MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, VII, 2 — 1957

O ZÁKLADNÍCH VĚTÁCH VÍCEROZMĚRNÉ CENTRÁLNÍ AXONOMETRIE

VÁCLAV HAVEL, Praha

Úvod

Tato práce je věnována podrobnému rozboru obou základních vět centrální axonometrie. V sovětské literatuře je zpracován trojrozměrný případ první základní věty (viz [1], [2]), avšak pouze pro nedegenerované rovinné desarguesovské konfigurace. Dále je v sovětské literatuře zpracován trojrozměrný i vícerozměrný případ druhé základní věty (viz [1], [3], [5]), avšak pouze pro projekci z $(n-3)$rozměrného centra n-rozměrného prostoru a pro nedegenerované rovinné polygonální desarguesovské konfigurace. Ed. Stiefel dokazuje v učebnici [6] druhou základní větu v trojrozměrném případě a též pro degenerované rovinné desarguesovské konfigurace, ale zmenšuje obecnost tím, že vyšetřuje pouze orthogonální souřadnicovou prostorovou konfiguraci místo obecné konfigurace polyedrické. Ed. Stiefel vyšetřil též analytickou metodou vícerozměrnou analogii věty Pohlkovy a ukázal, že pro dimensi $n > 3$ ztrácí takto zobecněná Pohlkova věta charakter řešitelnosti.

V předložené práci autor navazuje na dosud známé výsledky a zobecňuje obě základní věty pro promítání z bodového centra do nadroviny n-rozměrného prostoru $(n \geqq 3)$, při čemž připouští, pokud je to možné, též degenerované desarguesovské konfigurace.

Dále se autor zabývá zobecněním druhé základní věty pro promítání z $(n$-m-$1)$rozměrného centra do m-rozměrné průmětny, n-rozměrného prostoru $(n > m \geqq 2)$, opět s ohledem na degenerované případy desarguesovských konfigurací. Zobecnění první základní věty pro promítání z $(n$-m-$1)$rozměrného centra do m-rozměrné průmětny naráží na obtíž a provedeno není.

Práce je rozdělena na tři části. V *první části* se studují obě základní věty v trojrozměrném prostoru, v *druhé části* je vyšetřeno zobecnění obou základních vět pro promítání z bodu do nadroviny n-rozměrného prostoru $(n \geqq 3)$ a konečně *třetí část* je věnována zobecnění druhé základní věty pro promítání z $(n$-m-$1)$rozměrného centra do n-rozměrné průmětny n-rozměrného prostoru $(n > m \geqq 2)$. Autor se snažil dát celé práci jednotný synthetický charakter.

1. Základní věty trojrozměrné centrální axonometrie

Předmětem vyšetřování bude trojrozměrný (reálný, resp. komplexní) rozšířený eukleidovský prostor. Lineární obal útvarů $U_1, U_2, \ldots, U_r$ označíme symbolicky $\langle U_1, U_2, \ldots, U_r \rangle$. Simplexem budeme rozumět trojici bodů neležících na téže přímce. Modulem afinity $\mathbf{A}$ mezi vlastními rovinami ϱ_1, ϱ_2 budeme rozumět obsah trojúhelníka $\Delta_2 \subset \varrho_2$, který odpovídá v afinitě $\mathbf{A}$ trojúhelníku $\Delta_1 \subset \varrho_1$ o jednotkovém obsahu. Laguerrovým bodem kružnice k, která leží v rovině ϱ, má střed S a poloměr r, budeme rozumět bod vzdálený jak od roviny ϱ, tak od bodu S o délku r. Nejprve uvedeme několik definic:

Definice 1. Posloupnost navzájem různých bodů $O', A_1', A_2', A_3', B_1', B_2', B_3'$ nazveme polyedrickou konfigurací, jestliže každá trojice $O', A_i', B_i' (i = 1, 2, 3)$ obsahuje kolineární body a jestliže přímky $a_i = \langle O', A_i' \rangle (i = 1, 2, 3)$ neleží v téže rovině. Polyedrickou konfiguraci prohlásíme za souřadnicovou, jsou-li body $B_i' (i = 1, 2, 3)$ nevlastní a jsou-li úsečky $O'A_i' (i = 1, 2, 3)$ navzájem kolmé a stejně dlouhé.

Definice 2. Posloupnost bodů $O, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$, ležících v téže vlastní rovině ϱ, nazveme d-konfigurací, jestliže každá trojice O, A_i, B_i $(i = 1, 2, 3)$ obsahuje různé kolineární body a jestliže $\langle O, A_1, A_2, A_3 \rangle = \varrho$. Jsou-li (nejsou-li) v d-konfiguraci body B_1, B_2, B_3 kolineární, pak ji prohlásíme za d_2-konfiguraci (d_1-konfiguraci). Nejsou-li v d_1-konfiguraci ani body A_1, A_2, A_3 kolineární, pak ji prohlásíme za d_0-konfiguraci.

Dodatek k definici 2. V d_0-konfiguraci leží body $\langle A_i, A_j \rangle \cap \langle B_i, B_j \rangle$ $(i \neq j$ nabývají hodnot $1, 2, 3)$ na téže přímce p (podle věty Desarguesovy, užité na simplexy $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, perspektivní podle středu O). Jsou-li v d_2-konfiguraci body A_1, A_2, A_3 kolineární, pak položme $p = \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$. Označme dále P harmonický pól přímky p vzhledem k simplexu $B_1B_2B_3$. Pak je jednoznačně určena imaginární kuželosečka k, pro niž bod P s přímkou p je pólem s polárou a simplex $B_1B_2B_3$ simplexem polárním. Je-li kuželosečka k imaginární elipsou různou od imaginární kružnice, pak označme a, b délky poloos elipsy $\bar{k}$, která reálně zastupuje elipsu k.

Poučka 1. a) *Každá d-konfigurace, která je průmětem[1] některé souřadnicové konfigurace z vlastního centra promítání, je d_1-konfigurací.*

b) *Je-li d_2-konfigurace průmětem některé souřadnicové konfigurace, pak centrem promítání je nevlastní bod.*

c) *Každá d-konfigurace, která je rovnoběžným průmětem některé souřadnicové konfigurace, je d_2-konfigurací.*

Důkaz. Průměty nevlastních bodů souřadnicové konfigurace z vlastního bodu S do vlastní roviny jsou body neležící na téže přímce. Z toho plyne

[1] Zde a v dalším jde o průmět v tomto smyslu: i-tý bod d-konfigurace je průmětem i-tého bodu polyedrické konfigurace $(i = 1, 2, \ldots, 7)$, resp. v pozdějších úvahách pro $i = 1, 2, \ldots, 2n + 1$.

tvrzení a). Z tvrzení a) plyne okamžitě tvrzení b). Rovnoběžné průměty nevlastních bodů jsou opět body nevlastní, z čehož plyne tvrzení c).

Poučka 2. *Je-li d-konfigurace* $\mathfrak{d} = (O, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3)$ *průmětem polyedrické konfigurace* $\gamma = (O', A_1', A_2', A_3', B_1', B_2', B_3')$, *pak střed S promítání leží v rovině* $\langle B_1', B_2', B_3' \rangle$ *právě tehdy, je-li* $\mathfrak{d}$ d_2*-konfigurací.*

Důkaz je zřejmý.

Poučka 3. *Je-li d-konfigurace* $\mathfrak{d}$ *průmětem polyedrické konfigurace* γ *z vlastního středu promítání S, pak ke každé konfiguraci* γ^*, *podobné s* γ, *existuje konfigurace shodná s* γ^*, *která se z centra S promítá do konfigurace* $\mathfrak{d}$.

Důkaz. Na γ provedeme homothetii $\boldsymbol{h}$ o středu S a poměru rovném poměru podobnosti mezi γ^*, γ. Pak kofigurace $\boldsymbol{h}\gamma$ je shodná s γ^* a promítá se ze středu S do konfigurace $\mathfrak{d}$.

Věta 1. *Daná* d_1*-konfigurace* $\mathfrak{d}$ *je průmětem některé souřadnicové konfigurace, když a jen když kuželosečka k (určená vzhledem k* $\mathfrak{d}$ *podle dodatku k definici 2) je imaginární kružnicí.*

Důkaz. a) Nechť souřadnicová konfigurace $\gamma = (O', A_1', A_2', A_3', B_1', B_2', B_3')$ promítá se z bodu S do roviny π do d_1-konfigurace $\mathfrak{d} = (O, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3)$. Zřejmě platí $\langle S, B_i \rangle \perp \langle S, B_j, B_k \rangle$ (i, j, k probíhá všecka pořadí čísel 1, 2, 3). Dokážeme, že platí též $\langle S, P \rangle \perp \langle S, p \rangle$ (význam symbolů P, p je uveden v dodatku k definici 2). Nechť i, j, k je některé pořadí čísel 1, 2, 3. Přímkou $\langle O', A_i' \rangle$ proložíme rovinu $\alpha_i \perp \langle A_j', A_k' \rangle$; bodem O' veďme přímku $a_{jk} // \langle A_j', A_k' \rangle$ a přímku a_{jk}^* půlící úsečku $A_j'A_k'$. Přímky $a_{jk}, a_{jk}^*, a_j = \langle O', A_j' \rangle$, $a_k = \langle O', A_k' \rangle$ tvoří harmonickou čtveřinu, takže nevlastní body těchto přímek tvoří též harmonickou čtveřinu, jež se promítá do čtveřiny $\langle B_j, B_k \rangle \cap p$, $\langle B_j, B_k \rangle \cap \langle P, B_i \rangle$, B_j, B_k. Je tedy $\langle P, B_i \rangle$ průmět nevlastní přímky roviny α_i. Z toho dále plyne, že P je průmět nevlastního bodu přímky $m = \alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3$. Avšak p je průmětem nevlastní přímky roviny $\langle A_1', A_2', A_3' \rangle$, takže z relace $m \perp \langle A_1', A_2', A_3' \rangle$ plyne též $\langle S, P \rangle \perp \langle S, p \rangle$.

Kuželosečka k je základní kuželosečkou rovinné polarity $\mathfrak{P}$, která se z bodu S promítá prostorovou polaritou $\mathfrak{P}'$. Vzhledem k relacím $\langle S, B_i \rangle \perp \langle S, B_j, B_k \rangle$ (i, j, k probíhá všechna pořadí čísel 1, 2, 3), $\langle S, P \rangle \perp \langle S, p \rangle$, je polarita $\mathfrak{P}'$ orthogonální, a tedy kuželosečka k je imaginární kružnicí.

b) Nechť daná d_1-konfigurace $\mathfrak{d} = (O, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3)$ v rovině π má za kuželosečku k (určenou podle dodatku k definici 2) imaginární kružnici. Zvolme jeden z Laguerrových bodů kružnice k, označme jej S a prohlašme jej za střed promítání. Rovinná polarita $\mathfrak{P}$ o základní kuželosečce k se promítá z bodu S pravoúhlou prostorovou polaritou $\mathfrak{P}'$. Zřejmě $\mathfrak{P}P = p$, a tedy $\mathfrak{P}'\langle S, P \rangle = \langle S, p \rangle \perp \langle S, P \rangle$. Na přímce $\langle S, O \rangle$ zvolme libovolný vlastní bod $O' \neq S$, veďme jím přímky $a_i // \langle S, B_i \rangle$ a sestrojme body $A_i' = \langle S, A_i \rangle \cap a_i$; zřejmě přímky a_i jsou navzájem kolmé ($i = 1, 2, 3$). Body A_i' jsou zřejmě vlastní. Dále platí toto tvrzení:

(+) Přímka p je průmětem nevlastní přímky roviny $\langle A_1', A_2', A_3' \rangle$ a bod P je průmětem nevlastního bodu přímky m jdoucí bodem O' kolmo k $\langle A_1', A_2', A_3' \rangle$.

Dokážeme ještě další tvrzení:

(++) Přímka $\langle P, B_i \rangle$ je průmětem nevlastní přímky roviny α_i, která prochází přímkou a_i a středem úsečky $A_j'A_k'$ (i, j, k je kterékoliv pořadí čísel 1, 2, 3).

Body $\langle B_j, B_k \rangle \cap p$, $\langle B_j, B_k \rangle \cap \langle P, B_i \rangle$, B_j, B_k tvoří harmonickou čtveřinu; jsou to průměty promítacích přímek $\bar{a}_{jk}$, $\bar{a}_{jk}^*$, $\bar{a}_j$, $\bar{a}_k$. Bodem O' proložíme přímky $a_{jk} // \bar{a}_{jk}$, $a_{jk}^* // \bar{a}_{jk}^*$. Potom je $a_{jk} // \langle A_j', A_k' \rangle$, přímka a_{jk} jde středem úsečky $A_j'A_k'$ a $a_j = \langle O', A_j' \rangle // \bar{a}_j$, $a_k = \langle O', A_k' \rangle // \bar{a}_k$. Poněvadž B_i je průmět nevlastního bodu přímky a_i, je tím tvrzení (++) dokázáno.

Z tvrzení (+), (++) plyne $m = \alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3$, takže simplex $A_1'A_2'A_3'$ je pravidelný a úsečky $O'A_i'$ jsou stejně dlouhé, což bylo dokázat. Věta 1 je tím dokázána.

Poučka 4. *Nechť* $\bar{k}$ *je reálná elipsa v rovině* π *a nechť a, b (a>b) jsou délky obou jejích poloos. Pak existuje v rovině* π *perspektivní afinita* $\mathbf{A}_1$, *jejímž modulem je libovolné číslo z intervalu* $\left\langle \frac{b}{a}, \frac{a}{b} \right\rangle$, *perspektivní afinita* $\mathbf{A}_2$ *o libovolné ose (resp. libovolném směru), kolmá afinita* $\mathbf{A}_3$ *a elace* $\mathbf{A}_4$ *tak, že* $\mathbf{A}_i\bar{k}$ *je kružnice* $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Důkaz je elementární a nebudeme jej provádět.

Věta 2. *Ke každé* d_1*-konfiguraci* $\mathfrak{d}$, *která leží v rovině* π *a není průmětem žádné souřadnicové konfigurace, existuje v rovině* π *perspektivní afinita* $\mathbf{A}_1$, *jejímž modulem je libovolné číslo z intervalu* $\left\langle \frac{b}{a}, \frac{a}{b} \right\rangle$,[2] *dále perspektivní afinita* $\mathbf{A}_2$ *o libovolné ose (resp. libovolném směru) a konečně kolmá afinita* $\mathbf{A}_3$ *a elace* $\mathbf{A}_4$ *tak, že* $\mathbf{A}_i\mathfrak{d}$ *je průmět některé souřadnicové konfigurace* $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Důkaz plyne z věty 1 a z poučky 3.

Věta 3. *Nechť je dána d-konfigurace* $\mathfrak{d}$, *ležící v rovině* ϱ *a polyedrická konfigurace* γ. *Pak lze sestrojit právě jeden bod S a projektivní vztah* $\mathbf{L}_\pi$ *mezi rovinou* ϱ *a libovolnou vlastní rovinou* $\pi \not\ni S$ *tak, že* $\mathbf{L}_\pi\mathfrak{d}$ *je průmětem konfigurace* γ *z centra S.*

Je-li bod S vlastní, pak mezi $\mathbf{L}_\pi$ *patří též afinity, jejichž moduly nabývají všech kladných hodnot.*

Je-li bod S nevlastní, pak jsou možné dva případy: buďto žádné $\mathbf{L}_\pi$ *není afinitou, anebo všecky* $\mathbf{L}_\pi$ *jsou afinitami a moduly těchto afinit vyčerpávají interval* $\langle m_1, \infty \rangle$ *přitom* m_1 *je modul té afinity* $\mathbf{L}_\pi$, *v níž konfiguraci* $\mathfrak{d}$ *odpovídá kolmý průmět konfigurace* γ *z centra S.*

Důkaz. Označme $(O, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3)$ danou d-konfiguraci $\mathfrak{d}$ v rovině ϱ a $(O', A_1', A_2', A_3', B_1', B_2', B_3')$ danou polyedrickou konfiguraci γ. Bez omezení obecnosti lze předpokládat, že $\langle O, A_1, A_2 \rangle = \varrho$. Existuje právě jedna

[2] Symboly k, $\bar{k}$, a, b mají vzhledem k $\mathfrak{d}$ význam popsaný v dodatku k definici 2.

projektivita $\mathbf{G}$ mezi rovinami ϱ, $\varrho' = \langle O', A'_1, A'_2 \rangle$, pro niž platí $\mathbf{G}O = O'$, $\mathbf{G}A_i = A'_i (i = 1, 2)$, $\mathbf{G}\langle B_1, B_2 \rangle = \langle B'_1, B'_2 \rangle$.[3] Konfigurace γ promítá se z centra $S = \langle \mathbf{G}A_3, A'_3 \rangle \cap \langle \mathbf{G}B_3, B'_3 \rangle$ do libovolné vlastní roviny $\pi \not\ni S$ do konfigurace $\mathfrak{d}_\pi$. Mezi nadrovinami ϱ', π je promítáním z centra S zprostředkována projektivita $\boldsymbol{H}_\pi$ tak, že $\boldsymbol{H}_\pi \mathbf{G}\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_\pi$.

Střed S je podle předchozí konstrukce určen jednoznačně. Nechť za prvé S je vlastní. Nevlastní přímce roviny ϱ odpovídá v $\mathbf{G}$ přímka $q \subset \varrho'$. Probíhá-li nepromítací rovina π všecky polohy rovnoběžné s rovinou $\langle S, q \rangle$, pak průměty konfigurace γ do rovin π jsou spolu homothetické podle středu S, při čemž poměr homothetie nabývá všech nenulových hodnot. Pak ale též moduly afinit $\boldsymbol{H}_\pi \mathbf{G}$ nabývají všech kladných hodnot.

Nechť za druhé S je nevlastní. Pak všecky $\boldsymbol{H}_\pi$ jsou afinitami. Není-li $\mathbf{G}$ afinitou, pak ani žádné $\boldsymbol{H}_\pi \mathbf{G}$ není afinitou. Nechť tedy $\mathbf{G}$ je afinitou; nechť dále π_1 je rovina kolmá k promítacím přímkám. Označme m_1 modul afinity $\boldsymbol{H}_{\pi_1} \mathbf{G}$. Promítáním z S je mezi π_1 a libovolnou vlastní rovinou π zprostředkována afinita; nabývá-li rovina π všech možných poloh, pak modul zmíněné afinity probíhá interval $\langle 1, \infty)$. Tedy moduly afinit $\boldsymbol{H}_\pi \mathbf{G}$ probíhají interval $\langle m_1, \infty)$. Věta je dokázána.[4]

Jiný důkaz — avšak pouze pro d_0-konfigurace a ne pro všecka tvrzení věty 3 — podává I. S. Džaparidze v práci [3]; přitom část důkazu přejímá od E. Kruppy. Džaparidzův důkaz zobecníme v druhé části.

Větu 1 lze označit jako první základní větu trojrozměrné centrální axonometrie; všimněme si, že v ní vystupuje souřadnicová polyedrická konfigurace. Naskýtá se zajisté otázka, nebylo-li by možné větu 1 zobecnit i pro nesouřadnicové polyedrické konfigurace. Takové zobecnění naráží však na obtíže (viz o tom ještě závěr třetí části).

Větu 3 lze označit jako druhou základní větu trojrozměrné centrální axonometrie. Je-li konfigurace γ z věty 3 souřadnicová a je-li konfigurace $\mathfrak{d}$ d_2-konfigurací, pak střed S je nevlastní a mezi afinitami $\boldsymbol{H}_\pi \mathbf{G}$ existují zobrazení podobná (což lze dokázat na př. užitím úlohy Guglerovy);[5] to vede ke klasické větě Pohlkově.

2. Základní věty vícerozměrné centrální axonometrie při promítání z bodu do nadroviny

Předmětem vyšetřování bude n-rozměrný (reálný, resp. komplexní) rozšířený eukleidovský prostor ($n \geqq 3$). Lineární obal útvarů $U_1, U_2, \ldots, U_r$ označíme symbolicky $\langle U_1, U_2, \ldots, U_r \rangle$. Podprostory dimensí $n - 1$, resp.

[3] Jinak by bylo možno projektivitu $\mathbf{G}$ určit podmínkami $\mathbf{G}A_i = A'_i$, $\mathbf{G}B_i = B'_i (i = 1, 2)$.

[4] Ve znění věty položíme ovšem $L_\pi = \boldsymbol{H}_\pi \mathbf{G}$.

[5] Viz učebnici Kadeřávek—Klíma—Kounovský, *Deskriptivní geometrie I*, Praha 1954, 164—165.

$n - 2$ budeme nazývat nadrovinami, resp. nadpřímkami. Simplexem budeme rozumět n-tici bodů neležících v téže nadpřímce. Modulem afinity $\mathbf{A}$ mezi dvěma vlastními nadrovinami ϱ_1, ϱ_2 budeme rozumět objem polyedru $\Delta_2 \subset \varrho_2$, který odpovídá v afinitě $\mathbf{A}$ (n-1)rozměrnému polyedru $\Delta_1 \subset \varrho_1$ o jednotkovém objemu. Laguerrovým bodem (n-1)rozměrné sféry K, která leží v nadrovině ϱ, má střed S a poloměr r, budeme rozumět bod vzdálený od nadroviny ϱ i od bodu S o délku r. Nejprve uvedeme několik definicí.

Definice 3. Posloupnost navzájem různých bodů $O', A'_1, A'_2, \ldots, A'_n, B'_1, B'_2, \ldots, B'_n$ nazveme polyedrickou konfigurací, jestliže každá trojice O', A'_i, B'_i obsahuje kolineární body a jestliže přímky $a_i = \langle O', A'_i \rangle$ neleží v téže nadrovině ($i = 1, 2, \ldots, n$). Polyedrickou konfiguraci prohlásíme za souřadnicovou, jsou-li body B'_i nevlastní a jsou-li úsečky $O'A'_i$ navzájem kolmé a stejně dlouhé ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Definice 4. Posloupnost bodů $O, A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$, které leží v téže vlastní nadrovině ϱ, nazveme d-konfigurací, jestliže každá trojice O, A_i, B_i obsahuje různé kolineární body a jestliže $\langle O, A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle = \varrho$. Splňuje-li d-kongfigurace podmínku $\langle B_1, B_2, \ldots, B_n \rangle = \varrho$, pak ji nazveme d_1-konfigurací. Jestliže v d_1-konfiguraci žádné dvě z přímek $\langle O, A_i \rangle$ nesplývají a jestliže platí $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle = \varrho$, pak ji nazveme d_0-konfigurací.

Dodatek k definici 4. V d_0-konfiguraci leží body $\langle A_i, A_j \rangle \cap \langle B_i, B_j \rangle$ ($i \neq j$ nabývají hodnot $1, 2, \ldots, n$) v téže nadpřímce p. To plyne z věty Desarguesovy, užité na simplexy $A_1 A_2 \ldots A_n$; $B_1 B_2 \ldots B_n$, perspektivní podle středu O. Jestliže v d_1-konfiguraci je $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle \neq \varrho$, pak $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle$ je nadpřímka; označme ji p. Nechť P je harmonický pól nadpřímky p vzhledem k simplexu $B_1 B_2 \ldots B_n$ a nechť k je (jednoznačně určená) (n-1)rozměrná imaginární kvadrika, pro niž P, p jsou pól a polára[6] a pro niž $B_1 B_2 \ldots B_n$ je polární simplex.

V dalším půjde vždy o průmět z bodu do vlastní nadroviny. Budeme říkat, že d-konfigurace $\mathfrak{d}$ je průmětem polyedrické konfigurace γ, je-li i-tý bod konfigurace $\mathfrak{d}$ průmětem i-tého bodu konfigurace γ($i = 1, 2, \ldots, 2n + 1$).

Poučka 5. *Je-li d-konfigurace $\mathfrak{d} = (O, A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n)$ průmětem polyedrické konfigurace $\gamma = (O', A'_1, A'_2, \ldots, A'_n, B'_1, B'_2, \ldots, B'_n)$, pak $\mathfrak{d}$ je d_1-konfigurací právě tehdy, jestliže pro střed promítání S neplatí vztah $S \subset \langle B'_1, B'_2, \ldots, B'_n \rangle$.*[7]

Důkaz je zřejmý.

Platnost poučky 3 (i s důkazem) lze okamžitě rozšířit i pro n-rozměrný prostor.

Věta 4. *Daná d_1-konfigurace $\mathfrak{d}$ je průmětem některé souřadnicové konfigurace,*

[6] Pojem „poláry" přenášíme zde pro nadrovinu (n-1)rozměrného prostoru.

[7] Užíváme symbolu $\subset$ místo $\in$ s ohledem na pozdější úvahy (v třetí části za definicí 5).

když a jen když kvadrika k určená k $\mathfrak{d}$ podle dodatku k definici 4 je imaginární $(n-1)$rozměrnou sférou.

Důkaz. a) Nechť souřadnicová konfigurace $\gamma = (O', A'_1, A'_2, \ldots, A'_n, B'_1, B'_2, \ldots, B'_n)$ se promítá z bodu S do nadroviny π do d_1-konfigurace $\mathfrak{d} = (O, A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n)$. Je-li $i_1, i_2, \ldots, i_n$ libovolné pořadí čísel $1, 2, \ldots, n$, pak $\langle S, B_{i_1}\rangle \perp \langle S, B_{i_2}, B_{i_3}, \ldots, B_{i_n}\rangle$. Nechť $i_1, i_2, \ldots, i_n$ je některé pořadí čísel $1, 2, \ldots, n$. Proložme přímkou a_{i_1} rovinu $\alpha_{i_1} \perp \langle A'_{i_2}, A'_{i_3}, \ldots, A'_{i_n}\rangle$. Nechť dále $j_2, j_3, \ldots, j_n$ je libovolné pořadí čísel $i_2, i_3, \ldots, i_n$. Bodem O' veďme přímku $a_{j_2j_3} // \langle A'_{j_2}, A'_{j_3}\rangle$ a přímku $a^{\bullet}_{j_2j_3}$ půlící úsečku $A'_{j_2}A'_{j_3}$. Přímky $a_{j_2j_3}, a^{\bullet}_{j_2j_3}, a_{j_2}, a_{j_3}$ tvoří harmonickou čtveřinu; nevlastní body těchto přímek se promítají do čtveřiny $\langle B_{j_2}, B_{j_3}\rangle \cap p, \langle B_{j_2}, B_{j_3}\rangle \cap \langle P, B_{i_1}, B_{j_4}, B_{j_5}, \ldots, B_{j_n}\rangle, B_{j_2}, B_{j_3}$. Tedy $\langle B_{i_1}, P\rangle$ je průmětem nevlastní přímky roviny α_{i_1}. Tedy dále bod P je průmětem nevlastního bodu přímky $m = \alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \ldots \cap \alpha_n$. Avšak nadpřímka p je průmětem nevlastní nadpřímky nadroviny $\langle A'_1, A'_2, \ldots, A'_n\rangle$, takže z relace $m \perp \langle A'_1, A'_2, \ldots, A'_n\rangle$ plyne též $\langle S, P\rangle \perp \langle S, p\rangle$. Kvadrika k je základní kvadrikou polarity $\mathfrak{P}$ v nadrovině π. Polarita $\mathfrak{P}$ se promítá z bodu S prostorovou polaritou $\mathfrak{P}'$. Vzhledem k relacím $\langle S, B_{i_1}\rangle \perp \langle S, B_{i_2}, B_{i_3}, \ldots, B_{i_n}\rangle$ (kde $i_1, i_2, \ldots, i_n$ je libovolné pořadí čísel $1, 2, \ldots, n$), $\langle S, P\rangle \perp \langle S, p\rangle$, je polarita $\mathfrak{P}'$ pravoúhlá, a tedy kvadrika k je imaginární sférou.

b) Nechť pro danou d_1-konfiguraci $\mathfrak{d} = (O, A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n)$ je kvadrika k (určená podle dodatku k definici 4) imaginární sférou. Zvolme jeden z Laguerrových bodů sféry k, označme jej S a prohlašme jej za střed promítání. Polarita $\mathfrak{P}$ v nadrovině π o základní kvadrice k promítá se z bodu S orthogonální polaritou $\mathfrak{P}'$. Je $\mathfrak{P}P = p$, a tedy $\mathfrak{P}'\langle S, P\rangle = \langle S, p\rangle \perp \langle S, P\rangle$. Na přímce $\langle S, O\rangle$ zvolme libovolný vlastní bod $O' \neq S$, veďme jím přímky $a_i // \langle S, B_i\rangle$ a sestrojme body $A'_i = \langle S, A_i\rangle \cap a_i$; zřejmě přímky a_i jsou navzájem kolmé. Body A_i jsou zajisté vlastní. Dále platí:

(+) Nadpřímka p je průmětem nevlastní nadpřímky nadroviny $\langle A'_1, A'_2, \ldots, A'_n\rangle$; bod P je průmětem nevlastního bodu přímky m jdoucí bodem O' kolmo k této nadrovině. Dokážeme ještě jedno tvrzení:

(++) Přímka $\langle P, B_{i_1}\rangle$ je průmětem nevlastní přímky roviny α_{i_1}, jdoucí přímkou a_{i_1} a těžištěm simplexu $A'_{i_2}A'_{i_3} \ldots, A'_{i_n}$ kde $i_1, i_2, \ldots, i_n$ je libovolné pořadí čísel $1, 2, \ldots, n$.

Je-li $j_2, j_3, \ldots, j_n$ libovolné pořadí čísel $i_2, i_3, \ldots, i_n$, pak body $\langle B_{j_2}, B_{j_3}\rangle \cap p, \langle B_{j_2}, B_{j_3}\rangle \cap \langle P, B_{i_1}, B_{j_4}, B_{j_5}, \ldots, B_{j_n}\rangle, \langle B_{j_2}, B_{j_3}\rangle$ tvoří harmonickou čtveřinu a jsou to průměty promítacích přímek $\bar{a}_{j_2j_3}, \bar{a}^{\bullet}_{j_2j_3}, \bar{a}_{j_2}, \bar{a}_{j_3}$. Proložme bodem O' přímky rovnoběžné s těmito promítacími přímkami. Dostaneme tak přímku $a_{j_2j_3} // \langle A'_{j_2}, A'_{j_3}\rangle$, přímku $a^{\bullet}_{j_2j_3}$ jdoucí středem úsečky $A'_{j_2}A'_{j_3}$ a přímky $a_{j_2} = \langle O', A'_{j_2}\rangle$, $a_{j_3} = \langle O', A'_{j_3}\rangle$. Poněvadž B_{i_1} je průmět nevlastního bodu přímky $a_{i_1} = \langle O', A'_{i_1}\rangle$, je tím tvrzení (++) dokázáno.

Z tvrzení (+), (++) plyne vztah $m = \alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \ldots \cap \alpha_n$, takže simplex

$A'_1A'_2 \ldots A'_n$ je pravidelný a úsečky $O'A'_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ jsou stejně dlouhé, což bylo dokázat.

Věta 5. *Ke každé d_1-konfiguraci $\mathfrak{d}$, ležící v nadrovině π, existuje perspektivní afinita $\mathbf{A}$ v π tak, že $\mathbf{A}\mathfrak{d}$ je průmět některé souřadnicové konfigurace.*

Důkaz. Nechť $\bar{k}$ je $(n$-1)rozměrná kvadrika, reálně zastupující imaginární kvadriku k, určenou k $\mathfrak{d}$ podle dodatku k definici 4. Pak existuje průměrová nadpřímka σ kvadriky $\bar{k}$ tak, že $\sigma \cap \bar{k}$ je $(n$-2)rozměrná sféra, která je průměrovou sférou $(n$-1)rozměrné sféry k^*. Označme $\bar{K}$, resp. K^* hraniční bod průměru sdruženého se σ vzhledem ke $\bar{k}$, resp. k^*. Pak v afinitě $\mathbf{A}$ (v π), v níž každý bod nadpřímky σ je samodružný a v níž $\mathbf{A}\bar{K} = K^*$, je též $\mathbf{A}\bar{k} = k^*$. Tedy podle věty 4 je $\mathbf{A}\mathfrak{d}$ průmětem některé souřadnicové konfigurace. Věta je dokázána.

Věta 6. *Nechť je dána d-konfigurace $\mathfrak{d}$, ležící v nadrovině ϱ, a polyedrická konfigurace γ. Pak lze sestrojit právě jeden bod S a projektivní vztah $\mathbf{L}_\pi$ mezi nadrovinou ϱ a libovolnou vlastní nadrovinou $\pi \not\ni S$ tak, že $\mathbf{L}_\pi\mathfrak{d}$ je průmětem konfigurace γ z centra S.*

Je-li bod S vlastní, pak mezi $\mathbf{L}_\pi$ náleží také afinity, jejichž moduly nabývají všech kladných hodnot.

Je-li bod S nevlastní, pak jsou možné dva případy: buďto žádné $\mathbf{L}_\pi$ není afinitou, anebo všecky $\mathbf{L}_\pi$ jsou afinitami a moduly těchto afinit nabývají všech hodnot intervalu $\langle m_1, \infty)$, kde m_1 je modul té afinity $\mathbf{L}_\pi$, v níž konfiguraci $\mathfrak{d}$ odpovídá kolmý průmět konfigurace γ z centra S.

Důkaz (pro případ, že $\mathfrak{d}$ je d_0-konfigurací): Nechť $\gamma = (O', A'_1, A'_2, \ldots, A'_n, B'_1, B'_2, \ldots, B'_n)$, $\mathfrak{d} = (O, A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n) \subset \varrho$; označme dále ω' nadpřímku obsahující body $\langle A'_i, A'_j\rangle \cap \langle B'_i, B'_j\rangle$, kde $i \neq j$ nabývají hodnot $1, 2, \ldots, n$. Taková nadpřímka existuje podle věty Desarguesovy, aplikované na simplexy $A'_1A'_2 \ldots A'_n$, $B'_1B'_2 \ldots B'_n$, perspektivní podle O'. Dále označme v dalších úvahách symbolem ω nadpřímku obsahující body $\langle A_i, A_j\rangle \cap \langle B_i, B_j\rangle$, kde $i \neq j$ nabývají hodnot $1, 2, \ldots, n$. Existuje právě jedna projektivita $\mathbf{a}$ mezi ϱ, $\langle A'_1, A'_2, \ldots, A'_n\rangle$ tak, že $\mathbf{a}A_i = A'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $\mathbf{a}\omega = \omega'$; rovněž existuje právě jedna projektivita $\mathbf{b}$ mezi ϱ, $\langle B'_1, B'_2, \ldots, B'_n\rangle$ tak, že $\mathbf{b}B_i = B'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $\mathbf{b}\omega = \omega'$. Promítáním z centra O' je mezi $\langle A'_1, A'_2, \ldots, A'_n\rangle$, $\langle B'_1, B'_2, \ldots, B'_n\rangle$ zprostředkována projektivita $\mathbf{c}$, v níž $\mathbf{c}A'_i = B'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, takže $\mathbf{ca}O = \mathbf{b}O$; tedy body $O', \mathbf{a}O, \mathbf{b}O$ leží na téže přímce, již označíme symbolem o. Existuje právě jeden bod $S \in o$ tak, že průmět konfigurace γ z centra S do libovolné vlastní nadroviny $\pi \not\ni S$ odpovídá konfiguraci $\mathfrak{d}$ v projektivitě mezi ϱ, π. Naznačíme důkaz tohoto tvrzení: Dělicí dvojpoměr bodů $O, A_1, B_1, \langle O, A_1\rangle \cap \omega$ označme λ_1. Zvolme nadrovinu $\gamma = \langle B'_1, \omega'\rangle$ a promítejme do ní z centra $C \in o$, $C \notin \gamma$.

Dělicí dvojpoměr bodů $o \cap \gamma$, $\langle C, A_1\rangle \cap \gamma$, B_1, $\langle o, B_1\rangle \cap \omega'$ nabývá pro

$C \in o$, $C \notin \gamma$ všech reálných hodnot, při čemž každou reálnou hodnotu nabývá právě jednou. Tedy existuje mezi body C právě jeden bod (označme jej S), pro nejž zmíněný dvojpoměr má hodnotu λ_1. Je-li dále $\pi \not\ni S$ libovolná vlastní nadrovina, pak též dělicí dvojpoměr bodů $o \cap \pi$, $\langle S, A_1' \rangle \cap \pi$, $\langle S, B_1' \rangle \cap \pi$, $\langle O, A_1' \rangle \cap \langle O, \omega' \rangle \cap \pi$ má hodnotu λ_1. Označíme-li tedy horním indexem π průměty čárkovaných bodů z S do π, pak podle předchozí konstrukce existuje vzhledem k reprodukci dělicího dvojpoměru λ_1 projektivita $\mathbf{L}_\pi$ mezi ϱ, π tak, že $\mathbf{L}_\pi O = O^\pi$, $\mathbf{L}_\pi A_i = A_i^\pi$, $\mathbf{L}_\pi B_i = B_i^\pi$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Zvolme pevnou vlastní nadrovinu $\pi_0 \not\ni S$. Nevlastní nadpřímce nadroviny odpovídá v $\mathbf{L}_\pi$ nadpřímka $q \subset \pi_0$.

Nechť za prvé je S vlastní. Nabývá-li vlastní nadrovina $\pi \not\ni S$ všech poloh, rovnoběžných s nadrovinou $\langle S, q \rangle$, pak mezi průměty konfigurace γ do těchto nadrovin π je vztah homothetie o středu S, při čemž poměr homothetie nabývá všech nenulových hodnot. Nabývá-li tedy vlastní nadrovina $\pi \not\ni S$ všech poloh rovnoběžných s nadrovinou $\langle S, q \rangle$, pak transformace $\mathbf{L}_\pi$ jsou afinity, jejichž moduly nabývají všech kladných hodnot.

Nechť za druhé S je nevlastní. Není-li $\mathbf{L}_{\pi_0}$ afinitou, pak žádné $\mathbf{L}_\pi$ není afinitou. Nechť tedy $\mathbf{L}_{\pi_0}$ je afinitou; pak každé $\mathbf{L}_\pi$ je afinitou. Označme m_1 modul afinity $\mathbf{L}_{\pi_1}$, kde π_1 je nadrovina kolmá k promítacím přímkám. Nabývá-li vlastní rovina π všech poloh, pak mezi průměty konfigurace γ do π_1, π je vztah afinity, při čemž modul této afinity probíhá interval $\langle 1, \infty)$. Tedy modul afinity $\mathbf{L}_\pi$ probíhá interval $\langle m_1, \infty)$.

Důkaz pro případ obecné d-konfigurace $\mathfrak{d}$ podáme v rámci věty 7. Předchozí důkaz zobecňuje postup Kruppův a Džaparidzův (viz [3]). Věty 4, 6 možno označit jako první a druhou základní větu n-rozměrné centrální axonometrie vzhledem k promítání z bodu do nadroviny.

3. Základní věta n-rozměrné centrální axonometrie při promítání z $(n$-m-$1)$rozměrného prostoru do m-rozměrného prostoru $(n > m \geqq 2)$

Předmětem vyšetřování bude opět n-rozměrný rozšířený eukleidovský prostor. Nechť m je pevné kladné číslo větší než 1 a menší než n. Modulem afinity $\mathbf{A}$ mezi dvěma m-rozměrnými podprostory ϱ_1, ϱ_2 budeme rozumět objem polyedru $\Delta_2 \subset \varrho_2$, který odpovídá v afinitě $\mathbf{A}$ m-rozměrnému polyedru $\Delta_1 \subset \varrho_1$ o jednotkovém objemu. Přijmeme definici 3 polyedrické konfigurace, avšak d-konfiguraci budeme nyní definovat jinak než v druhé části:

Definice 5. Posloupnost bodů $O, A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$, ležících v témže vlastním m-rozměrném prostoru ϱ, nazveme d-konfigurací, jestliže každá trojice O, A_i, B_i obsahuje různé kolineární body a jestliže $\langle O, A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle = \varrho$.[8]

Dále budeme promítáním rozumět vždy promítání, jehož centrem je $(n-m-1)$ rozměrný prostor a jehož průmětnou je m-rozměrný prostor.

Poučky 3, 5[8] lze okamžitě rozšířit i pro právě zavedené promítání.

Věta 7. *Nechť je dána d-konfigurace $\mathfrak{d}$, ležící v m-rozměrném prostoru ϱ, a polyedrická konfigurace γ. Pak lze sestrojit právě jeden $(n$-m-$1)$rozměrný prostor S a projektivní vztah $\mathbf{L}_\pi$ mezi prostorem ϱ a libovolným vlastním m-rozměrným prostorem π disjunktním s S tak, že $\mathbf{L}_\pi \mathfrak{d}$ je průmětem konfigurace γ z centra S.*

Je-li S vlastní, pak mezi $\mathbf{L}_\pi$ náleží též afinity, jejichž moduly nabývají všech kladných hodnot.

Je-li S nevlastní, pak jsou možné dva případy: buďto žádné $\mathbf{L}_\pi$ není afinitou, anebo všecky $\mathbf{L}_\pi$ jsou afinitami a moduly těchto afinit nabývají všech hodnot intervalu $\langle m_1, \infty)$, kde m_1 je modul té afinity $\mathbf{L}_\pi$, v níž konfiguraci $\mathfrak{d}$ odpovídá kolmý průmět konfigurace γ z centra S.

Důkaz. Nechť $\gamma = (O', A_1', A_2', \ldots, A_n', B_1', B_2', \ldots, B_n')$, $\mathfrak{d} = (O, A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n) \subset \varrho$. Bez omezení obecnosti lze předpokládat, že $\langle O, A_1, A_2, \ldots, A_m \rangle = \varrho$. Existuje právě jedna projektivita $\mathbf{G}$ mezi ϱ, $\varrho' = \langle O', A_1', A_2', \ldots, A_n' \rangle$, pro niž platí $\mathbf{G}O = O'$, $\mathbf{G}A_i = A_i'$ $(i = 1, \ldots, m)$, $\mathbf{G}\langle B_1, B_2, \ldots, B_m \rangle = \langle B_1', B_2', \ldots, B_m' \rangle$. Konfigurace γ se promítá z centra $S = \langle \langle \mathbf{G}A_{m+1}, A_{m+1}' \rangle \cap \langle \mathbf{G}B_{m+1}, B_{m+1}' \rangle, \langle \mathbf{G}A_{m+2}, A_{m+2}' \rangle \cap \langle \mathbf{G}B_{m+2}, B_{m+2}' \rangle, \ldots, \langle \mathbf{G}A_n, A_n' \rangle \cap \langle \mathbf{G}B_n, B_n' \rangle \rangle$ do libovolného vlastního m-rozměrného prostoru π, disjunktního s S, do konfigurace $\mathfrak{d}_\pi$. Mezi ϱ', π je promítáním z S zprostředkována projektivita $\mathbf{H}_\pi$ tak, že $\mathbf{H}_\pi \mathbf{G} \mathfrak{d} = \mathfrak{d}_\pi$. Střed S je podle konstrukce určen jednoznačně.

Nechť S je vlastní. Nevlastní útvar prostoru ϱ se zobrazuje vztahem $\mathbf{G}$ do $(m-1)$ rozměrného prostoru $q \subset \varrho'$. Nabývá-li m-rozměrný prostor π, disjunktní s S, všech poloh rovnoběžných s $\langle S, q \rangle$, pak průměty konfigurace γ z S do π jsou spolu homothetické podle středu S a poměr homothetie nabývá všech nenulových hodnot. Pak ale moduly afinit $\mathbf{H}_\pi \mathbf{G}$ nabývají všech kladných hodnot.

Nechť S je nevlastní. Pak každé $\mathbf{H}_\pi$ je afinitou. Není-li $\mathbf{G}$ afinitou, není ani žádné $\mathbf{H}_\pi \mathbf{G}$ afinitou. Je-li $\mathbf{G}$ afinitou, pak každé $\mathbf{H}_\pi \mathbf{G}$ je afinitou. Vyberme mezi π prostor π_1 kolmý k S. Nechť afinita $\mathbf{H}_{\pi_1} \mathbf{G}$ má modul m_1. Střed promítání S zprostředkuje mezi π_1 a mezi libovolným prostorem π, disjunktním s S, afinitu; nabývá-li π všech poloh, pak modul předchozí afinity probíhá interval $\langle 1, \infty)$. Tedy modul afinity $\mathbf{H}_\pi \mathbf{G}$ probíhá interval $\langle m_1, \infty)$. Věta je dokázána.

V předchozím důkazu je zobecněna a zjednodušena metoda, které použil Ed. Stiefel ve své učebnici [6], str. 132, pro trojrozměrný prostor a pro souřadnicovou konfiguraci γ. Všimněme si, otázky po projektivitách $\mathbf{L}_\pi$, které jsou podobnostmi (*problém* 1). Pro souřadnicové konfigurace a pro promítání z nevlastního bodu do nadroviny rozřešil tento problém úplně Ed. Stiefel

[8] d-konfiguraci prohlásíme za d_1-konfiguraci, platí-li $\langle B_1, B_2, \ldots, B_n \rangle = \varrho$.

v práci [7] použitím analytické metody. Upozorněme též na vyšetřování, které provedli N. F. Četveruchin a A. M. Lopšic (viz sborník Математика в СССР за тридцать лет, vyšlém za redakce A. G. Kuroše, A. I. Markuševiče a P. K. Raševského, Moskva—Leningrad 1948, 944—995; dále viz učebnici E. A. Glazunova a N. F. Četveruchina, Аксонометрия, Moskva 1953, 76—77, hlavní theorém a poznámka[1] pod čarou).

Dále poznamenejme, že v případě $m = 2$ dokazuje část věty 7 V. N. Pervikova (v práci [5]), avšak pouze pro d_0-konfigurace; používá důkazu z práce [3] (pro $n = 3$) a postupuje úplnou indukcí podle n. Námi použitá rozšířená metoda Stiefelova vedla k cíli přímo, a to i v případě $m \neq 2$.

Věta 7 je rozšířením druhé základní věty. Nezabývali jsme se analogickým rozšířením první základní věty, protože takové rozšíření naráží na značné potíže.

K problému zobecnění první základní věty uveďme ještě tuto myšlenku: Mezi projektivitami $\mathbf{L}_\pi$ z věty 7 je možno hledat shodná zobrazení. Nutná a postačující podmínka pro existenci takového shodného zobrazení byla by současně nutnou i postačující podmínkou pro to, aby daná d-konfigurace byla průmětem některé konfigurace γ^*, shodné s danou polyedrickou konfigurací γ. Takto se naskýtá možnost zobecnit i první základní větu pro promítání z $(n-m-1)$rozměrného centra *(problém 2)*.

Poznámka (při korektuře 25. 5. 1957): Problém 1 pro paralelní promítání a pro souřadnicové konfigurac rozřešil H. Naumann v práci *Über Vektorsterne und Paralelprojektionen regulärer Polytope*, Math. Zeitschr. 67, 1957, 75-82. Pro paralelní promítání a pro polyedrické konfigurace $(O', A_1', A_2', \ldots, A_n', B_1', B_2', \ldots, B_n')$ s nevlastními body $B_1', B_2', \ldots, B_n'$ rozřešil problém 1 autor v dosud nepublikované práci *Hlavní věta paralelní axonometrie*.

LITERATURA

1. Бескин, Н. М. Основное предложение аксонометрии, Сб. Вопросы современной начертательной геометрии, Москва—Ленинград 1947, 55—126. 2. Четверухин, Н. Ф., Об основной теореме аксонометрии в центральной проекции, ДАН СССР, 50, 1945, 75—76. 3. Джапаридзе, И. С., Проективно-синтетическое доказательство теоремы Н. М. Бескина. Сб. Методы начертательной геометрии и ее приложения, Москва 1955, 100—104. 4. Müller E., Vorlesungen über darstellende Geometrie I: Die linearen Abbildungen; bearbeitet von E. Kruppa, Leipzig—Wien 1923. 5. Первикова, В. Н., Обобщение основной теоремы центральной аксонометрии на пространсво n-измерении, Сб. Методы начертательной геометрии и ее приложения, Москва 1955, 141—151. 6. Stiefel, Ed., Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Basel 1947. 7. Stiefel Ed., Zum Satz von Pohlke, Commentarii Math. Helv. 10, 1938, 208—223.

Došlo 27. 5. 1956

ОБ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМАХ МНОГОМЕРНОЙ ЦЕНТРАЛЬНОЙ АКСОНОМЕТРИИ

ВАЦЛАВ ГАВЕЛ

Выводы

Автор занимается обобщением обеих основных теорем трехмерной центральной аксонометрии (сформулированных Н. М. Бескиным), по двум направлениям: во-первых, расширением понятия дезарговой конфигурации, во-вторых, переходом к многомерному пространству.

Многомерную центральную аксонометрию можно создавать пользуясь основными теоремами и т. наз. элементарными построениями; под «построением» в многомерной центральной аксонометрии можно понимать любую конечную последовательность элементарных построений. Но такого рода строением многомерной центральной аксонометрии автор не занимается.

Чтобы мы могли сформулировать главные результаты сначала несколько определений:

В n-мерном расширенном эвклидовом пространстве определим полиэдрическую конфигурацию как последовательность отличных друг от друга точек $O', A_1', A_2', \ldots, A_n', B_1', B_2', \ldots, B_n'$, выполняющих следующие условия: Каждая тройка O', A_i', B_i' содержит коллинейные точки, а прямые $\langle O', A_i' \rangle$ не лежат в одной гиперплоскости. Полиэдрическую конфигурацию назовем координатной, если точки B_i' являются несобственными, а если отрезки $O'A_i'$ взаимно перпендикулярны и имеют одинаковую длину. Далее определим m-мерную d-конфигурацию как последовательность точек O, $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$, лежащих в том же m-мерном пространстве ϱ и удовлетворяющих следующим условиям: каждая тройка O, A_i, B_i содержит различные коллинейные точки, и линейное пространства $\langle O, A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle$ является пространством ϱ. Если еще будет выполняться требование, чтобы линейное пространство $\langle B_1, B_2, \ldots, B_n \rangle$ было пространством ϱ, то рассматриваемую d-конфигурацию назовем d_1-конфигурацией.

Первую основную теорему многомерной центральной аксонометрии можно сформулировать следующим образом (смотри теорему 1 и теорему 4):

Данная $(n\text{-}1)$-мерная d_1-конфигурация $\mathfrak{d}$ является проекцией некоторой координатной конфигурации тогда и только тогда, когда мнимая $(n\text{-}1)$-мерная квадрика k является мнимой сферой.

$(n\text{-}1)$-мерная квадрика k определенна следующим способом: если $O, A_1, A_2, \ldots, A_n$, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ есть данная конфигурация $\mathfrak{d}$, то точки $\langle A_i, A_j \rangle \cap \langle B_i, B_j \rangle$ лежат на той же гиперпрямой p; через P обозначим гармоничный полюс гиперпрямой p по отношению к $(n\text{-}1)$-мерному симплексу $B_1 B_2 \ldots B_n$; тогда будет однозначно определена $(n\text{-}1)$-мерная мнимая квадрика k, для которой $B_1 B_2 \ldots B_n$ служит полярным симплексом, а P, p — парой полярно сопряженных фигур.

Эта теорема обобщает результаты Э. Круппы и Н. Ф. Четверухина.

Вторую основную теорему многомерной центральной аксонометрии можно сформулировать следующим образом (смотри теорему 3, теорему 4 и теорему 7):

Пусть задана m-мерная d-конфигурация $\mathfrak{d}$, лежащая в m-мерном пространстве ϱ, и полиэдрическая конфигурация γ. Тогда можно построить точно одно $(n\text{-}m\text{-}1)$-мерное пространство S и проективное соответствие $\mathbf{L}_\pi$ между пространством ϱ и любым собственным m-мерным пространством π, непересекающемся с S, так, что $\mathbf{L}_\pi \mathfrak{d}$ является проекцией конфигурации γ из центра S. Если S-собственное пространство, то k $\mathbf{L}_\pi$

принадлежат также афинные соответствия, модули которых принимают все положи-
тельные значения. Если S не является собственным, то возможны два случая: Или ни
одно $\mathfrak{l}_\pi$ не является афинным соответствием или каждое $\mathfrak{l}_\pi$ является афинным соот-
ветствием, и модули этих афинных соответствий принимают все значения, лежащие
в интервале $\langle m_1, \infty)$, где m_1 есть модуль того афинного соответствия $\mathfrak{l}_\pi$, в котором
конфигурации $\mathfrak{d}$ сопоставлена прямоугольная проекция конфигурации γ из центра S.

Эта теорема является обобщением результатов Э. Круппы, Э. Стифеля, Н. М. Бес-
кина, И. С. Джапаридзе и В. Н. Первиковой.

Затем в работе высказываются и доказываются более мелкие результаты, дополня-
ющие обе цитированные теоремы. В заключение автор ставит две еще нерешенные
проблемы, а именно: проблему обобщения теоремы Полке (приводится как *проблема 1*)
и проблема обобщения первой основной теоремы для проектирования из $(n\text{-}m\text{-}1)$-мер-
ного центра и для общих полиэдрических конфигураций (приводится как *проблема 2*).

FUNDAMENTALSÄTZE DER MEHRDIMENSIONALEN ZENTRALAXONOMETRIE

VÁCLAV HAVEL

Zusammenfassung

Diese Abhandlung enthält die Verallgemeinerung der beiden Fundamentalsätze der Zentralaxonometrie (die von N. M. Beskin formuliert werden), und zwar in zwei Richtungen; erstens man verallgemeinert den Begriff der Desarguesschen Konfiguration und zweitens man führt die mehrdimensionalen Räume ein.

Die mehrdimensionale Zentralaxonometrie kann auf dem Grund der Fundamentalsätze und auf dem Grund der sog. elementaren Konstruktionen gebildet werden. Unter dem Begriffe „Konstruktion" (in der mehrdimensionalen Axonometrie) verstehen wir jede endliche Folge der elementaren Konstruktionen. Diese Thematik wird in dieser Abhandlung nicht erwähnt.

Die folgenden Definitionen dienen zur Erleichterung der Formulation unserer Ergebnisse:

Die polyedrische Konfiguration wird in dem n-dimensionalen ergänzten Raume als eine Punktfolge $O', A'_1, A'_2, \ldots, A'_n, B'_1, B'_2, \ldots, B'_n$ definiert; diese Folge erfüllt folgende Bedingungen: Alle Punkte sind untereinander verschieden, jedes Tripel O', A'_i, B'_i enthält kollineare Punkte und die Geraden $\langle O', A'_i\rangle$ liegen nicht in derselben Hyperebene. Sind B'_i uneigentliche Punkte und die Strecken $O'A'_i$ senkrecht und gleicher Länge, so nennt man die polyedrische Konfiguration Koordinatenkonfiguration. Weiter wird die m-dimensionale d-Konfiguration als Punktfolge $O, A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ definiert, die folgende Bedingungen erfüllt: Alle Punkte liegen im demselben m-dimensionalen Raume ϱ, jedes Tripel O, A_i, B_i enthällt verschiedene kollineare Punkte und der lineare Raum $\langle O, A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle$ fällt mit ϱ zusammen. Fordert man weiter, daß der lineare Raum $\langle B_1, B_2, \ldots, B_n\rangle$ mit ϱ zusammenfällt, dann wird die gegebene Konfiguration als d_1-Konfiguration genannt.

Man kann den ersten Fundamentalsatz der mehrdimensialen Zentralaxonometrie folgenderweise formulieren (siehe Sätze 1 u. 4):

Gegebene $(n\text{-}1)$dimensionale d_1-Konfiguration $\mathfrak{d}$ ist eine Projektion irgendeiner Koordinatenkonfiguration genau dann, wenn die imaginäre $(n\text{-}1)$dimensionelle Quadrik k eine imaginäre Sphäre ist.

Die $(n\text{-}1)$dimensionale Quadrik k ist folgenderweise definiert: Ist $O, A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ die gegebene Konfiguration $\mathfrak{d}$, dann liegen die Punkte $\langle A_i, A_j\rangle \cap \langle B_i, B_j\rangle$ auf derselben Hypergeraden p; wir bezeichnen mit P den harmonischen Pol der Hypergeraden p hinsichtlich zum $(n\text{-}1)$dimensionalen Simplex $B_1B_2 \ldots B_n$. Nun ist k die eindeutig bestimmte $(n\text{-}1)$dimensionalle imaginäre Quadrik mit $B_1B_2 \ldots B_n$ als Polarsimplex und mit P, p als Pol und Polare.

Dieser Satz verallgemeinert die Resultate von E. Kruppa und N. F. Četvěruchin.

Den zweiten Fundamentalsatz der mehrdimensionalen Zentralaxonometrie kann man folgenderweise formulieren (siehe Sätze 3, 4 u. 7):

Es sei eine m-dimensionale d-Konfiguration $\mathfrak{d}$, die in dem m-dimensionalen Raum ϱ liegt, und eine polyedrische Konfiguration γ gegeben. Man kann dann gerade einen $(n\text{-}m\text{-}1)$dimensionalen Raum S und eine Projektivität $\mathfrak{l}_\pi$ zwischen ϱ und zwischen einem beliebigen, mit S disjunkten m-dimensionalen Raume π konstruieren, und zwar so, daß $\mathfrak{l}_\pi\mathfrak{d}$ eine Projektion von γ aus S ist. Ist S eigentlich, dann gehören zu $\mathfrak{l}_\pi$ auch Affinitäten mit beliebigen Moduln. Ist S uneigentlich, dann sind zwei Fälle möglich: entweder ist keine Projektivität $\mathfrak{l}_\pi$ eine Affinität oder jede Projektivität $\mathfrak{l}_\pi$ ist Affinität und die Moduln dieser Affinitäten nehmen alle Werte aus dem Intervalle $\langle m_1, \infty)$, wo m_1 Modul derjenigen Affinität $\mathfrak{l}_\pi$ ist, in der der Konfiguration $\mathfrak{d}$ eine orthogonale Projektion von γ aus S entspricht.

Dieser Satz verallgemeinert die Resultate von E. Kruppa, Ed. Stiefel, N. M. Beskin, I. S. Džaparidze und V. N. Pervikova.

In der Abhandlung werden weiter einige andere Resultate formuliert und bewiesen, die die beiden zitierten Fundamentalsätze ergänzen. In der Schlußbetrachtung werden zwei bisher ungelöste Probleme formuliert, und zwar das Problem der Verallgemeinerung des Satzes von Pohlke *(Problem 1)* und das Problem der Verallgemeinerung des ersten Fundamentalsatzes für die Projektion aus dem $(n\text{-}m\text{-}1)$dimensionalen Zentrum und für allgemeine polyedrische Konfigurationen *(Problem 2)*.