stupně, potom prvkovým součinem obou matic, značeným $A \bigcirc B$, nazveme matici

$$A \bigcirc B = (a_{ij}b_{ij}). \tag{2}$$

Je-li $A = (a_{ij})$ komplexní matice, značíme A_- matici

$$A_- = (u_{ij}),$$

kde

$$u_{ij} = \operatorname{Re} a_{ij}, \text{ je-li } \operatorname{Re} a_{ij} < 0,$$
$$u_{ij} = 0, \qquad \text{je-li } \operatorname{Re} a_{ij} \geqq 0;$$

jako obvykle značíme A' matici transponovanou, $\bar{A}$ matici komplexně sdruženou, A^* matici transponovanou a komplexně sdruženou k matici A. Pro čtvercovou matici A konečně značíme

$$Q(A) = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2,\text{[1]} \tag{3}$$

$$\operatorname{st}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{4}$$

(stopa matice). Jak známo, pro regulární matici T platí

$$\operatorname{st}(T^{-1}AT) = \operatorname{st}(A). \tag{5}$$

Zřejmě

$$Q(A) = \operatorname{st}(AA^*). \tag{6}$$

Odstavec zakončíme důkazem dvou pomocných vět, které budeme později potřebovat.

Pomocná věta 1. *Hermitovská n-řádková matice*[2] *A má stupeň rozložitelnosti $r(A) = r$ právě tehdy, má-li lineární soustava diagonálních n-řádkových matic D, které jsou s A záměnné:*

$$AD = DA, \tag{7}$$

dimensi $r + 1$.

Důkaz. Všimněme si předně, že vztah (7) můžeme psát pro $A = (a_{ij})$ v ekvivalentním tvaru

$$a_{ij}(d_i - d_j) = 0, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \tag{8}$$

kde $d_1, d_2, \dots, d_n$ jsou diagonální prvky matice D.

Nechť předně matice A je nerozložitelná (t. j. $r(A) = r = 0$) a nechť platí (7). Označme I_1 množinu těch indexů $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$, pro něž $d_i = d_1$, I_2 množinu zbylých indexů. Kdyby $I_2 \neq \emptyset$, potom by z (8) plynulo ($I_1 \neq \emptyset$, neboť $1 \in I_1$)

$$a_{ij} = 0 \quad \text{pro} \quad i \in I_1 \neq \emptyset,\ j \in I_2 \neq \emptyset,$$

a tedy matice A by byla rozložitelná proti předpokladu. Odtud plyne $I_2 = \emptyset$ a pro $c = d_1$ (E je jednotková matice)

$$D = cE. \tag{9}$$

Obráceně, matice tvaru (9) jsou záměnné s A pro každé c a tvoří skutečně lineární soustavu dimense 1.

---

[1] Odmocnina z $Q(A)$ se obvykle značí $N(A)$.
[2] Matice A je hermitovská, platí-li $A = A^*$.

Nechť nyní A má stupeň rozložitelnosti $\mathrm{r}(A) = r > 0$. Pevnou permutací řádků a zároveň sloupců matic A i D se zřejmě rovnost (7) nezmění, a přitom lineárně nezávislé, resp. závislé diagonální matice D přejdou opět v lineárně nezávislé, resp. závislé diagonální matice. Můžeme proto předpokládat, že A má tvar (1). Poněvadž tato matice bude opět hermitovská, je pak

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{r+1} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Nechť vzhledem k této matici diagonální matice D vyhovuje rovnici (7). Pišme

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & D_{r+1} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

kde diagonální matice D_α mají pro $\alpha = 1, \dots, r + 1$ týž stupeň jako A_α. Podmínka (7) je pak ekvivalentní tomu, že pro $\alpha = 1, \dots, r + 1$ platí

$$A_\alpha D_\alpha = D_\alpha A_\alpha. \tag{7'}$$

Poněvadž A_α jsou nerozložitelné, je podle (9)

$$D_\alpha = c_\alpha E_\alpha \tag{9'}$$

pro $\alpha = 1, \dots, r + 1$, kde E_α jsou jednotkové matice týchž stupňů jako A_α.

Platí-li pro diagonální matici D obráceně (11) a (9'), potom platí (7'), a tedy také (7). Avšak matice tvaru (11), splňující (9'), tvoří zřejmě lineární soustavu, která má dimensi $r + 1$ (basi tvoří na př. matice, pro které je jedno z čísel c_α rovno jedné a ostatní rovna nule), jak jsme měli dokázat.

Pomocná věta 2.[3] *Nechť D je diagonální n-řádková matice a C regulární n-řádková matice (obě s komplexními prvky). Potom platí*

$$Q(C^{-1}DC) \geqq Q(D), \tag{12}$$

a přitom rovnost nastane právě tehdy, je-li

$$CC^*D = DCC^*. \tag{13}$$

D ů k a z. Předpokládejme nejprve, že $C = (c_{ij})$ je matice trojúhelníková ($c_{ij} = 0$ pro $i < j$). Potom i matice $C^{-1} = (\gamma_{ij})$ je trojúhelníková, a přitom $\gamma_{ii} = \dfrac{1}{c_{ii}}$, takže matice $C^{-1}DC$ má v hlavní diagonále stejné prvky jako matice D. Odtud a ze (3) plyne ihned (12). Nechť v (12) nastane rovnost. Potom jsou podle předchozího v matici $C^{-1}DC$ nediagonální prvky rovny nule, a tedy celkem $C^{-1}DC = D$, čili

$$CD = DC. \tag{14}$$

---
[3] Toto je odlišně formulovaná Schurova věta z práce [2].

Tato rovnost znamená, jsou-li $d_1, \dots, d_n$ diagonální prvky matice D, že platí jako v (8) pro $i, j = 1, 2, \dots, n$

$$c_{ij}(d_i - d_j) = 0,$$

tedy také

$$\bar{c}_{ij}(d_i - d_j) = 0$$

čili

$$\bar{C}D = D\bar{C}$$

a pro matice transponované

$$DC^* = C^*D. \tag{15}$$

Potom však podle (15) a (14) je

$$CC^*D = CDC^* = DCC^*$$

a platí (13).

Platí-li obráceně (13), pak vzhledem k (6) a (5) je

$$Q(C^{-1}DC) = \mathrm{st}\,(C^{-1}DCC^*D^*C^{*-1}) = \mathrm{st}\,(C^{-1}CC^*DD^*C^{*-1}) = \\ = \mathrm{st}\,(C^*DD^*C^{*-1}) = \mathrm{st}\,(DD^*) = Q(D)$$

a v (12) nastane rovnost.

Nechť nyní C není trojúhelníková. Potom matice CC^* je hermitovská positivně definitní a existuje trojúhelníková regulární matice T tak, že

$$TT^* = CC^*. \tag{16}$$

Avšak odtud podle (6) a (5)

$$Q(C^{-1}DC) = \mathrm{st}\,(C^{-1}DCC^*D^*C^{*-1}) = \mathrm{st}\,(DCC^*D^*C^{*-1}C^{-1}) = \\ = \mathrm{st}\,(DTT^*D^*T^{*-1}T^{-1}) = \mathrm{st}\,(T^{-1}DTT^*D^*T^{*-1}) = Q(T^{-1}DT) \geqq Q(D)$$

podle předchozího odstavce. Zde nastane rovnost právě tehdy, je-li $TT^*D = DTT^*$, t. j. podle (16), platí-li (13). Tím je pomocná věta 2 dokázána.

2. V tomto odstavci dokážeme slíbené věty o hermitovských maticích.

Věta 1. *Budiž A hermitovská matice. Nechť její nejmenší vlastní číslo*[4] *je s-násobné a nechť mu odpovídá alespoň jeden kladný*[5] *vlastní vektor. Potom platí*

$$\mathrm{r}(A_-) \leqq s - 1. \tag{17}$$

D ů k a z. Nechť α je uvedené nejmenší vlastní číslo n-řádkové hermitovské matice $A = (a_{ij})$ a nechť pro $y' = (y_1, \dots, y_n)$ platí

$$y_i > 0, \ (i = 1, \dots, n) \tag{18}$$

$$Ay = \alpha y. \tag{19}$$

---
[4] Vlastní čísla hermitovské matice jsou vesměs reálná.
[5] T. j. o vesměs kladných (a tedy reálných) souřadnicích.

Označíme-li $r(A_-) = r$, existuje podle (1), resp. (10) rozklad množiny indexů $I = \{1, 2, \ldots, n\}$

$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_{r+1}$$

($I_\alpha \neq \emptyset$, $I_\alpha \cap I_\beta = \emptyset$ pro $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, r+1$) takový, že

$$\operatorname{Re} a_{ij} \geqq 0 \text{ pro } i \in I_\alpha, \text{ je } I_\beta, \alpha \neq \beta. \tag{20}$$

Označme ještě $y^1, y^2, \ldots, y^{r+1}$ vektory, pro něž $y^{\alpha\prime} = (y_1^\alpha, y_2^\alpha, \ldots, y_n^\alpha)$, kde

$$y_i^\alpha = y_i \quad \text{pro} \quad i \in I_\alpha,$$
$$y_j^\alpha = 0 \quad \text{pro} \quad j \notin I_\alpha,$$

$\alpha = 1, \ldots, r+1$.

Matice $B = (b_{ij}) = A - \alpha E$, kde E je jednotková matice n-tého stupně, je positivně semidefinitní: pro každou soustavu komplexních čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i \bar{x}_j \geqq 0, \tag{21}$$

a přitom rovnost nastane právě tehdy, leží-li vektor x o souřadnicích $x_1, \ldots, x_n$ ve vhodném lineárním prostoru L dimense s (α je s-násobné vlastní číslo).

Podle (19) platí

$$\sum_{j \in I} b_{ij} y_j = 0 \quad \text{pro} \quad i \in I,$$

tedy také (po násobení y_i a sečtení pro $i \in I_\alpha$)

$$0 = \sum_{\substack{i \in I_\alpha \\ j \in I}} b_{ij} y_i y_j = \sum_{i,j \in I_\alpha} b_{ij} y_i y_j + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^{r+1} \sum_{\substack{i \in I_\alpha \\ j \in I_\beta}} b_{ij} y_i y_j. \tag{22}$$

Avšak všechny reálné části sčítanců v (22) jsou nezáporné:

$$\sum_{i,j \in I_\alpha} b_{ij} y_i y_j = \sum_{i,j \in I} b_{ij} y_i^\alpha y_j^\alpha \geqq 0 \tag{23}$$

podle (21), pro $\alpha \neq \beta$

$$\operatorname{Re} \sum_{\substack{i \in I_\alpha \\ j \in I_\beta}} b_{ij} y_i y_j = \sum_{\substack{i \in I_\alpha \\ j \in I_\beta}} \operatorname{Re} b_{ij} y_i y_j = \sum_{\substack{i \in I_\alpha \\ j \in I_\beta}} \operatorname{Re} a_{ij} y_i y_j \geqq 0 \tag{24}$$

podle (20) a (18). Odtud plyne, že v (23) nastane rovnost, takže

$$y^\alpha \in L.$$

To platí pro $\alpha = 1, \ldots, r+1$, t. j. v L existuje $r+1$ lineárně nezávislých vektorů, odkud

$$s \geqq r + 1.$$

Platí tedy (17) a věta je dokázána.

Poznámka 1. Z této věty aplikované na matici $-A$ dostáváme (pro A_+ definovanou analogicky)

$$r(A_+) \leqq t - 1,$$

jestliže hermitovská matice A má t-násobné největší vlastní číslo, jemuž odpovídá alespoň jeden kladný vlastní vektor.

Poznámka 2. Z (24) a (22) plyne vzhledem k (23), že pro $i \in I_\alpha$, $j \in I_\beta$, $\alpha \neq \beta$ platí $\operatorname{Re} a_{ij} = 0$. Odtud, je-li $\operatorname{Re} A$ reálná část matice A, za předpokladů z věty

$$r(\operatorname{Re} A) = r(A_-).$$

Z věty 1 plyne snadno obecnější věta 1':

Věta 1'. *Budiž $A = (a_{ij})$ hermitovská matice. Nechť její nejmenší vlastní číslo je s-násobné a nechť mu odpovídá vlastní vektor y, $y' = (y_1, \ldots, y_n)$, jehož všechny souřadnice jsou různé od nuly. Potom platí*

$$r(B_-) \leqq s - 1,$$

kde matice $B = (a_{ij} \bar{\varepsilon}_i \varepsilon_j)$, $\varepsilon_i = \dfrac{y_i}{|y_i|}$.

Důkaz plyne odtud, že matice B má stejná vlastní čísla jako matice A, a přitom nejmenšímu vlastnímu číslu odpovídá kladný vektor z, $z' = (|y_1|, \ldots, |y_n|)$.

Věta 2. *Nechť A je hermitovská positivně definitivní matice, $r(A) = r$. Potom matice $A \bigcirc A'^{-1}$ je opět hermitovská positivně definitní, její nejmenší vlastní číslo 1 je $r+1$-násobné a odpovídá mu kladný vlastní vektor j, $j' = (1, 1, \ldots, 1)$.*

Důkaz. Nechť $A = (a_{ij})$ je stupně n. Označme α_{ij} prvky matice A^{-1}, takže $A^{-1} = (\alpha_{ij})$. Matice A je hermitovská positivně definitní, takže existuje regulární matice C tak, že

$$A = CC^*. \tag{25}$$

Matice $P = A \bigcirc A'^{-1} = (p_{ij})$ je zřejmě hermitovská. Je-li $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ libovolný řádkový vektor, přiřaďme mu diagonální matici

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & x_n \end{pmatrix}.$$

Potom platí podle pomocné věty 2 a vztahů (6) a (5)

$$xPx^* = \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij} x_i \bar{x}_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \alpha_{ji} x_i \bar{x}_j = \operatorname{st}(XA\bar{X}A^{-1}) =$$
$$= \operatorname{st}(XCC^*X^*C^{*-1}C^{-1}) = \operatorname{st}(C^{-1}XCC^*X^*C^{*-1}) =$$
$$= Q(C^{-1}XC) \geqq Q(X) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = xx^*,$$

tedy (E je n-řádková jednotková matice)

$$x(P - E)\, x^* \geq 0. \tag{26}$$

Zde nastane rovnost podle (13) a (25) právě tehdy, je-li

$$AX = XA. \tag{27}$$

Podle pomocné věty 1 existuje však právě $r + 1$-rozměrná lineární soustava diagonálních matic X, vyhovujících (27). Odtud plyne, vzhledem k isomorfismu diagonálních matic X a vektorů x, že existuje $r + 1$-rozměrný lineární prostor vektorů x, pro něž v (26) nastane rovnost. Číslo 1 je tedy nejmenší vlastní číslo matice $P = A \bigcirc A'^{-1}$, která je proto positivně definitní; toto vlastní číslo je $r + 1$-násobné a odpovídá mu kladný vlastní vektor j pro $j' = (1, 1, \ldots, 1)$ [příslušná matice X je jednotková a vyhovuje (27)]. Tím je věta 2 dokázána.

Věta 3. *Nechť A je positivně definitní hermitovská matice. Potom matice $(A \bigcirc A'^{-1})_-$ má stejný stupeň rozložitelnosti jako matice A.*

Důkaz. Nechť $\mathrm{r}(A) = r$. Podle věty 2 má hermitovská matice $A \bigcirc A'^{-1}$ $r + 1$-násobné nejmenší vlastní číslo 1, jemuž odpovídá (je $r \geq 0$) kladný vlastní vektor. Podle věty 1 platí

$$\mathrm{r}\,[(A \bigcirc A'^{-1})_-] \leq r. \tag{28}$$

Je-li však prvek na místě i, j v matici A roven nule, je také prvek na tomto místě v matici $(A \bigcirc A'^{-1})_-$ roven nule. Tedy

$$\mathrm{r}\,[(A \bigcirc A'^{-1})_-] \geq r. \tag{29}$$

Z (28) a (29) plyne tvrzení věty.

Poznámka. Je zřejmé, že matice A a $(A \bigcirc A'^{-1})_-$ mají nejen stejný stupeň rozložitelnosti, ale i stejnou strukturu rozložitelnosti, t. j. skupiny řádek a zároveň sloupců, jimž odpovídají maximální nerozložitelné „hlavní" podmatice.

Z věty 3 lze odvodit řadu důsledků, zajímavých zejména pro případ reálných matic.

Důsledek 1. *Je-li hermitovská positivně definitní matice A nerozložitelná, je i matice $(A \bigcirc A'^{-1})_-$ nerozložitelná.*

Poznámka. Je-li speciálně A reálná, lze tento důsledek formulovat také takto: množina M_A těch dvojic indexů (i, j), pro něž jsou prvky matice A a inversní matice A^{-1} na místě i, j nenulové a opačných znamének, je souvislá v tom smyslu, že z každého indexu (u A stupně n) $1, 2, \ldots, n$ se řetězem přes tyto dvojice dostaneme do každého jiného indexu; je-li $i \neq j$, existuje $k \geq 1$ a $i_1, \ldots, i_k$ tak, že $(i, i_1), (i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_k, j)$ jsou dvojice z M_A.

Důsledek 2. *Platí-li pro n-řádkovou hermitovskou positivně definitní matici $A = (a_{ij})$ s inversní maticí $A^{-1} = (\alpha_{ij})$, že*

$$\operatorname{Re}\,(a_{ij}\alpha_{ji}) \geq 0 \quad pro\ i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, n, \tag{30}$$

potom A je diagonální.

Důkaz. Z (30) totiž plyne, že matice $(A \bigcirc A'^{-1})_-$ je diagonální, t. j. má stupeň rozložitelnosti $n - 1$. Podle věty 3 platí tedy totéž i pro A.

LITERATURA

1. Гантмахер, Ф. Р.: Теория матриц, М.—Л., Гостехиздат, 1953. 2. Schur I., Über die charakteristischen Wurzeln einer linearen Substitution mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen, Math. Annalen 66 (1909), 488—510.

Došlo 8. 4. 1957.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЭРМИТОВЫХ МАТРИЦ

МИРОСЛАВ ФИДЛЕР

Выводы

Назовем степенью разложимости $\mathrm{r}(A)$ эрмитовой матрицы A число r, если после нежимых перестановки строк и столбцов матрица A будет прямой суммой $r + 1$ неразложимых матриц. Далее, для двух матриц $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ того же порядка определяется их элементовое произведение как матрица $A \bigcirc B = (a_{ij}b_{ij})$. Для комплексной матрицы A обозначается через A_- матрица (u_{ij}) с элементами $u_{ij} = \operatorname{Re} a_{ij}$ для $\operatorname{Re} a_{ij} < 0$, $u_{ij} = 0$ для $\operatorname{Re} a_{ij} \geq 0$.

Доказываются следующие теоремы:

1. Если для эрмитовой матрицы A существует положительный собственный вектор, соответствующий наименьшему собственному значению кратности s, то

$$\mathrm{r}(A_-) \leq s - 1.$$

2. Пусть A положительно определенная эрмитова матрица, $\mathrm{r}(A) = r$. Тогда число 1 — наименьшее собственное значение матрицы $A \bigcirc A'^{-1}$; его кратность — $r + 1$ и соответствующий собственный вектор — j, $j' = (1, 1, \ldots, 1)$.

3. Для положительно определенной эрмитовой матрицы A имеет место равенство

$$\mathrm{r}\,[(A \bigcirc A'^{-1})_-] = \mathrm{r}(A).$$

ON SOME PROPERTIES OF HERMITIAN MATRICES

MIROSLAV FIEDLER

Summary

We say that a Hermitian matrix A is decomposable of degree r, written $\mathrm{r}(A) = r$ if, by permutation of the rows and columns, A becomes a direct sum of $r + 1$ indecomposable matrices. Further, two matrices $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ being of the same

order, we define their element-product as the matrix $A \circ B = (a_{ij}b_{ij})$. Finally, if $A = (a_{ij})$ is a complex matrix, we denote by A_- the matrix (u_{ij}) with $u_{ij} = \mathrm{Re}\, a_{ij}$ for $\mathrm{Re}\, a_{ij} < 0$, $u_{ij} = 0$ for $\mathrm{Re}\, a_{ij} \geqq 0$.

The following theorems are proved:

1. If A is Hermitian and if there exists a positive eigenvector corresponding to the least eigenvalue with multiplicity s, then

$$\mathrm{r}(A_-) \leqq s - 1.$$

2. If A is positive definite Hermitian, $\mathrm{r}(A) = r$, then 1 is the least eigenvalue of $A \circ A'^{-1}$; its multiplicity is $r + 1$ and a corresponding positive eigenvector is j; $j' = (1, 1, \ldots, 1)$.

3. If A is positive definite Hermitian, then

$$\mathrm{r}[(A \circ A'^{-1})_-] = \mathrm{r}(A).$$