MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK VII ČÍSLO 3

K ABSOLÚTNE KONVERGENTNÝM RADOM

TIBOR ŠALÁT
Katedra matematiky Univerzity Komenského v Bratislave

V práci [1] dokázal J. Jakubík nasledujúcu vetu, ktorá zovšeobecňuje istý výsledok P. K. Menona a autora tohto článku:

(A) Nech $\{C_i\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ je systém množín komplexných čísel, pre ktoré platí: 1. Množina $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ je ohraničená. 2. Každá z množín C_i je kompaktná. 3. Medzi množinami C_i je nekonečne mnoho takých, ktoré obsahujú viac ako jedno číslo.

Nech $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ je postupnosť prvkov úplného normovaného lineárneho vektorového priestoru X, nech rad $\sum_{i=1}^{\infty} \| a_i \|$ (1) konverguje. Nech W je množina všetkých tých prvkov $w \in X$, ktoré sa dajú vyjadriť v tvare $w = \sum_{i=1}^{\infty} b_i$, kde $b_i = c_i a_i$, $c_i \in C_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$.

Tvrdenie: Množina W je perfektná množina.

V tejto poznámke ukážeme, že predpoklad 1 spolu s predpokladom $\sum_{i=1}^{\infty} \| a_i \| < +\infty$ možno nahradiť všeobecnejším predpokladom a nie je pri splnení tohto predpokladu potrebné pre platnosť tvrdenia vety predpokladať konvergenciu radu (1).

1. Malou modifikáciou Jakubíkovho dôkazu vety (A) dokážeme nasledujúcu vetu, ktorá zovšeobecňuje vetu (A).

Veta. *Nech $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ je postupnosť prvkov lineárneho Banachovho priestoru X Nech $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ je postupnosť neprázdnych množín komplexných čísel, splňujúcich tieto predpoklady*

1. *Všetky množiny C_i sú kompaktné.* 2. *Označme $K_i = \sup_{z \in C_i} | z |$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, potom $\sum_{i=1}^{\infty} K_i \| a_i \| < +\infty$ (2).* 3. *Pre nekonečne mnoho i platí: C_i obsahuje viac než jeden prvok.*

Nech W je množina všetkých tých prvkov $w \in X$, ktoré sa dajú vyjadriť v tvare:

(3) $w = \sum_{i=1}^{\infty} c_i a_i$, $c_i \in C_i$, $(i = 1, 2, 3, \ldots)$.

Tvrdenie: W je perfektná množina.

Dôkaz. 1. Podľa porovnávacieho kritéria z konvergencie radu (2) vyplýva konvergencia radu (3).

2. Ukážeme, že množina W je uzavretá. Nech $w^{(n)} \in W$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $w^{(n)} \to w$. Treba ukázať, že $w \in W$. Nech

$$w^{(n)} = c_1^{(n)} a_1 + c_2^{(n)} a_2 + \ldots + c_k^{(n)} a_k + \ldots \tag{4}$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Keďže $w^{(n)} \to w$, existuje n_0 tak, že pre všetky $n \geqq n_0$ je

$$\| w^{(n)} - w \| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{5}$$

Vyberme z postupnosti $\{c_1^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ čiastočnú konvergentnú postupnosť, označme ju $\{c_1^{(n(1))}\}$, nech $c_1^{(n(1))} \to c_1^{(0)}$. Z postupnosti $\{c_2^{(n(1))}\}$ vyberme čiastočnú konvergentnú postupnosť, označme ju $\{c_2^{(n(2))}\}$, nech $c_2^{(n(2))} \to c_2^{(0)}$ atď. Položme

$$w^{(0)} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^{(0)} a_i. \tag{6}$$

Označme znakom $s_k^{(n)}$, resp. $s_k^{(0)}$ k-ty čiastočný súčet radu (4), resp. (6). Vzhľadom na konvergenciu radu (2) existuje k_0 také, že pre všetky $k \geqq k_0$ je $\sum_{i=k+1}^{\infty} K_i \| a_i \| < \frac{\varepsilon}{4}$. A teda pre všetky $k \geqq k_0$ a všetky $n = 1, 2, 3, \ldots$ platí:

$$\| w^{(n)} - s_k^{(n)} \| \leqq \sum_{i=k+1}^{\infty} K_i \| a_i \| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{7}$$

a taktiež

$$\| w^{(0)} - s_k^{(0)} \| \leqq \sum_{i=k+1}^{\infty} K_i \| a_i \| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{8}$$

Ďalej pri pevnom k je

$$s_k^{(n(k))} = \sum_{i=1}^{k} c_i^{(n(k))} \cdot a_i \to \sum_{i=1}^{k} c_i^{(0)} a_i = s_k^{(0)},$$

ak $n(k) \to \infty$. Z postupnosti $\{n(k)\}$ zvolíme m tak, aby $m \geqq n_0$ a aby

$$\| s_k^{(m)} - s_k^{(0)} \| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{9}$$

Z nerovnosti:

$$\| w - w^{(0)} \| \leqq \| w - w^{(m)} \| + \| w^{(m)} - s_k^{(m)} \| + \| s_k^{(m)} - s_k^{(0)} \| + \| s_k^{(0)} - w^{(0)} \|$$

a z nerovností (5), (7), (9), (8) pri pevnom $k \geqq k_0$ a $m \geqq n_0$ dostávame $\| w - w^{(0)} \| < \varepsilon$. To platí pre každé $\varepsilon > 0$, teda $w = w^{(0)}$, t. j. v dôsledku toho $w \in W$.

3. Ukážeme, že množina W nemá izolované body. Nech

$$w \in W,\ w = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots + c_n a_n + \ldots$$

Vzhľadom na konvergenciu radu (2) je $K_i \| a_i \| \to 0$, a teda k $\varepsilon > 0$ existuje prirodzené číslo l_0 také, že pre všetky $l \geqq l_0$ je $K_l \| a_l \| < \frac{\varepsilon}{2}$. Zvoľme $l \geqq l_0$ tak, aby množina C_l obsahovala aspoň dva prvky c_l, c_l', $c_l \neq c_l'$ a utvorme rad:

$$w' = c_1 a_1 + \ldots + c_{l-1} a_{l-1} + c_l' a_l + c_{l+1} a_{l+1} + \ldots$$

Zrejme $w' \neq w$ a

$$\| w - w' \| = \| c_l a_l - c_l' a_l \| \leqq | c_l | \| a_l \| + | c_l' | \| a_l \| \leqq 2K_l \| a_l \| < \varepsilon.$$

Tým je dôkaz vety hotový.

Poznámka. 1. Množina W je zrejme ohraničená a pre každé $w \in W$ platí:

$$\| w \| \leqq \sum_{i=1}^{\infty} K_i \| a_i \|.$$

2. Ľahko zistíme, že z dokázanej vety vyplýva veta (A) z práce [1]. Nech totiž $\sum_{i=1}^{\infty} \| a_i \| < \infty$ a nech množina $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ je ohraničená, nech $K = \sup_{z \in C} | z |$. Potom $K_i \leqq K$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, a teda

$$\sum_{i=1}^{\infty} K_i \| a_i \| \leqq \sum_{i=1}^{\infty} K \| a_i \| = K \sum_{i=1}^{\infty} \| a_i \| < +\infty.$$

Podľa nami dokázanej vety je (pri splnení ostatných predpokladov o množinách C_i) množina W perfektná.

3. Nech rad $\sum_{i=1}^{\infty} \| a_i \|$ konverguje a všetky jeho členy sú kladné. Nech existuje $\alpha \in (0, 1)$ také, že pre všetky $n \geqq n_0$ platí: $K_n \leqq \frac{1}{R_{n-1}^{\alpha}}$, kde

$$R_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} \| a_i \| \ (k = 0, 1, 2, \ldots) \text{ a } K_n = \sup_{z \in C_n} | z |$$

ako predtým. Potom množina $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ môže byť neohraničená $\left(\text{a skutočne je neohraničená, ak pre nekonečne mnoho } n \text{ je } K_n = \frac{1}{R_{n-1}^{\alpha}}\right)$, keďže $\frac{1}{R_{n-1}^{\alpha}} \to +\infty$ pri $n \to \infty$. Keďže však rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\| a_n \|}{R_{n-1}^{\alpha}}$, ako je známe (pozri [2], str. 302, veta Diniho) konverguje, konverguje zrejme aj rad $\sum_{i=1}^{\infty} K_i \| a_i \|$ a podľa dokázanej vety (pri splnení ostatných predpokladov o množinách C_i) je množina W perfektná.

4. Ak $\sum_{i=1}^{\infty} \| a_i \| = +\infty$ a $\liminf_{i \to \infty} \| a_i \| = 0$, ako je známe, existuje postupnosť indexov

$$1 \leqq i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_k < \ldots$$

taká, že $\sum_{k=1}^{\infty} \| a_{i_k} \| < +\infty$. Pre každé $k = 1, 2, 3, \ldots$ nech množina C_{i_k} je kompaktná a pozostáva aspoň z dvoch čísel a nech existuje $\alpha \in (0, 1)$ také, že pre všetky $k \geqq k_0$ je $K_{i_k} = \sup_{z \in C_{i_k}} |z| \leqq \frac{1}{R_{k-1}^{\alpha}}$, kde

$$R_k = \sum_{l=k+1}^{\infty} \| a_{i_l} \| \; (k = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Pre každé $n \neq i_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ položme $C_n = \{0\}$. Zrejme rad $\sum_{i=1}^{\infty} K_i \| a_i \|$ konverguje a množina W je i v tomto prípade perfektná.

Tento príklad ukazuje, že často aj v prípade divergencie radu $\sum_{i=1}^{\infty} \| a_i \|$ môže byť množina W perfektná, i keď množina $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ nie je ohraničená.

LITERATÚRA

1. Jakubík J., Poznámka o absolútne konvergentných radoch, Mat.-fyz. čas. 1955, SAV, č. 3, 133—136. 2. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer-Verlag, 1931.

Došlo 15. 12. 1956.

К АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИМСЯ РЯДАМ

ТИБОР ШАЛАТ

Выводы

В этой работе доказана следующая теорема, обобщающая результат работы [1]. Пусть $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность элементов линейного пространства Банаха X. Пусть $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность не пустых множеств комплексных чисел, удовлетворяющих условиям:

1° Все множества C_i компактны.

2° Обозначим через $K_i = \sup_{z \in C_i} |z|$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. Потом пусть $\sum_{i=1}^{\infty} K_i \|a_i\| < +\infty$.

3° Для бесконечно много i имеет место: C_i содержит более чем один элемент.

Пусть W — множество всех таких элементов $w \in X$, которые возможно писать в виде

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} c_i a_i, \quad c_i \in C_i, \quad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Утверждение: W является совершенным множеством.