MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK VII ČÍSLO 2

NIEKTORÉ LINEÁRNE SYSTÉMY SINGULÁRNYCH KOLINEÁCIÍ

VÁCLAV MEDEK
Katedra deskriptívnej geometrie Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave

1. Uvažujme o reálnej projektívnej rovine P_2 a o jednoznačných bodových zobrazeniach tejto roviny do seba, daných rovnicami

$$\varrho X^i = a_{ij} x^j, \quad \varrho \neq 0, \quad (i, j = 0, 1, 2), \tag{1}$$

kde hodnosť matice (a_{ij}) je $\geqq 1$ a čísla ϱ a a_{ij} sú reálne. Príbuznosť (1) budeme označovať $\mathfrak{A}$. Príbuznosť $\mathfrak{A}$ je presne určená maticou (a_{ij}), pričom matica $k(a_{ij})$, kde $k \neq 0$, určuje tú istú príbuznosť.

Zaveďme označenie

$$a^0 = a_{00}, \quad a^1 = a_{01}, \quad a^2 = a_{02}, \quad a^3 = a_{10}, \quad a^4 = a_{11},$$
$$a^5 = a_{12}, \quad a^6 = a_{20}, \quad a^7 = a_{21}, \quad a^8 = a_{22}. \tag{2}$$

Potom čísla ka^i $(i = 0, 1, \ldots, 8)$, kde $k \neq 0$, určujú tiež príbuznosť $\mathfrak{A}$, a pretože aspoň jedno z nich je rôzne od nuly, môžeme ich považovať za projektívne súradnice bodu A v reálnom projektívnom priestore P_8. Takým spôsobom sme jednojednoznačne zobrazili príbuznosť $\mathfrak{A}$ na priestor P_8.

Nech ${}^a h$ je hodnosť matice (a_{ij}). Ak ${}^a h = 3$, je príslušná príbuznosť $\mathfrak{A}$ kolineáciou. Ak ${}^a h < 3$, budeme príbuznosť $\mathfrak{A}$ nazývať singulárnou kolineáciou, a to pre ${}^a h = 2$ singulárnou kolineáciou hodnosti 2 a pre ${}^a h = 1$ hodnosti 1.

Pre singulárne kolineácie $\mathfrak{X}$ platí

$$| x_{ij} | = 0. \tag{3}$$

Ak do rovnice (3) zavedieme namiesto čísel x_{ij} čísla x^i podľa (2), dostaneme rovnicu

$$x^0x^4x^8 + x^1x^5x^6 + x^2x^3x^7 - x^0x^5x^7 - x^1x^3x^8 - x^2x^4x^6 = 0. \tag{4}$$

Z tvaru rovnice (4) vidieť, že singulárne kolineácie $\mathfrak{X}$ sa zobrazujú do bodov X, ktoré vypĺňajú nadplochu tretieho stupňa V_7^3.

Veta 1. *Nadplocha V_7^3 je pravá, t. j. neobsahuje žiadnu nadrovinu.*

Dôkaz. Keby nadplocha V_7^3 obsahovala nejakú nadrovinu, dala by sa ľavá strana jej rovnice (4) rozložiť. To však nie je možné, lebo determinant ako funkcia svojich prvkov je nerozložiteľný.

Definícia 1. *Pod lineárnym systémom kolineácií budeme rozumieť systém príbuzností ${}^{\lambda}\mathfrak{A}$ určený vzťahom*

$$\varrho X^i = \lambda_k{}^k a_{ij} x^j \quad (i, j = 0, 1, 2, \quad k = 0, 1, \ldots, l, \quad l \leq 8), \tag{5}$$

kde λ_k sú reálne čísla, z ktorých vždy aspoň jedno je rôzne od nuly. Pre $l = 1$ a pre dve od seba rôzne kolineácie ${}^0\mathfrak{A}, {}^1\mathfrak{A}$ hovoríme o zväzku kolineácií.

Veta 2. *Príbuznosti tvoriace lineárny systém kolineácií sa zobrazujú do bodov lineárneho podpriestoru priestoru P_8.*

Dôkaz priamo vyplýva z definície 1. Špeciálne obrazom zväzku je priamka určená bodmi ${}^0A, {}^1A$.

Veta 3. *Príbuznosti $\mathfrak{X}$, pre ktoré hodnosť matice (x_{ij}) je ${}^x h = 1$, zobrazujú sa na varietu ${}^x V$, ktorá sa skladá z dvoch dvojparametrických systémov rovín.*

Dôkaz. Označme ${}^iP$ bod, pre ktorý $x^i = 1$ a všetky ostatné súradnice má rovné nule. Potom pod symbolom ${}^{i_1 i_2 \ldots i_n}P$ budeme rozumieť lineárny podpriestor priestoru P_8 určený bodmi ${}^{i_1}P, {}^{i_2}P \ldots {}^{i_n}P$.

Aby matica (x_{ij}) mala hodnosť ${}^x h = 1$, na to treba a stačí, aby buď každé jej dva riadky, alebo každé jej dva stĺpce boli lineárne závislé. Z toho hneď vidieť, že body rovín ${}^{012}P$, ${}^{345}P$, ${}^{678}P$, ${}^{036}P$, ${}^{147}P$, ${}^{258}P$ sú obrazmi singulárnych kolineácií hodnosti 1. Zvoľme si teraz v rovine ${}^{012}P$ ľubovoľný bod X $(x^0, x^1, x^2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ a priraďme mu v rovine ${}^{345}P$ bod X' $(0, 0, 0, x^0, x^1, x^2, 0, 0, 0)$ a v rovine ${}^{678}P$ bod X'' $(0, 0, 0, 0, 0, 0, x^0, x^1, x^2)$. Tieto tri body sú lineárne nezávislé a určujú teda rovinu ${}^xP_2$. Zrejme všetky body roviny ${}^xP_2$ sú obrazmi singulárnych kolineácií hodnosti 1. Medzi bodmi X, X', X'' rovín ${}^{012}P$, ${}^{345}P$, ${}^{678}P$ je kolineárny vzťah.

Podobne môžeme zvoliť v rovinách ${}^{036}P$, ${}^{147}P$, ${}^{258}P$ body Y $(y^0, 0, 0, y^3, 0, 0, y^6, 0, 0)$, Y' $(0, y^0, 0, 0, y^3, 0, 0, y^6, 0)$, Y'' $(0, 0, y^0, 0, 0, y^3, 0, 0, y^6)$, ktoré sú tak isto lineárne nezávislé a určujú tiež rovinu ${}^yP_2$. Všetky body roviny ${}^yP_2$ sú tiež obrazmi singulárnych kolineácií hodnosti 1. Medzi bodmi Y, Y', Y'' rovín ${}^{036}P$, ${}^{147}P$, ${}^{258}P$ je tiež kolineárny vzťah.

Definícia 2. *Systém rovín ${}^xP_2$ budeme označovať Ξ a systém rovín ${}^yP_2$ budeme označovať H.*

Poznámka 1. Roviny ${}^{012}P$, ${}^{345}P$, ${}^{678}P$ prislúchajú k systému H, roviny ${}^{036}P$, ${}^{147}P$, ${}^{258}P$ prislúchajú k systému Ξ. Skutočne, napr. rovinu ${}^{012}P$ dostaneme pre bod Y $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Podobne napr. rovinu ${}^{036}P$ dostaneme pre bod X $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Veta 4. *Dve od seba rôzne roviny systému Ξ (systému H) nemajú žiaden spoločný bod; každá rovina systému Ξ má spoločný práve jeden bod s každou rovinou systému H.*

Dôkaz. Uvažujme o dvoch od seba rôznych rovinách ${}^{1x}P_2$, ${}^{2x}P_2$ systému Ξ. Body roviny ${}^{1x}P_2$ majú súradnice $(\varrho^1 x^0, \varrho^1 x^1, \varrho^1 x^2, \varrho'^1 x^0, \varrho'^1 x^1, \varrho'^1 x^2, \varrho''^1 x^0,$

$\varrho''^1 x^1, \varrho''^1 x^2)$, kde aspoň jedno z čísel $\varrho, \varrho', \varrho''$ je rôzne od nuly. Podobne body roviny ${}^{2x}P_2$ majú súradnice $(\varkappa^2 x^0, \varkappa^2 x^1, \varkappa^2 x^2, \varkappa'^2 x^0, \varkappa'^2 x^1, \varkappa'^2 x^2, \varkappa''^2 x^0, \varkappa''^2 x^1, \varkappa''^2 x^2)$, kde aspoň jedno z čísel $\varkappa, \varkappa', \varkappa''$ je rôzne od nuly. Aby tieto dva body splynuli, museli by splynúť body ${}^1X^2X$, ${}^1X'^2X'$, ${}^1X''^2X''$ a teda aj obidve roviny ${}^{1x}P_2$, ${}^{2x}P_2$. Tým istým spôsobom by sme dokázali tvrdenie aj pre dve od seba rôzne roviny systému H.

Majme teraz jednu rovinu ${}^xP_2$ systému Ξ a jednu rovinu ${}^yP_2$ systému H. Body roviny ${}^xP_2$ majú súradnice $(\varrho x^0, \varrho x^1, \varrho x^2, \varrho' x^0, \varrho' x^1, \varrho' x^2, \varrho'' x^0, \varrho'' x^1, \varrho'' x^2)$ a body roviny ${}^yP_2$ majú súradnice $(\varkappa y^0, \varkappa' y^0, \varkappa'' y^0, \varkappa y^3, \varkappa' y^3, \varkappa'' y^3, \varkappa y^6, \varkappa' y^6, \varkappa'' y^6)$. Položme $\varkappa = x^0$, $\varkappa' = x^1$, $\varkappa'' = x^2$, $\varrho = y^0$, $\varrho' = y^3$, $\varrho'' = y^6$. Pre takto volené čísla $\varkappa, \varkappa', \varkappa''$; $\varrho, \varrho', \varrho''$ dostávame spoločný bod oboch rovín. Všetky spoločné body rovín ${}^xP_2$, ${}^yP_2$ dostaneme riešením systému homogénnych lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} \varrho x^0 - \varkappa y^0 = \varrho x^1 - \varkappa' y^0 = \varrho x^2 - \varkappa'' y^0 = \varrho' x^0 - \varkappa y^3 = \varrho' y^1 - \varkappa' y^3 = \\ = \varrho' x^2 - \varkappa'' y^3 = \varrho'' x^0 - \varkappa y^6 = \varrho'' x^1 - \varkappa' y^6 = \varrho'' x^2 - \varkappa'' y^6 = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Tento systém má však jediné, už uvedené riešenie.

Poznámka 2. Čísla $\varrho, \varrho', \varrho''$ môžeme chápať ako projektívne súradnice bodov v rovinách ${}^xP_2$, podobne čísla $\varkappa, \varkappa', \varkappa''$ môžeme chápať ako projektívne súradnice bodov v rovinách ${}^yP_2$. Zvoľme si teraz ľubovoľný bod Y $(y^0, 0, 0, y^3, 0, 0, y^6, 0, 0)$ a k nemu prislúchajúcu rovinu ${}^yP_2$. Táto rovina pretína každú z rovín ${}^xP_2$ v bode, pre ktorý platí $\varrho = ky^0$, $\varrho' = ky^3$, $\varrho'' = ky^6$. Súradnice tohto bodu v každej z rovín ${}^xP_2$ sa teda líšia iba nenulovým násobkom a roviny ${}^yP_2$ sprostredkujú medzi všetkými rovinami ${}^xP_2$ kolineárnu príbuznosť. Podobne aj naopak roviny ${}^xP_2$ sprostredkujú kolineárnu príbuznosť medzi rovinami ${}^yP_2$.

Veta 5. *Nutná a postačujúca podmienka, aby bod A bol dvojnásobným bodom nadplochy V_7^3 je, aby bod A prislúchal variete ${}^xV$.*

Dôkaz. Zvoľme si dva od seba rôzne ľubovoľné body A, B a hľadajme priesečníky ich spojnice p s nadplochou V_7^3. Ľubovoľný bod M spojnice AB môžeme vyjadriť v tvare $M = \mu_1 A + \mu_2 B$. Aby bod M ležal na nadploche V_7^3, musí platiť

$$\begin{vmatrix} \mu_1 a^0 + \mu_2 b^0 & \mu_1 a^1 + \mu_2 b^1 & \mu_1 a^2 + \mu_2 b^2 \\ \mu_1 a^3 + \mu_2 b^3 & \mu_1 a^4 + \mu_2 b^4 & \mu_1 a^5 + \mu_2 b^5 \\ \mu_1 a^6 + \mu_2 b^6 & \mu_1 a^7 + \mu_2 b^7 & \mu_1 a^8 + \mu_2 b^8 \end{vmatrix} = \mu_1^3 \begin{vmatrix} a^0 & a^1 & a^2 \\ a^3 & a^4 & a^5 \\ a^6 & a^7 & a^8 \end{vmatrix} +$$

$$+ \mu_1^2 \mu_2 \left[\begin{vmatrix} a^0 & a^1 & a^2 \\ a^3 & a^4 & a^5 \\ b^6 & b^7 & b^8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^0 & a^1 & a^2 \\ b^3 & b^4 & b^5 \\ a^6 & a^7 & a^8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b^0 & b^1 & b^2 \\ a^3 & a^4 & a^5 \\ a^6 & a^7 & a^8 \end{vmatrix} \right] +$$

$$+ \mu_1 \mu_2^2 \left[\begin{vmatrix} a^0 & a^1 & a^2 \\ b^3 & b^4 & b^5 \\ b^6 & b^7 & b^8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b^0 & b^1 & b^2 \\ a^3 & a^4 & a^5 \\ b^6 & b^7 & b^8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b^0 & b^1 & b^2 \\ b^3 & b^4 & b^5 \\ a^6 & a^7 & a^8 \end{vmatrix} \right] + \mu_2^3 \begin{vmatrix} b^0 & b^1 & b^2 \\ b^3 & b^4 & b^5 \\ b^6 & b^7 & b^8 \end{vmatrix} = 0, \tag{7}$$

Ak bod A má byť dvojnásobným bodom nadplochy V_7^3, na to treba, aby

1. bod A ležal na nadploche V_7^3 a 2. aby každá priamka prechádzajúca bodom A mala s nadplochou V_7^3 najviac jeden ďalší spoločný bod. Aby tieto podmienky boli splnené, treba a stačí, aby v rovnici (7) boli koeficienty pri μ_1^3 a $\mu_1^2\mu_2$ identicky rovné nule pre každý bod B rôzny od bodu A. To však nastáva vtedy a len vtedy, keď determinant

$$\begin{vmatrix} a^0 & a^1 & a^2 \\ a^3 & a^4 & a^5 \\ a^6 & a^7 & a^8 \end{vmatrix}$$

má hodnosť 1. To sú však práve body variety ${}^{x}V$.

Dôsledok. Spojnica ľubovoľných dvoch od seba rôznych bodov variety ${}^{x}V$ leží celá na nadploche V_7^3.

Veta 6. *Nech ${}^{1x}P_2$, ${}^{2x}P_2$ (${}^{1y}P_2$, ${}^{2y}P_2$) sú dve od seba rôzne roviny systému Ξ (H); potom tieto dve roviny určujú päťrozmerný lineárny priestor ${}^{1x2x}P_5$ (${}^{1y2y}P_5$), ktorý leží celý na nadploche V_7^3.*

Dôkaz. Zvoľme si v rovine ${}^{1x}P_2$ tri lineárne nezávislé body ${}^{1}M$, ${}^{1}N$, ${}^{1}P$, podobne v rovine ${}^{2x}P_2$ tri lineárne nezávislé body ${}^{2}M$, ${}^{2}N$, ${}^{2}P$. Ľahko zistíme, že body ${}^{1}M$, ${}^{1}N$, ${}^{1}P$, ${}^{2}M$, ${}^{2}N$, ${}^{2}P$ sú lineárne nezávislé. Keby totiž boli lineárne závislé, museli by mať roviny ${}^{1x}P_2$, ${}^{2x}P_2$ spoločný aspoň jeden bod, čo odporuje vete 4. Potom roviny ${}^{1x}P_2$, ${}^{2x}P_2$ určujú päťrozmerný lineárny priestor ${}^{1x2x}P_5$, ktorý — podľa dôsledku k vete 5 — leží celý na nadploche V_7^3.

Dôkaz pre priestor ${}^{1y2y}P_5$ je obdobný predchádzajúcemu.

Roviny systému H sprostredkujú medzi rovinami ${}^{1x}P_2$, ${}^{2x}P_2$ kolineáciu ${}^{x}\mathfrak{K}$. Nech táto kolineácia priraďuje trom lineárne nezávislým bodom ${}^{1}X$, ${}^{1}X'$, ${}^{1}X''$ roviny ${}^{1x}P_2$ body ${}^{2}X$, ${}^{2}X'$, ${}^{2}X''$ roviny ${}^{2x}P_2$. Potom dvojice bodov ${}^{1}X$, ${}^{2}X$; ${}^{1}X'$, ${}^{2}X'$; ${}^{1}X''$, ${}^{2}X''$ určujú tri roviny ${}^{y}P_2$, ${}^{y'}P_2$, ${}^{y''}P_2$ systému H, ktoré nimi prechádzajú. Nech $x \equiv {}^{1}X{}^{2}X$, $x' \equiv {}^{1}X'{}^{2}X'$, $x'' \equiv {}^{1}X''{}^{2}X''$; vtedy priamky x, x', x'' ležia celé v priestore ${}^{1x2x}P_5$.

Roviny systému Ξ sprostredkujú naopak kolineáciu ${}^{y}\mathfrak{K}$ medzi rovinami systému H. V tejto kolineácii si odpovedajú navzájom priamky x, x', x''. Potom každému bodu X priamky x priraďuje táto kolineácia bod X' priamky x' a bod X'' priamky x''. Body X, X', X'' určujú rovinu ${}^{x}P_2$ systému Ξ, ktorá potom tiež leží celá v priestore ${}^{1x2x}P_5$. Z toho vidieť, že priestor ${}^{1x2x}P_5$ obsahuje celý jednoparametrický systém ${}^{1x2x}\Xi$ rovín systému Ξ.

Priestor ${}^{1x2x}P_5$ neobsahuje okrem bodov rovín systému ${}^{1x2x}\Xi$ žiadne iné body variety ${}^{x}V$. Skutočne, nech rovina ${}^{3x}P_2$ systému Ξ je určená bodom ${}^{3}X$ (${}^{3}x^0$, ${}^{3}x^1$, ${}^{3}x^2$, 0, 0, 0, 0, 0, 0). Ak rovina ${}^{3x}P_2$ má prislúchať systému ${}^{1x2x}\Xi$, musí byť bod ${}^{3}X$ lineárne závislý od bodov ${}^{1}X$, ${}^{2}X$, čiže musí

$$\begin{vmatrix} {}^{1}x^0 & {}^{1}x^1 & {}^{1}x^2 \\ {}^{2}x^0 & {}^{2}x^1 & {}^{2}x^2 \\ {}^{3}x^0 & {}^{3}x^1 & {}^{3}x^2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (8)$$

Ak relácia (8) neplatí, sú všetky body ${}^{1}X$, ${}^{1}X'$, ${}^{1}X''$; ${}^{2}X$, ${}^{2}X'$, ${}^{2}X''$; ${}^{3}X$, ${}^{3}X'$, ${}^{3}X''$ lineárne nezávislé, a teda žiaden bod roviny ${}^{3x}P_2$ neleží v priestore ${}^{1x2x}P_5$. Naozaj

$$\begin{vmatrix}
{}^{1}x^0 & {}^{1}x^1 & {}^{1}x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & {}^{1}x^0 & {}^{1}x^1 & {}^{1}x^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{1}x^0 & {}^{1}x^1 & {}^{1}x^2 \\
{}^{2}x^0 & {}^{2}x^1 & {}^{2}x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & {}^{2}x^0 & {}^{2}x^1 & {}^{2}x^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{2}x^0 & {}^{2}x^1 & {}^{2}x^2 \\
{}^{3}x^0 & {}^{3}x^1 & {}^{3}x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & {}^{3}x^0 & {}^{3}x^1 & {}^{3}x^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{3}x^0 & {}^{3}x^1 & {}^{3}x^2
\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix}
{}^{1}x^0 & {}^{1}x^1 & {}^{1}x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
{}^{2}x^0 & {}^{2}x^1 & {}^{2}x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
{}^{3}x^0 & {}^{3}x^1 & {}^{3}x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & {}^{1}x^0 & {}^{1}x^1 & {}^{1}x^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & {}^{2}x^0 & {}^{2}x^1 & {}^{2}x^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & {}^{3}x^0 & {}^{3}x^1 & {}^{3}x^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{1}x^0 & {}^{1}x^1 & {}^{1}x^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{2}x^0 & {}^{2}x^1 & {}^{2}x^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{3}x^0 & {}^{3}x^1 & {}^{3}x^2
\end{vmatrix} = \left[\begin{vmatrix} {}^{1}x^0 & {}^{1}x^1 & {}^{1}x^2 \\ {}^{2}x^0 & {}^{2}x^1 & {}^{2}x^2 \\ {}^{3}x^0 & {}^{3}x^1 & {}^{3}x^2 \end{vmatrix}\right]^3 \neq 0$$

Z tohto tvrdenia vyplýva, že každá rovina ${}^{y}P_2$ má s priestorom ${}^{1x2x}P_5$ spoločnú práve jednu priamku, ktorá priraďuje navzájom body rovín systému ${}^{1x2x}\Xi$ v kolineácii ${}^{x}\mathfrak{K}$.

Celkom analogicky môžeme uvažovať pri priestoroch ${}^{1y2y}P_5$ určených dvoma od seba rôznymi rovinami ${}^{1y}P_2$, ${}^{2y}P_2$.

Môžeme teda vysloviť

Vetu 7. *Každý priestor ${}^{1x2x}P_5$ (${}^{1y2y}P_5$) obsahuje z variety ${}^{x}V$ práve len body rovín systému ${}^{1x2x}\Xi$ (${}^{1y2y}H$).*

Veta 8. *Dva od seba rôzne priestory ${}^{1x2x}P_5$, ${}^{3x4x}P_5$ (${}^{1y2y}P_5$, ${}^{3y4y}P_5$) majú spoločnú práve jednu rovinu ${}^{x}P_2({}^{y}P_2)$. Dva ľubovoľné priestory ${}^{1x2x}P_5$, ${}^{1y2y}P_5$ majú spoločný trojrozmerný lineárny priestor ${}^{xy}P_3$, ktorý obsahuje priamkovú kvadriku variety ${}^{x}V$.*

Dôkaz. Nech roviny ${}^{ix}P_2$ ($i = 1, 2, 3, 4$) sú určené bodmi ${}^{i}X$ (${}^{i}x^0$, ${}^{i}x^1$, ${}^{i}x^2$, 0, 0, 0, 0, 0, 0). Body ${}^{1}X$, ${}^{2}X$, ${}^{3}X$, ${}^{4}X$ sú lineárne závislé a existujú také čísla ${}^{i}\lambda$, že platí

$${}^{1}\lambda{}^{1}X + {}^{2}\lambda{}^{2}X = {}^{3}\lambda{}^{3}X + {}^{4}\lambda{}^{4}X. \qquad (9)$$

Čísla ${}^{1}\lambda$, ${}^{2}\lambda$ nemôžu byť súčasne rovné nule, pretože potom by body ${}^{3}X$, ${}^{4}X$

splynuli a neurčovali by priestor ${}^{3x4x}P_5$. Tak isto nemôžu byť súčasne rovné nule čísla ${}^{3}\lambda, {}^{4}\lambda$. Potom bod $X = {}^{1}\lambda{}^{1}X + {}^{2}\lambda{}^{2}X = {}^{3}\lambda{}^{3}X + {}^{4}\lambda{}^{4}X$ určuje rovinu ${}^{x}P_2$ spoločnú obidvom priestorom ${}^{1x2x}P_5, {}^{3x4x}P_5$.

Jeden z bodov ${}^{1}X, {}^{2}X$ nesplýva s bodom X; nech to je bod ${}^{1}X$; potom priestor ${}^{1x2x}P_5$ splýva s priestorom ${}^{1xx}P_5$. Tak isto jeden z bodov ${}^{3}X, {}^{4}X$ nesplýva s bodom X; nech to je bod ${}^{3}X$; potom priestor ${}^{3x4x}P_5$ splýva s priestorom ${}^{3xx}P_5$. Predpokladajme, že priestory ${}^{1xx}P_5, {}^{3xx}P_5$ majú spoločný bod A, ktorý neleží v rovine ${}^{x}P_2$. Potom bod A vznikol ako lineárna kombinácia niektorých bodov $X, {}^{1}X$ z rovín ${}^{x}P_2, {}^{1x}P_2$, ako aj niektorých bodov $\overline{X}, {}^{3}X$ rovín ${}^{x}P_2, {}^{3x}P_2$. Potom body $X, \overline{X}, {}^{1}X, {}^{3}X$ musia byť lineárne závislé a bod ${}^{3}X$ musí ležať v priestore ${}^{1xx}P_5$, čo nie je možné. Tým je prvá časť vety dokázaná (pre priestory ${}^{1y2y}P_5, {}^{3y4y}P_5$ vykonáme dôkaz obdobne).

Majme teraz dva priestory ${}^{1x2x}P_5, {}^{1y2y}P_5$. Roviny ${}^{1y}P_2, {}^{2y}P_2$ majú s priestorom ${}^{1x2x}P_5$ spoločné dve priamky ${}^{1}P_1, {}^{2}P_1$, ktoré nemajú žiaden spoločný bod (v opačnom prípade by museli aj roviny ${}^{1y}P_2, {}^{2y}P_2$ mať spoločný bod). Priamkami ${}^{1}P_1, {}^{2}P_1$ je určený trojrozmerný lineárny priestor ${}^{xy}P_3$, ktorý zrejme celý prislúcha obom uvažovaným priestorom.

Dokážeme, že priestory ${}^{1x2x}P_5, {}^{1y2y}P_5$ nemajú okrem priestoru ${}^{xy}P_3$ žiaden bod spoločný. Predpokladajme naopak, že uvažované priestory majú spoločný štvorrozmerný lineárny priestor ${}^{xy}P_4$. Zvoľme si teraz ľubovoľný priestor ${}^{1x3x}P_5$ rôzny od priestoru ${}^{1x2x}P_5$. Tento priestor má s priestorom ${}^{1y2y}P_5$ spoločný priestor ${}^{x'y}P_3$, v ktorom sú priamky variety ${}^{x}V$. Tieto priamky, pretože ležia aj v priestore ${}^{1y2y}P_5$, musia pretínať jeho nadrovinu ${}^{xy}P_4$ v bodoch, ktoré by boli spoločné obom priestorom ${}^{1x2x}P_5$ a ${}^{1x3x}P_5$, čo nie je možné podľa prvej časti vety.

Priestor ${}^{xy}P_3$ obsahuje priamky rovín systému ${}^{1x2x}\Xi$, ako aj priamky rovín systému ${}^{1y2y}H$. Dostávame tak dva systémy priamok. Ľubovoľné dve priamky jedného systému sú zrejme mimobežné. Ľahko skonštatujeme, že naopak ľubovoľné dve priamky rôznych systémov sú rôznobežné. Takúto vlastnosť majú len dva systémy priamok kvadriky.

Tým je veta úplne dokázaná.

Dôsledok. Každým bodom A nadplochy V_7^3, ktorý neprislúcha variete ${}^{x}V$, prechádza práve jeden priestor ${}^{1x2x}P_5$ a tak isto práve jeden priestor ${}^{1y2y}P_5$. Naozaj, nech bod A má súradnice $(a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8)$. Roviny ${}^{1x}P_2$, ${}^{2x}P_2$ určíme bodmi ${}^{1}X(a^0, a^1, a^2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ a ${}^{2}X(a^3, a^4, a^5, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Pretože bod A leží na nadploche V_7^3, existujú také dve čísla λ, μ, že platí $\lambda a^0 + \mu a^3 = a^6$, $\lambda a^1 + \mu a^4 = a^7$, $\lambda a^2 + \mu a^5 = a^8$. Bod A dostaneme potom ako lineárnu kombináciu bodov ${}^{1}X(a^0, a^1, a^2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, ${}^{2}X'(0, 0, 0, a^3, a^4, a^5, 0, 0, 0)$, ${}^{1}X''(0, 0, 0, 0, 0, 0, a^0, a^1, a^2)$, ${}^{2}X''(0, 0, 0, 0, 0, 0, a^3, a^4, a^5)$, ktoré všetky ležia v priestore ${}^{1x2x}P_5$. Podobne dokážeme tvrdenie pre priestor ${}^{1y2y}P_5$. Nemôžu existovať dva rôzne priestory ${}^{1x2x}P_5, {}^{3x4x}P_5$, ktoré by obsahovali bod A, pretože také dva priestory môžu obsahovať len rovinu systému Ξ.

2. V tomto odseku sa budeme podrobnejšie zaoberať singulárnymi kolineáciami.

Nech X je singulárna kolineácia hodnosti 2. Rovnice tejto kolineácie nech sú:

$$\begin{aligned} \varrho x_1' &= x_{11}x_1 + x_{12}x_2 + x_{13}x_3 \\ \varrho x_2' &= x_{21}x_1 + x_{22}x_2 + x_{23}x_3 \\ \varrho x_3' &= x_{31}x_1 + x_{32}x_2 + x_{33}x_3 \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{10a, b}$$

Zrejme musí platiť vzťah

$$\lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' + \lambda_3 x_3' = 0 \tag{11}$$

pre ľubovoľný bod (x_1, x_2, x_3). Žiaden podstatne iný lineárny vzťah medzi súradnicami x_1', x_2', x_3' nemôže existovať, lebo potom by determinant (10b) mal hodnosť 1. Z toho vyplýva, že bodom roviny P_2 zodpovedajú body priamky o o rovnici (11). Výnimku tvorí bod S, ktorého súradnice vyhovujú rovniciam:

$$\begin{aligned} x_{11}x_1 + x_{12}x_2 + x_{13}x_3 &= 0, \\ x_{21}x_1 + x_{22}x_2 + x_{23}x_3 &= 0, \\ x_{31}x_1 + x_{32}x_2 + x_{33}x_3 &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Takýto bod existuje práve jeden a kolineácia $\mathfrak{X}$ mu nepriraďuje žiaden bod.

Potom môžu nastať tieto prípady:

1. singulárna kolineácia 1. druhu, keď bod S neleží na priamke o,
2. singulárna kolineácia 2. druhu, keď bod S leží na priamke o.

Nech teraz $\mathfrak{X}$ je singulárna kolineácia 1. druhu. Zvoľme v rovine P_2 súradnicový systém tak, aby bod $O_3(0, 0, 1)$ bol bodom S a body $O_1(1, 0, 0), O_2(0, 1, 0)$ nech ležia na priamke o. Rovnice kolineácie nadobudnú potom tvar

$$\begin{aligned} \varrho x_1' &= x_{11}x_1 + x_{12}x_2 \\ \varrho x_2' &= x_{21}x_1 + x_{22}x_2 \\ \varrho x_3' &= 0 \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{13}$$

Rovnice (13) definujú na priamke o regulárnu projektivitu π; podľa toho, či projektivita π má 2,1 alebo žiaden samodružný bod, alebo je identitou, budeme hovoriť o singulárnej kolineácii druhu 1a, 1b, 1c, 1d. V každom prípade priraďuje táto kolineácia bodom priamky o rovnici $u_1x_1 + u_2x_2 = 0$ (s výnimkou bodu O_3) bod $x_1' = x_{11}u_2 - x_{12}u_1$, $x_2' = x_{21}u_2 - x_{22}u_1$, $x_3' = 0$.

Nech $\mathfrak{X}$ je singulárna kolineácia 2. druhu. Súradnicový systém zvoľme opäť tak, že priamka o má rovnicu $x_3 = 0$ a bod S nech splýva napr. s bodom $O_1(1, 0, 0)$. Potom rovnice kolineácie $\mathfrak{X}$ nadobudnú tvar

$$\begin{aligned} \varrho x_1' &= x_{12}x_2 + x_{13}x_3, \\ \varrho x_2' &= x_{22}x_2 + x_{23}x_3, \\ \varrho x_3' &= 0, \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{22} & x_{23} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{14}$$

Kolineácia $\mathfrak{X}$ definuje regulárnu projektivitu medzi zväzkom priamok so stredom v bode O_1 a bodovým radom na priamke $x_3 = 0$. Všetkým bodom jednej priamky zväzku (s výnimkou bodu O_1) priraďuje jeden bod priamky o.

Môžu nastať dva prípady: 2a. Bodom priamky $x_3 = 0$ neodpovedá bod O_1. 2b. Bodom priamky $x_3 = 0$ odpovedá bod O_1. Nutná a postačujúca podmienka pre to, aby nastal prípad 2b je, aby v rovniciach (14) $x_{22} = 0$.

Dohromady máme teda 6 typov singulárnych kolineácií hodnosti 2.

Singulárna kolineácia $\mathfrak{X}$ hodnosti 1 nepriraďuje žiaden bod bodom priamky o o rovnici

$$x_{11}x_1 + x_{12}x_2 + x_{13}x_3 = x_{21}x_1 + x_{22}x_2 + x_{23}x_3 = \\ = x_{31}x_1 + x_{32}x_2 + x_{33}x_3 = 0. \tag{15}$$

Všetkým ostatným bodom priraďuje jeden bod S. Existujú potom dva druhy singulárnych kolineácií hodnosti 1: singulárne kolineácie 3. druhu, keď bod S neleží na priamke o a singulárne kolineácie 4. druhu, keď bod S leží na priamke o.

3. Vyšetrujme také zväzky kolineácií, z ktorých jedna ($\mathfrak{E}$) je identitou a druhá ($\mathfrak{X}$) je singulárnou kolineáciou.

1a. Nech kolineácia $\mathfrak{X}$ nepriraďuje bodu S žiaden bod a S_1, S_2 sú samodružné body projektivity na priamke o. Tento zväzok obsahuje len také regulárne kolineácie, ktoré majú samodružné body S, S_1, S_2 a ďalšie dve singulárne kolineácie typu 1a, kde bodom S sú body S_1, S_2 a priamkami o protiľahlé strany trojuholníka SS_1S_2.

1b. Nech S_1 je jediný samodružný bod projektivity na priamke o. Potom body S, S_1 sú jediné samodružné body kolineácií zväzku. Priamka o a spojnica $S\,S_1$ sú jediné samodružné priamky kolineácií zväzku. Zväzok obsahuje ešte jedinú singulárnu kolineáciu typu 2a.

1c. Všetky kolineácie zväzku obsahujú jediný samodružný bod S a jedinú samodružnú priamku o. Zväzok neobsahuje žiadnu ďalšiu singulárnu kolineáciu.

1d. Zväzok obsahuje perspektívne kolineácie o strede S a osi o. Obsahuje aj ďalšiu singulárnu kolineáciu hodnosti 1 3. druhu.

2a. Pozri 1b.

2b. Kolineácie zväzku majú jediný samodružný bod S a jedinú samodružnú priamku o, ktorá ním prechádza. Zväzok neobsahuje žiadne ďalšie singulárne kolineácie.

3. Pozri 1d.

4. Zväzok obsahuje elácie o strede S a osi o, ktorá ním prechádza. Zväzok neobsahuje taktiež žiadnu ďalšiu singulárnu kolineáciu.

Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že kolineácie zväzku, ktorý obsahuje identickú kolineáciu, sú rovnakého typu (s výnimkou singulárnych kolineácií a identickej kolineácie).

Veta 9. *Do bodov roviny* ${}^xP_2$ *sa zobrazujú tie singulárne kolineácie hodnosti* 1, *ktoré majú spoločnú priamku o; do bodov roviny* ${}^yP_2$ *sa zobrazujú tie singulárne kolineácie hodnosti* 1, *ktoré majú spoločný bod S.*

Dôkaz. Body roviny ${}^xP_2$ majú súradnice (ϱx^0, ϱx^1, ϱx^2, $\varrho' x^0$, $\varrho' x^1$, $\varrho' x^2$, $\varrho'' x^0$, $\varrho'' x^1$, $\varrho'' x^2$). Rovnica priamky o je potom

$$\varrho x^0 x_1 + \varrho x^1 x_2 + \varrho x^2 x_3 = \varrho' x^0 x_1 + \varrho' x^1 x_2 + \varrho' x^2 x_3 = \\ = \varrho'' x^0 x_1 + \varrho'' x^1 x_2 + \varrho'' x^2 x_3 = 0.$$

Priamka o zrejme vôbec nezávisí od voľby parametrov ϱ, ϱ', ϱ'', ale iba od voľby súradníc x^0, x^1, x^2, ktoré sú zároveň jej priamkovými súradnicami; parametre ϱ, ϱ', ϱ'' udávajú súradnice bodu S v rovine P_2.

Body roviny ${}^yP_2$ majú súradnice ($\varkappa y^0$, $\varkappa' y^0$, $\varkappa'' y^0$, $\varkappa y^3$, $\varkappa' y^3$, $\varkappa'' y^3$, $\varkappa y^6$, $\varkappa' y^6$, $\varkappa'' y^6$). Súradnice bodu S sú potom y^0, y^3, y^6 a nezávisia od voľby parametrov $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$. Parametre $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ sú priamkovými súradnicami priamky o.

Poznámka 3. Podľa poznámky 2 k vete 4 kolineácia ${}^x\mathfrak{K}$ medzi rovinami ${}^xP_2$ priraďuje navzájom tie kolineácie, ktoré majú spoločný bod S. Naopak, kolineácia ${}^y\mathfrak{K}$ medzi rovinami ${}^yP_2$ priraďuje navzájom tie kolineácie, ktoré majú spoločnú priamku o.

Uvažujme o zväzkoch kolineácií určených dvoma singulárnymi kolineáciami hodnosti 1.

a) Dve kolineácie ${}^1\mathfrak{X}$, ${}^2\mathfrak{X}$ jednej roviny ${}^xP_2$. Spojnica ${}^1X\,{}^2X$ celá leží v rovine ${}^xP_2$, a teda všetky kolineácie zväzku sú singulárne hodnosti 1. Majú spoločnú priamku o a ich body S vypĺňajú jednu priamku.

b) Dve kolineácie ${}^1\mathfrak{Y}$, ${}^2\mathfrak{Y}$ jednej roviny ${}^yP_2$. Spojnica ${}^1Y\,{}^2Y$ celá leží v rovine ${}^yP_2$, a teda všetky kolineácie zväzku sú singulárne hodnosti 1. Majú spoločný bod S a ich priamky o tvoria zväzok.

c) Dve kolineácie ${}^1\mathfrak{X}$, ${}^2\mathfrak{X}$ z dvoch rovín ${}^{1x}P_2$, ${}^{2x}P_2$. Tu môžu nastať dva prípady. Ak body ${}^1X$, ${}^2X$ ležia v jednej rovine ${}^yP_2$, dostávame prípad b). Ak body ${}^1X$, ${}^2X$ neležia v jednej rovine ${}^yP_2$, môžeme ich pokladať aj za dva body dvoch rôznych rovín ${}^{1y}P_2$, ${}^{2y}P_2$. Podľa dôsledku k vete 5 celá spojnica ${}^1X\,{}^2X$ leží na nadploche V_7^3 a obsahuje, okrem kolineácií ${}^1\mathfrak{X}$, ${}^2\mathfrak{X}$, singulárne kolineácie hodnosti 2. Pritom bod S týchto kolineácií je v priesečníku priamok ${}^1o$, ${}^2o$ kolineácií ${}^1\mathfrak{X}$, ${}^2\mathfrak{X}$ a priamka o v spojnici bodov ${}^1S$, ${}^2S$.

Každá z kolineácií zväzku indukuje na priamke o projektivitu. Všetky tieto projektivity tvoria zväzok (pozri [1]), určený dvoma singulárnymi projektivitami (jedna má singulárny bod ${}^1S$, druhá ${}^2S$). Skutočne, označme priesečníky priamok ${}^1o$, ${}^2o$ s priamkou o písmenami ${}^1O$, ${}^2O$. Kolineácie zväzku ${}^1\mathfrak{X}$, ${}^2\mathfrak{X}$ priraďujú bodu ${}^1O$ bod ${}^2S$ a bodu ${}^2O$ bod ${}^1S$. Zvoľme na priamke o súradnicový systém tak, že body ${}^1O$, ${}^2O$ majú súradnice (1,0), (0,1). Body ${}^1S$, ${}^2S$ nech majú súradnice (${}^1s_1$, ${}^1s_2$), (${}^2s_1$, ${}^2s_2$). Potom rovnice projektivít na priamke o určených pármi ${}^1O$, ${}^2S$; ${}^2O$, ${}^1S$ sú:

$$\varrho x_1' = \lambda_1 {}^2s_1 x_1 + \lambda_2 {}^1s_1 x_2, \qquad \varrho x_2' = \lambda_1 {}^2s_2 x_1 + \lambda_2 {}^1s_2 x_2.$$

To sú však rovnice zväzku projektivít určeného singulárnymi projektivitami

$$\varrho x_1' = {}^2s_1 x_1, \quad \varrho x_2' = {}^2s_2 x_1 \quad \text{a} \quad \varrho x_1' = {}^1s_1 x_2, \quad \varrho x_2' = {}^1s_2 x_2.$$

Z vety 7 a predchádzajúcich úvah vyplýva, že priestor ${}^{1x^2x}P_5$ obsahuje tieto singulárne kolineácie: singulárne kolineácie hodnosti 2 s pevným singulárnym bodom S a singulárne kolineácie hodnosti 1 so singulárnymi priamkami prechádzajúcimi bodom S (roviny systému ${}^{1x^2x}\Xi$).

Podobne priestor ${}^{1y^2y}P_5$ obsahuje tieto singulárne kolineácie: singulárne kolineácie hodnosti 2 s pevnou priamkou o a singulárne kolineácie hodnosti 1 so singulárnymi bodmi na priamke o (roviny systému ${}^{1y^2y}H$).

LITERATÚRA

1. Medek V., Lineárne systémy projektívnych príbuzností na priamke, Matematicko-fyzikálny časopis VI, č. 2, SAV, 1956, 98—108.

Došlo 22. 5. 1956.

НЕКОТОРЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНЫХ КОЛЛИНЕАЦИЙ

ВАЦЛАВ МЕДЕК

Выводы

Автор забывается отображением коллинеации проективной плоскости P_2 на проективное пространство P_8 размерности 8. Сингулярные коллинеации отображены на гиперповерхность V_7^3. Пучком коллинеаций понимается система коллинеации определенных уравнением (5). Основное свойство отображения выраженно.

Теоремой 3. Коллинеации $\mathfrak{X}$ с матрицами (x_{ij}) ранга 1 отображаются на многообразие ${}^xV$, порожденное двумя двухпараметрическими системами плоскостей.

Точки многообразия ${}^xV$ являются двойными точками гиперповерхности V_7^3. Гиперповерхность V_7^3 содержит пятиразмерные линейные подпространства. В втором и третьем абзаце этой статьи иселедованы различные типы сингулярных коллинеаций и их отображения.

EINIGE LINEARE SYSTEME VON SINGULÄREN KOLLINEATIONEN

VÁCLAV MEDEK

Zusammenfassung

Der Verfasser bildet die Kollineationen der projektiven Ebene P_2 auf einen projektiven Raum P_8 der Dimension 8 ab. Singuläre Kollineationen bilden sich dann auf eine Hyperfläche V_7^3 ab. Unter einem Büschel von Kollineationen versteht man ein System von

Kollineationen, welche durch die Gleichungen (5) bestimmt sind. Die Grundeigenschaft der Abbildung ist durch

Satz 3. ausgedrückt: *Kollineationen $\mathfrak{X}$, für welche Matrix (x_{ij}) den Rang ${}^xh = 1$ hat, bilden sich auf eine Mannigfaltigkeit ${}^xV$ ab, welche durch zwei zweiparametrige Systeme von Ebenen erzeugt ist.*

Die Punkte der Mannigfaltigkeit ${}^xV$ sind Doppelpunkte der Hyperfläche V_7^3. Auf der Hyperfläche V_7^3 gibt es fünfdimensionale lineare Unterräume. Im zweiten und dritten Abschnitt sind verschiedene Arten von singulären Kollineationen und ihre Abbildung untersucht.