MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, VII, 3 — 1957

RADIKÁL A POLOJEDNODUCHOSŤ DIREKTNÉHO SÚČINU ALGEBIER

JÁN IVAN

Katedra matematiky Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave

Obsahom tejto práce je vyšetrovanie niektorých vlastností direktného súčinu algebier. Ide predovšetkým o otázku, ako súvisí radikál algebry $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ s radikálmi algebier $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, resp. aký je súvis medzi príslušnými faktorovými algebrami podľa radikálov. Pritom pojmy algebra rádu n nad telesom K, báza algebry, podalgebra, ideál, nilpotentná algebra, nilpotentný element, vlastne nilpotentný element, radikál, faktorová algebra, polojednoduchá algebra, reprezentácia algebry (izomorfná, regulárna), stopa matice, stopa elementu algebry v nejakej reprezentácii a pod. budeme používať v tom zmysle, ako sú definované v [2], resp. [3]. Skutočnosť, že elementy $u_1, u_2, \ldots, u_n$ tvoria bázu algebry $\mathfrak{A}$ rádu n nad telesom K, budeme symbolicky zapisovať takto: $\mathfrak{A} = Ku_1 + Ku_2 + \ldots + Ku_n$ alebo krátko $\mathfrak{A} = \sum_{i=1}^{n} Ku_i$. Faktorovú algebru algebry $\mathfrak{A}$ podľa radikálu $\mathfrak{R}$ budeme označovať znakom $\mathfrak{A}/\mathfrak{R}$, stopu matice A znakom $\sigma(A)$ a stopu elementu $a \in \mathfrak{A}$ v reprezentácii Γ znakom $\sigma_\Gamma(a)$. Ostatné symboly budú mať obvyklý význam.

Zo známych viet teórie algebier budeme sa odvolávať predovšetkým na nasledujúce dve vety.

Veta A. *Nech K je komutatívne teleso charakteristiky nula. Potom algebra $\mathfrak{A} = Ku_1 + Ku_2 + \ldots + Ku_n$ je nilpotentná vtedy a len vtedy, ak v nejakej (ľubovoľnej) izomorfnej reprezentácii Γ algebry $\mathfrak{A}$ v telese K stopy všetkých elementov bázy sú rovné nule, t. j.*

$$\sigma_\Gamma(u_1) = \sigma_\Gamma(u_2) = \ldots = \sigma_\Gamma(u_n) = 0.$$

Dôkaz. Pozri [1], str. 29.

Veta B. *Nech K je komutatívne teleso charakteristiky nula. Potom element a algebry $\mathfrak{A} = Ku_1 + Ku_2 + \ldots + Ku_n$ je vlastne nilpotentný vtedy a len vtedy, ak v nejakej (ľubovoľnej) izomorfnej reprezentácii Γ algebry $\mathfrak{A}$ v telese K platí*

$$\sigma_\Gamma(au_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dôkaz. Pozri [1], str. 31.

1

Pre úplnosť uvedieme na začiatok definíciu direktného súčinu algebier. Nech $\mathfrak{A}_1 = Ku_1 + Ku_2 + \ldots + Ku_m$, $\mathfrak{A}_2 = Kv_1 + Kv_2 + \ldots + Kv_n$ sú ľubovoľné dve algebry nad telesom K, nech ich multiplikačné tabuľky vzhľadom na zvolené bázy sú:

$$u_i u_j = \sum_{\mu=1}^{m} \gamma_{ij}^{\mu} u_\mu \quad (i, j = 1, 2, \ldots, m), \tag{1}$$

$$v_k v_l = \sum_{\nu=1}^{n} \delta_{kl}^{\nu} v_\nu \quad (k, l = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Uvažujme mn-rozmerný vektorový priestor $\mathfrak{A}$ nad telesom K, prvky jeho bázy označme w_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$, t. j.

$$\mathfrak{A} = Kw_{11} + Kw_{12} + \ldots + Kw_{ij} + \ldots + Kw_{mn}.$$

Je zrejmé, že ak v priestore $\mathfrak{A}$ definujeme násobenie nasledujúcou multiplikačnou tabuľkou:

$$w_{ik} w_{jl} = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_{ij}^{\mu} \delta_{kl}^{\nu} w_{\mu\nu} \quad \begin{pmatrix} i, j = 1, 2, \ldots, m \\ k, l = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{3}$$

(predpokladajúc splnenie distributívneho zákona a podmienky $(\lambda a) b = a(\lambda b) = \lambda(ab)$ pre každé $\lambda \in K$, $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{A}$), tak $\mathfrak{A}$ bude tvoriť algebru rádu mn nad telesom K.

Definícia 1. *Nech $\mathfrak{A}_1 = \sum_{\mu=1}^{m} Ku_\mu$, $\mathfrak{A}_2 = \sum_{\nu=1}^{n} Kv_\nu$ sú ľubovoľné algebry nad telesom K a nech ich multiplikačné tabuľky sú (1), resp. (2). Potom algebru $\mathfrak{A} = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} Kw_{\mu\nu}$ s multiplikačnou tabuľkou (3) nazývame direktným súčinom algebier $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ a značíme $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$.*

Poznámka 1. Miesto symbolov w_{ij} mohli by sme na označenie prvkov bázy algebry $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ použiť dvojice (u_i, v_j) alebo jednoducho symbolické súčiny $u_i v_j$. V poslednom prípade môžeme sa na algebru $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ dívať ako na množinu všetkých súčtov konečného počtu sčítancov, z ktorých každý je symbolický súčin $a_1 a_2$, kde $a_1 \in \mathfrak{A}_1$, $a_2 \in \mathfrak{A}_2$. Pritom tieto symbolické súčiny sa násobia takto: $(a_1 a_2)(b_1 b_2) = a_1 b_1 \,.\, a_2 b_2$. Potom sa ľahko dokáže (pozri napr. [2], str. 5), že direktný súčin $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ nezávisí od voľby báz algebier $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$.

Poznámka 2. Medzi podalgebrami algebry $\mathfrak{A}$ zvláštne postavenie zaujíma tzv. *nulová podalgebra* (znak (0)), t. j. podalgebra, ktorá obsahuje jediný element — nulu algebry $\mathfrak{A}$. Hoci táto algebra nemá bázu (element $0 \in \mathfrak{A}$ je lineárne závislý), považuje sa za algebru konečného rádu, jej rádom nazýva sa číslo 0. Táto triviálna podalgebra je zrejme aj ľavým (pravým, obojstranným) ideálom algebry $\mathfrak{A}$ *(nulový ideál)*. Z definície 1 vyplýva: Ak $\mathfrak{B}_1 \neq (0)$ je podalgebra algebry $\mathfrak{A}_1$ a $\mathfrak{B}_2 \neq (0)$ podalgebra algebry $\mathfrak{A}_2$, direktný súčin $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B} \neq (0)$ je podalgebrou algebry $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$. V definícii 1 je však zavedený direktný súčin algebier, ktorých rády sú ≥ 1. Preto v prípade, že $\mathfrak{B}_1 = (0)$ alebo $\mathfrak{B}_2 = (0)$ (alebo zároveň $\mathfrak{B}_1 = (0)$, $\mathfrak{B}_2 = (0)$), nemôžeme túto definíciu použiť a treba v tomto prípade súčin $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$ definovať dodatočne. Je zrejmé, že bude výhodné definovať ho ako nulovú podalgebru algebry $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$.

Pripomeňme si ešte definíciu Kroneckerovho súčinu matíc.

Definícia 2. *Nech $A = (\alpha_{ik})$ je štvorcová matica stupňa m a $B = (\beta_{ik})$ štvorcová matica stupňa n, štvorcová matica*

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_{11}B, \alpha_{12}B, & \dots, & \alpha_{1m}B \\ \alpha_{21}B, \alpha_{22}B, & \dots, & \alpha_{2m}B \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \alpha_{m1}B, \alpha_{m2}B, & \dots, & \alpha_{mm}B \end{pmatrix}$$

stupňa mn nazýva sa Kroneckerovým súčinom matíc A, B a označuje sa $C = A \times B$.

Z tejto definície pre stopu Kroneckerovho súčinu matíc vyplýva:

$$\sigma(A \times B) = \sigma(A) \,.\, \sigma(B).$$

Všimnime si teraz, ako súvisí regulárna reprezentácia algebry $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ s regulárnymi reprezentáciami algebier $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$.

Maticu, ktorá v regulárnej reprezentácii Γ_1 algebry $\mathfrak{A}_1$ prislúcha prvku jej bázy u_j, označme $A_j^{(1)}$ $(j = 1, 2, \dots, m)$. Podobne $A_l^{(2)}$ bude matica, ktorá v regulárnej reprezentácii Γ_2 algebry $\mathfrak{A}_2$ odpovedá prvku bázy v_l $(l = 1, 2, \dots, n)$ a A_{jl} matica, ktorá v regulárnej reprezentácii Γ algebry $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ odpovedá prvku bázy w_{jl} $(j = 1, 2, \dots, m;\ l = 1, 2, \dots, n)$. Ale

$$u_i u_j = \sum_{\mu=1}^{m} \gamma_{ij}^{\mu} u_\mu, \qquad v_k v_l = \sum_{\nu=1}^{n} \delta_{kl}^{\nu} v_\nu .$$

To znamená (pozri napr. [1], str. 29), že

$$A_j^{(1)} = \begin{pmatrix} \gamma_{1j}^1, \gamma_{1j}^2, & \dots, & \gamma_{1j}^m \\ \gamma_{2j}^1, \gamma_{2j}^2, & \dots, & \gamma_{2j}^m \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \gamma_{mj}^1, \gamma_{mj}^2, & \dots, & \gamma_{mj}^m \end{pmatrix}, \qquad A_l^{(2)} = \begin{pmatrix} \delta_{1l}^1, \delta_{1l}^2, & \dots, & \delta_{1l}^n \\ \delta_{2l}^1, \delta_{2l}^2, & \dots, & \delta_{2l}^n \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \delta_{nl}^1, \delta_{nl}^2, & \dots, & \delta_{nl}^n \end{pmatrix}.$$

Ak zvolíme nasledovné poradie prvkov bázy algebry $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$:

$$w_{11}, w_{12}, \dots, w_{1n};\ w_{21}, w_{22}, \dots, w_{2n};\ \ \dots\ ;\ w_{m1}, w_{m2}, \dots, w_{mn}$$

a ak berieme do úvahy, že $w_{ik} w_{jl} = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_{ij}^{\mu} \delta_{kl}^{\nu} w_{\mu\nu}$, dostaneme

$$A_{jl} = \begin{pmatrix} \gamma_{1j}^1\delta_{1l}^1, \gamma_{1j}^1\delta_{1l}^2, \dots, \gamma_{1j}^1\delta_{1l}^n, & \dots, & \gamma_{1j}^m\delta_{1l}^1, \gamma_{1j}^m\delta_{1l}^2, \dots, \gamma_{1j}^m\delta_{1l}^n \\ \gamma_{1j}^1\delta_{2l}^1, \gamma_{1j}^1\delta_{2l}^2, \dots, \gamma_{1j}^1\delta_{2l}^n, & \dots, & \gamma_{1j}^m\delta_{2l}^1, \gamma_{1j}^m\delta_{2l}^2, \dots, \gamma_{1j}^m\delta_{2l}^n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \gamma_{mj}^1\delta_{nl}^1, \gamma_{mj}^1\delta_{nl}^2, \dots, \gamma_{mj}^1\delta_{nl}^n, & \dots, & \gamma_{mj}^m\delta_{nl}^1, \gamma_{mj}^m\delta_{nl}^2, \dots, \gamma_{mj}^m\delta_{nl}^n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_{1j}^1 A_l^{(2)}, & \dots, & \gamma_{1j}^m A_l^{(2)} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \gamma_{mj}^1 A_l^{(2)}, & \dots, & \gamma_{mj}^m A_l^{(2)} \end{pmatrix},$$

t. j.

$$A_{jl} = A_j^{(1)} \times A_l^{(2)}.$$

Tým je dokázaná

Lemma 1. *Ak v regulárnej reprezentácii Γ_1 algebry $\mathfrak{A}_1 = \sum_{j=1}^{m} K u_j$ elementu bázy u_j odpovedá matica $A_j^{(1)}$, t. j.*

$$\Gamma_1 : u_j \to A_j^{(1)},$$

a v regulárnej reprezentácii Γ_2 algebry $\mathfrak{A}_2 = \sum_{l=1}^{n} K v_l$ elementu bázy v_l matica $A_l^{(2)}$, t. j.

$$\Gamma_2 : v_l \to A_l^{(2)},$$

potom matica A_{jl}, ktorá v regulárnej reprezentácii Γ algebry $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} K w_{jl}$ prislúcha elementu bázy w_{jl}, je rovná Kroneckerovmu súčinu matíc $A_j^{(1)}$, $A_l^{(2)}$, t. j.

$$\Gamma : w_{jl} \to A_{jl} = A_j^{(1)} \times A_l^{(2)}.$$

Dôsledok. *Pre stopy elementov báz algebier $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ a $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ v ich regulárnych reprezentáciách platí:*

$$\sigma_\Gamma(w_{jl}) = \sigma_{\Gamma_1}(u_j)\sigma_{\Gamma_2}(v_l).$$

Vidíme teda, že ak poznáme regulárne reprezentácie algebier $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, poznáme aj regulárnu reprezentáciu ich direktného súčinu.

Pomocou lemmy 1 a vety A teraz ľahko dokážeme nasledujúcu vetu o nilpotentnosti direktného súčinu algebier.

Veta 1. *Nech K je komutatívne teleso charakteristiky nula; nech $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}$ sú algebry konečného rádu nad K a nech $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$. Potom algebra $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ je nilpotentná vtedy a len vtedy, ak aspoň jedna z algebier $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ je nilpotentná.*

Dôkaz. Podľa vety A algebra $\mathfrak{A}$ nad komutatívnym telesom K charakteristiky nula je nilpotentná vtedy a len vtedy, ak v nejakej izomorfnej reprezentácii stopa každého elementu bázy je rovná nule. Aby sme vedeli rozhodnúť, či algebra $\mathfrak{A}$ je nilpotentná alebo nie, potrebujeme teda poznať stopy elementov jej bázy v nejakej izomorfnej reprezentácii. Vo všeobecnosti regulárna reprezentácia algebry $\mathfrak{A}$ nie je izomorfná reprezentácia. Ľahko sa však dokáže (pozri napr. [1], str. 21), že na to, aby regulárna reprezentácia algebry $\mathfrak{A}$ bola izomorfná, stačí, aby algebra $\mathfrak{A}$ obsahovala jednotku. Ak algebra $\mathfrak{A}$ nemá jednotku, môžeme vždy urobiť izomorfnú reprezentáciu stupňa $n + 1$. V tom prípade algebru $\mathfrak{A}$ rádu n považujeme za podalgebru algebry $\overline{\mathfrak{A}}$ rádu $n + 1$, ktorú dostaneme tak, že k báze $u_1, u_2, \ldots, u_n$ algebry $\mathfrak{A}$ pridáme jednotku e. Treba však pri tejto algebre overiť platnosť asociatívneho zákona. Stačí ho zrejme overiť pre prvky bázy. To však ihneď vyplýva zo vzťahov $eu_i = u_ie = u_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. Algebra $\overline{\mathfrak{A}} = Ke + Ku_1 + \ldots + Ku_n$ je rádu $n + 1$ a obsahuje jednotku e, a teda jej regulárna reprezentácia je izomorfná reprezentácia. Táto reprezentácia je izomorfnou reprezentáciou aj pôvodnej algebry $\mathfrak{A}$ (pretože $\mathfrak{A}$ je podalgebrou algebry $\overline{\mathfrak{A}}$). Takýmto spôsobom vieme vždy nájsť izomorfnú reprezentáciu stupňa $n + 1$ algebry $\mathfrak{A}$ rádu n nad K. Ľahko sa dá overiť, že ak $\mathfrak{A} = Ku_1 + Ku_2 + \ldots + Ku_n$, $\overline{\mathfrak{A}} = Ke + Ku_1 + \ldots + Ku_n$, stopa každého elementu u_i bázy algebry $\mathfrak{A}$ v regulárnej reprezentácii algebry $\mathfrak{A}$ a v regulárnej reprezentácii algebry $\overline{\mathfrak{A}}$ (ktorá je izomorfnou reprezentáciou algebry $\overline{\mathfrak{A}}$ aj algebry $\mathfrak{A}$) je rovnaká. To isté zrejme platí pre každý element $a \in \mathfrak{A}$. Teda, ak potrebujeme stopy elementov algebry $\mathfrak{A}$ v nejakej izomorfnej reprezentácii, stačí sa obmedziť na jej regulárnu reprezentáciu.

Na základe predchádzajúcej úvahy a vety A algebra $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ bude nilpotentná vtedy a len vtedy, ak v jej regulárnej reprezentácii Γ platí

$$\sigma_\Gamma(w_{jl}) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m;\ l = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Ukážeme, že podmienka (4) je splnená vtedy a len vtedy, ak aspoň jedna z algebier $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ je nilpotentná.

Nech napr. algebra $\mathfrak{A}_1$ je nilpotentná. To znamená (na základe vety A v súvislosť s uvedenou poznámkou), že v regulárnej reprezentácii Γ_1 algebry $\mathfrak{A}_1$ stopa každého prvku jej bázy je rovná nule, t. j.

$$\sigma_\Gamma(u_j) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Z toho a z dôsledku lemmy 1 však vyplýva

$$\sigma_\Gamma(w_{jl}) = \sigma_{\Gamma_1}(u_j)\,\sigma_{\Gamma_2}(v_l) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m;\ l = 1, 2, \ldots, n),$$

čo znamená, že algebra $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ je nilpotentná.

Naopak, nech $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ je nilpotentná, t. j. je splnená podmienka (4). Predpokladajme, že ani algebra $\mathfrak{A}_1$ ani $\mathfrak{A}_2$ nie je nilpotentná. To znamená, že v regulárnej reprezentácii Γ_1 algebry $\mathfrak{A}_1$ aspoň pre jedno j $(1 \leqq j \leqq m)$ a v regulárnej reprezentácii Γ_2 algebry $\mathfrak{A}_2$ aspoň pre jedno l $(1 \leqq l \leqq n)$ platí

$$\sigma_{\Gamma_1}(u_j) \neq 0, \qquad \sigma_{\Gamma_2}(v_l) \neq 0,$$

z čoho na základe dôsledku lemmy 1 vyplýva:

$$\sigma_\Gamma(w_{jl}) = \sigma_{\Gamma_1}(u_j)\,\sigma_{\Gamma_2}(v_l) \neq 0,$$

čo je spor. Teda aspoň jedna z algebier $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ musí byť nilpotentná. Tým je veta dokázaná.

2

Na základe lemmy 1 medzi reprezentáciami algebier $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ a reprezentáciami algebry $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ existuje tesná súvislosť. V teórii reprezentácie algebier však dôležitú úlohu hrajú polojednoduché algebry. Je preto prirodzené položiť takúto otázku: kedy je algebra $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ polojednoduchá a v prípade, že $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ nie je polojednoduchá, ako súvisí jej radikál s radikálmi algebier $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$, resp. aký je súvis medzi príslušnými faktorovými algebrami podľa radikálov. Na tieto otázky sa pokúsime v ďalšom dať odpoveď. Na to však budeme potrebovať nasledujúcu vetu o ideáloch v direktnom súčine algebier.

Lemma 2. *Nech pre $i = 1, 2$ je $\mathfrak{L}_i(\mathfrak{R}_i, \mathfrak{M}_i)$ ľavý (pravý, obojstranný) ideál algebry $\mathfrak{A}_i$. Potom $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2 (\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2, \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2)$ je ľavý (pravý, obojstranný) ideál algebry $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$.*

Dôkaz. Urobíme ho napr. pre ľavé ideály. Nech

$$\mathfrak{A}_1 = Ku_1 + \ldots + Ku_r + Ku_{r+1} + \ldots + Ku_m,$$

$$\mathfrak{A}_2 = Kv_1 + \ldots + Kv_s + Kv_{s+1} + \ldots + Kv_n,$$

$$u_iu_j = \sum_{\mu=1}^{m} \gamma_{ij}^{\mu} u_\mu, \qquad v_kv_l = \sum_{\nu=1}^{n} \delta_{kl}^{\nu} v_\nu$$

a nech bázy daných algebier sú volené tak, že $\mathfrak{L}_1 = Ku_1 + \ldots + Ku_r$ je ľavý ideál algebry $\mathfrak{A}_1$ a $\mathfrak{L}_2 = Kv_1 + \ldots + Kv_s$ ľavý ideál algebry $\mathfrak{A}_2$. To znamená, že pre štruktúrne konštanty platí (pozri napr. [1], str. 17):

$$\gamma_{ij}^{\alpha} = 0 \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, r \\ \alpha = r + 1, r + 2, \ldots, m, \end{pmatrix},$$

$$\delta_{kl}^{\beta} = 0 \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, n; l = 1, 2, \ldots, s \\ \beta = s + 1, s + 2, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\gamma_{ij}^{\mu}\delta_{kl}^{\nu} = 0 \tag{5}$$

pre $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, r$; $\mu = r + 1, r + 2, \ldots, m$ a pre ľubovoľné k, l, ν, alebo pre ľubovoľné i, j, μ a pre $k = 1, 2, \ldots, n$; $l = 1, 2, \ldots, s$; $\nu = s + 1, s + 2, \ldots, n$. Direktný súčin $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2$ je zrejme podalgebra algebry $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$. Z (5) však vyplýva, že súčiny

$$w_{ik}w_{jl}$$

pre $j = 1, 2, \ldots, r$; $l = 1, 2, \ldots, s$ a pre ľubovoľné i, k sa dajú vyjadriť ako lineárna kombinácia prvkov bázy podalgebry $\mathfrak{L}$. To však znamená, že $\mathfrak{L}$ je ľavý ideál algebry $\mathfrak{A}$, č. b. t. d. Ak aspoň jeden z ideálov $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ je nulový, potom $\mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2$ je nulový ideál algebry $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ (pozri poznámku 2).

Veta 2. *Nech sú splnené predpoklady vety 1 a nech $\mathfrak{R}_1$ je radikál algebry $\mathfrak{A}_1$ a $\mathfrak{R}_2$ radikál algebry $\mathfrak{A}_2$. Potom*

$$\mathfrak{R} = (\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{R}_2)$$

je radikál algebry $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$.

Dôkaz. Nech $\mathfrak{A}_1 = Ku_1 + \ldots + Ku_r + Ku_{r+1} + \ldots + Ku_m$, $\mathfrak{A}_2 = Kv_1 + \ldots + Kv_s + Kv_{s+1} + \ldots + Kv_n$ a nech $\mathfrak{R}_1 = Ku_1 + \ldots + Ku_r$ je radikál algebry $\mathfrak{A}_1$ a $\mathfrak{R}_2 = Kv_1 + \ldots + Kv_s$ radikál algebry $\mathfrak{A}_2$. Podľa lemmy 2 množiny $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{A}_2$ sú obojstranné ideály algebry $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$. Keďže $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ sú nilpotentné ideály, podľa vety 1 aj ideály $\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{R}_2$ sú nilpotentné. Je známe (pozri napr. [2], str. 22–23), že súčet nilpotentných ideálov je opäť nilpotentný ideál. Teda aj súčet $\mathfrak{R} = (\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{R}_2)$ je nilpotentný obojstranný ideál algebry $\mathfrak{A}$ a teda je obsiahnutý v jej radikále. Najprv zistíme rád a bázu ideálu $\mathfrak{R}$.

Rád ideálu $\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{A}_2$ je zrejme rn, jeho bázu tvoria elementy

$$w_{11}, w_{12}, \ldots, w_{1n}, \ldots, w_{r1}, w_{r2}, \ldots, w_{rn}.$$

Podobne rád ideálu $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{R}_2$ je ms a jeho báza je

$$w_{11}, w_{12}, \ldots, w_{1s}, \ldots, w_{m1}, w_{m2}, \ldots, w_{ms}.$$

Rád ideálu $\mathfrak{R}$ bude zrejme $t = rn + ms - p$, kde p je rád ideálu $\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{A}_2 \cap \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{R}_2$. Zrejme je $\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{A}_2 \cap \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2$, teda $p = rs$, t. j. $t = rn + ms - rs = rn + (m - r)s$. Bázu ideálu $\mathfrak{R}$ budú teda tvoriť prvky bázy ideálu $\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{A}_2$ a tie prvky bázy ideálu $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{R}_2$, ktoré nie sú obsiahnuté v báze ideálu $\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{A}_2$ (alebo naopak: prvky bázy ideálu $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{R}_2$ a tie prvky bázy ideálu $\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{A}_2$, ktoré nie sú obsiahnuté v báze ideálu $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{R}_2$). Teda napr. prvky

$$w_{11}, w_{12}, \ldots, w_{1n}; \ldots, w_{r1}, w_{r2}, \ldots, w_{rn}; w_{r+1,1}, w_{r+1,2}, \ldots, w_{r+1,s}, \ldots, w_{m1}, w_{m2}, \ldots, w_{ms}$$

v počte $rn + (m - r)s$ tvoria bázu ideálu $\mathfrak{R}$.

Teraz dokážeme, že $\mathfrak{R}$ je radikál algebry $\mathfrak{A}$, t. j. jej maximálny obojstranný nilpotentný ideál. Predpokladajme opak, že $\mathfrak{R}$ nie je maximálny nilpotentný obojstranný ideál algebry $\mathfrak{A}$, t. j. že algebra $\mathfrak{A}$ obsahuje aspoň jeden taký nilpotentný obojstranný ideál $\mathfrak{R}'$, že $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}'$ (znak $\subset$ znamená vlastnú podmnožinu). Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že elementy

$$w_{11}, \ldots, w_{rn}, w_{r+1,1}, \ldots, w_{ms}; w_{r+1,s+1}, \ldots, w_{\varrho\sigma}$$

tvoria bázu ideálu $\mathfrak{R}$. Pritom $w_{11}, \ldots, w_{rn}, w_{r+1,1}, \ldots, w_{ms}$ je báza ideálu $\mathfrak{R}$. Zrejme elementy $u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_\varrho$ nepatria do radikálu $\mathfrak{R}_1$ algebry $\mathfrak{A}_1$ a elementy $v_{s+1}, v_{s+2}, \ldots, v_\sigma$ do radikálu $\mathfrak{R}_2$ algebry $\mathfrak{A}_2$. Zvoľme si jeden element bázy ideálu $\mathfrak{R}'$, ktorý nie je prvkom bázy ideálu $\mathfrak{R}$, napr. element $w_{\varrho\sigma}$. Element $w_{\varrho\sigma}$ patrí do $\mathfrak{R}'$, teda aj do radikálu algebry $\mathfrak{A}$. Ako je známe, radikál algebry je množina všetkých jej vlastne nilpotentných elementov (pozri

napr. [2], str. 24). Teda element $w_{\varrho\sigma}$ je vlastne nilpotentný element algebry $\mathfrak{A}$. Podľa vety B v ľubovoľnej izomorfnej reprezentácii Γ algebry $\mathfrak{A}$ platí

$$\sigma_\Gamma(w_{\varrho\sigma}w_{ik}) = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Z tých istých dôvodov ako v dôkaze vety 1 stačí predpokladať, že Γ je regulárna reprezentácia algebry $\mathfrak{A}$.

Na základe toho, že pre $\alpha \in K$, $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{A}$ platí $\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b)$, $\sigma(\alpha a) = \alpha\sigma(a)$, dostaneme

$$\sigma_\Gamma(w_{\varrho\sigma}w_{ik}) = \sigma_\Gamma\left(\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} \gamma^{\mu}_{\varrho i}\delta^{\nu}_{\sigma k}w_{\mu\nu}\right) = \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} \gamma^{\mu}_{\varrho i}\sigma^{\nu}_{\sigma k}\sigma_\Gamma(w_{\mu\nu}) =$$
$$= \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} \gamma^{\mu}_{\varrho i}\delta^{\nu}_{\sigma k}\sigma_{\Gamma_1}(u_\mu)\sigma_{\Gamma_2}(v_\nu) = \left(\sum_{\mu=1}^{m} \gamma^{\mu}_{\varrho i}\sigma_{\Gamma_1}(u_\mu)\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n} \delta^{\nu}_{\sigma k}\sigma_{\Gamma_2}(v_\nu)\right),$$

kde Γ_1 je regulárna reprezentácia algebry $\mathfrak{A}_1$ a Γ_2 regulárna reprezentácia algebry $\mathfrak{A}_2$. Teda pre $i = 1, 2, \ldots, m$; $k = 1, 2, \ldots, n$ platí:

$$\left(\sum_{\mu=1}^{m} \gamma^{\mu}_{\varrho i}\sigma_{\Gamma_1}(u_\mu)\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n} \delta^{\nu}_{\sigma k}\sigma_{\Gamma_2}(v_\nu)\right) = 0.$$

Element $u_\varrho \in \mathfrak{A}_1$ nepatrí do radikálu $\mathfrak{R}_1$, teda nie je vlastne nilpotentný. To isté platí o elemente $v_\sigma \in \mathfrak{A}_2$. Podľa vety B to znamená, že aspoň pre jedno prírodzené číslo i $(1 \leqq i \leqq m)$ a aspoň pre jedno k $(1 \leqq k \leqq n)$ platí

$$\sigma_{\Gamma_1}(u_\varrho u_i) \neq 0,\ \sigma_{\Gamma_2}(v_\sigma v_k) \neq 0,$$

teda aj

$$\sigma_{\Gamma_1}(u_\varrho u_i)\,\sigma_{\Gamma_2}(v_\sigma v_k) \neq 0.$$

Ale

$$\sigma_{\Gamma_1}(u_\varrho u_i) = \sigma_{\Gamma_1}\left(\sum_{\mu=1}^{m} \gamma^{\mu}_{\varrho i}u_\mu\right) = \sum_{\mu=1}^{m} \gamma^{\mu}_{\varrho i}\sigma_{\Gamma_1}(u_\mu),$$

$$\sigma_{\Gamma_2}(v_\sigma v_k) = \sigma_{\Gamma_2}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \delta^{\nu}_{\sigma k}v_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{n} \delta^{\nu}_{\sigma k}\sigma_{\Gamma_2}(v_\nu).$$

Teda aspoň pre jednu dvojicu indexov i, k $(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq k \leqq n)$ platí

$$\left(\sum_{\mu=1}^{m} \gamma^{\mu}_{\varrho i}\sigma_{\Gamma_1}(u_\mu)\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n} \delta^{\nu}_{\sigma k}\sigma_{\Gamma_2}(v_\nu)\right) \neq 0,$$

čo je spor. Tým je veta dokázaná.

Veta 3. *Nech sú splnené predpoklady vety 2. Potom platí*

$$\mathfrak{A}/\mathfrak{R} \cong \mathfrak{A}_1/\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{A}_2/\mathfrak{R}_2.$$

Dôkaz. Nech algebra $\mathfrak{A}_1$ je rádu m, jej radikál $\mathfrak{R}_1$ rádu r, algebra $\mathfrak{A}_2$ nech je rádu n a jej radikál $\mathfrak{R}_2$ rádu s. Potom $m - r$ je rád faktorovej algebry $\mathfrak{A}_1/\mathfrak{R}_1$ a $n - s$ rád faktorovej algebry $\mathfrak{A}_2/\mathfrak{R}_2$ (pozri napr. [2], str. 28). Teda algebra $\mathfrak{A}_1/\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{A}_2/\mathfrak{R}_2$ je rádu $(m - r)(n - s)$. V dôkaze vety 2 sme ukázali, že radikál $\mathfrak{R}$ algebry $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ je rádu $t = ms + rn - rs$. Teda rád algebry $\mathfrak{A}/\mathfrak{R}$ bude $mn - t = mn - ms - rn + rs = (m - r)(n - s)$, teda ten istý ako rád algebry $\mathfrak{A}_1/\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{A}_2/\mathfrak{R}_2$. Ak bázy algebier $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}$ a ich radikálov $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}$ zvolíme (označíme) ako v dôkaze vety 2, platí (pozri napr. aj [2], str. 27—28):

$$\mathfrak{A}_1/\mathfrak{R}_1 = K[u_{r+1}] + \ldots + K[u_m],\ \mathfrak{A}_2/\mathfrak{R}_2 = K[v_{s+1}] + \ldots + K[v_n],$$

$$\mathfrak{A}/\mathfrak{R} = K[w_{r+1,s+1}] + \ldots + K[w_{mn}].$$

Prvky bázy algebry $\mathfrak{A}_1/\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{A}_2/\mathfrak{R}_2$ označme $\overline{w}_{r+1,s+1}, \ldots, \overline{w}_{mn}$, t. j.

$$\mathfrak{A}_1/\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{A}_2/\mathfrak{R}_2 = K\overline{w}_{r+1,s+1} + \ldots + K\overline{w}_{mn}.$$

Ak multiplikačné tabuľky algebier $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}$ sú (1), (2), (3), tak multiplikačné tabuľky algebier $\mathfrak{A}_1/\mathfrak{R}_1, \mathfrak{A}_2/\mathfrak{R}_2, \mathfrak{A}/\mathfrak{R}$ budú:

$$[u_i][u_j] = \sum_{\mu=r+1}^{m} \gamma_{ij}^{\mu}[u_\mu] \qquad (i, j = r + 1, r + 2, \ldots, m),$$

$$[v_k][v_l] = \sum_{\nu=s+1}^{n} \delta_{kl}^{\nu}[v_\nu] \qquad (k, l = s + 1, s + 2, \ldots, n),$$

$$[w_{ik}][w_{jl}] = \sum_{\mu=r+1}^{m} \sum_{\nu=s+1}^{n} \gamma_{ij}^{\mu}\delta_{kl}^{\nu}[w_{\mu\nu}] \qquad \begin{pmatrix} i, j = r + 1, r + 2, \ldots, m \\ k, l = s + 1, s + 2, \ldots, n \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Z toho a z definície 1 vyplýva, že multiplikačná tabuľka algebry $\mathfrak{A}_1/\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{A}_2/\mathfrak{R}_2$ je:

$$\overline{w}_{ik}\overline{w}_{jl} = \sum_{\mu=r+1}^{m} \sum_{\nu=s+1}^{n} \gamma_{ij}^{\mu}\delta_{kl}^{\nu}\overline{w}_{\mu\nu} \qquad \begin{pmatrix} i, j = r + 1, r + 2, \ldots, m \\ k, l = s + 1, s + 2, \ldots, n \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Z (6), (7) a z toho, že algebry $\mathfrak{A}/\mathfrak{R}$ a $\mathfrak{A}_1/\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{A}_2/\mathfrak{R}_2$ sú rovnakého rádu vyplýva, že vzájomne jednoznačné zobrazenie

$$[w_{ik}] \longleftrightarrow \overline{w}_{ik}$$

algebry $\mathfrak{A}/\mathfrak{R}$ na algebru $\mathfrak{A}_1/\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{A}_2/\mathfrak{R}_2$ je izomorfizmus. Teda $\mathfrak{A}/\mathfrak{R} \cong \mathfrak{A}_1/\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{A}_2/\mathfrak{R}_2$, č. b. t. d.

Veta 4. *Nech sú splnené predpoklady vety 1. Potom algebra $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ je polojednoduchá vtedy a len vtedy, ak obidve algebry $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ sú polojednoduché.*

Dôkaz. Nech $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ sú polojednoduché algebry, t. j. $\mathfrak{R}_1 = (0)$, $\mathfrak{R}_2 = (0)$ (znak (0) značí nulový ideál). Potom $\mathfrak{A}_1/\mathfrak{R}_1 \cong \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2/\mathfrak{R}_2 \cong \mathfrak{A}_2$, teda podľa vety 3 je $\mathfrak{A}/\mathfrak{R} \cong \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}$, z čoho vyplýva $\mathfrak{R} = (0)$, t. j. $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ je polojednoduchá algebra.

Naopak, nech algebra $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ je polojednoduchá, t. j. jej radikál $\mathfrak{R} = (0)$, teda $\mathfrak{A}/\mathfrak{R} \cong \mathfrak{A}$. Potom podľa vety 3 je $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}_1/\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{A}_2/\mathfrak{R}_2$, z čoho vyplýva $\mathfrak{R}_1 = (0)$, $\mathfrak{R}_2 = (0)$, teda algebry $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ sú polojednoduché.

LITERATÚRA

1. Чеботарев Н. Г., Введение в теорию алгебр, Москва 1949. 2. Albert A., Structure of algebras, New York 1939. 3. Kochendörfer R., Einführung in die Algebra Berlín 1955.

Došlo 21. 1. 1957.

РАДИКАЛ И ПОЛУПРОСТОТА ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ АЛГЕБР

ЯН ИВАН

Выводы

В настоящей статье исследуются некоторые свойства прямого произведения алгебр над полем характеристики нуль. При помощи теорем 5 и 7 из [1] и свойств следов элементов алгебры $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ в регулярном представлении доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть поле K имеет характеристику нуль, пусть $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}$ алгебры конечного порядка над K и пусть $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$. Потом алгебра $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ нильпотентна тогда и только тогда, когда по меньшей мере одна из алгебр $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ нильпотентна.*

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения теоремы 1 и пусть $\mathfrak{R}_1$ радикал алгебры $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{R}_2$ радикал алгебры $\mathfrak{A}_2$. Потом сумма $\mathfrak{R} = (\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{R}_2)$ является радикалом алгебры $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$.*

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения теоремы 2. Потом между фактор-алгебрами $\mathfrak{A}/\mathfrak{R}, \mathfrak{A}_1/\mathfrak{R}_1, \mathfrak{A}_2/\mathfrak{R}_2$ имеет место следующее соотношение: $\mathfrak{A}/\mathfrak{R} \cong \mathfrak{A}_1/\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{A}_2/\mathfrak{R}_2$.*

Теорема 4. *Пусть выполнены предположения теоремы 1. Потом алгебра $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ полупроста тогда и только тогда, когда обе алгебры $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ полупростые.*

THE RADICAL AND SEMISIMPLICITY OF DIRECT PRODUCT OF ALGEBRAS

JÁN IVAN

Summary

In this paper we discuss some properties of direct product of linear associative algebras over field of characteristic zero. With the help of theorem 5 and 7 in [1] and using properties of traces of elements of algebra $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ in regular representation the following theorems are proved:

Theorem 1. *Let K be a field of characteristic zero, let $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}$ are algebras of finite ordre over K and $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$. Then algebra $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ is nilpotent if and only if at least one of algebras $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ is nilpotent.*

Theorem 2. *Let the suppositions of theorem 1 hold and let $\mathfrak{R}_1$ be the radical of algebra $\mathfrak{A}_1$ and $\mathfrak{R}_2$ the radical of algebra $\mathfrak{A}_2$. Then the sum $\mathfrak{R} = (\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{R}_2)$ is the radical of algebra $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$.*

Theorem 3. *If the suppositions of theorem 2 hold, then for factoralgebras $\mathfrak{A}/\mathfrak{R}, \mathfrak{A}_1/\mathfrak{R}_1, \mathfrak{A}_2/\mathfrak{R}_2$ holds: $\mathfrak{A}/\mathfrak{R} \cong \mathfrak{A}_1/\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{A}_2/\mathfrak{R}_2$.*

Theorem 4. *Let the suppositions of theorem 1 hold. Then algebra $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ is semisimple if and only if each of algebras $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ is semisimple.*