MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, VII, 2 — 1957

CENTRUM NEKONEČNE DISTRIBUTÍVNYCH SVÄZOV

JÁN JAKUBÍK
Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie Vysokej školy technickej v Košiciach

Nech S je sväz s neprázdnym centrom C. Je známe, že C je podsväz sväzu S (pozri [1], kap. II, veta 9). Platí teda:

$$x_i \in C, \quad i = 1, \ldots, n \Rightarrow \cap\, x_i \in C \tag{1}$$

a duálne.

Naskytuje sa otázka, či sa implikácia (1) dá rozšíriť na nekonečne mnoho prvkov centra. Podrobnejšie povedané: treba vyšetriť, či pre sväzy platí tvrdenie:

(A) *Nech $\{x_i\}$ je podmnožina centra C sväzu S, nech vo sväze S existujú prvky $a = \cap\, x_i$, $b = \cup\, x_i$. Potom $a, b \in C$.*

Ak pre sväz S platí tvrdenie (A), hovoríme, že centrum C je úplným podsväzom vo sväze S (pritom C nemusí byť úplný sväz, ak sväz S nie je úplný).

Cieľom tejto poznámky je vyšetriť platnosť tvrdenia (A) pre všeobecné sväzy a pre nekonečne distributívne sväzy. Ako dôsledok dostaneme vetu, týkajúcu sa rozkladu nekonečne distributívneho sväzu na priamy súčin.

Veta 1. *Centrum nekonečne distributívneho úplného sväzu S je úplným podsväzom vo sväze S.*

Dôkaz. Nech $\{x_i\}$ je neprázdna podmnožina centra C nekonečne distributívneho úplného sväzu S. Označme $\cap\, x_i = a$, $\cup\, x_i' = b$.[1] Nech 0, resp. 1 je najmenší, resp. najväčší prvok v S. Platí $x_i \cup x_i' = 1$, $x_i' \leq b$, teda $x_i \cup b = 1$. Z nekonečnej distributívnosti dostávame

$$a \cup b = (\cap\, x_i) \cup b = \cap\, (x_i \cup b) = 1.$$

Duálnym postupom sa dokáže $a \cap b = 0$. Teda a, b sú prvky centra sväzu S (pozri [1], kap. V § 5).[2]

[1] Ak $x \in S$, označujeme znakom x' komplement prvku x vo sväze S (ak existuje). Prvok centra má zrejme jediný komplement.

[2] M. Kolibiar mi oznámil, že sa veta 1 dá zovšeobecniť na relatívne úplné nekonečne distributívne sväzy (bez prvkov 0, 1), pričom namiesto centra C uvažujeme o množine $C^* \subset S$ s touto vlastnosťou: $x \in C^*$ vtedy a len vtedy, keď zo vzťahu $x \in \langle a, b\rangle \subset S$ vyplýva, že prvok x má v intervale $\langle a, b\rangle$ relatívny komplement. Dôkaz zovšeobecnenej vety by sa vykonal na základe výsledkov práce [4].

Príklad 1. Nech S je množina všetkých funkcií s oborom definície $J = \langle 0,1\rangle$, ktoré nadobúdajú len hodnoty 0, 1. Nech je množina S obvyklým spôsobom čiastočne usporiadaná ($f \leq g$, ak pre každé $x \in J$ $f(x) \leq g(x)$); zrejme je S distributívny sväz. Ak $f, g \in S$ a ak nerovnosť $f(x) \neq g(x)$ platí najviac v konečnom počte bodov $x \in J$, píšeme $f \sim g$. Nech $f_0(f_1)$ je najmenší (najväčší) prvok v S. Nech S_0 je podmnožina množiny S, ktorá obsahuje len funkcie: 1. f_0, 2. f_1, 3. f_2, $f_2(x) = 0$ pre $x \in \langle 0, \frac{1}{2}\rangle$, $f_2(x) = 1$ pre $x \in (\frac{1}{2}, 1\rangle$, 4. všetky funkcie $f \in S$, pre ktoré platí $f \sim f_i$, pričom i je rovné niektorému z čísel 0, 1, 2. Ľahko sa zistí, že S_0 je podsväzom sväzu S; teda S_0 je distributívny sväz.

Nech S_1 je množina všetkých prvkov $f \in S_0$, pre ktoré platí $f \sim f_0$, $f < f_2$. Každý z prvkov $f \in S_1$ má komplement v S_0, teda patrí do centra C sväzu S_0. Platí $\cup\, f (f \in S_1) = f_2$. Prvok f_2 však nemá vo sväze S_0 komplement, teda nepatrí do centra C. Z toho vyplýva:

Veta 2. *Distributívne sväzy vo všeobecnosti nesplňujú tvrdenie* (A).

Poznámka. Nenašiel som príklad úplného distributívneho sväzu, ktorý by nesplňoval tvrdenie (A).

Príklad 2. Nech S je množina všetkých funkcií, definovaných na intervale $J = \langle 0, 1\rangle$, nadobúdajúcich len hodnoty 0, 1, 2, s obvyklým čiastočným usporiadaním. S je úplný sväz; sväzové operácie na S označíme (pre $\{f_i\} \subset S$) $\wedge f_i$, $\vee f_i$. Ak $a, b \in S$ a ak nerovnosť $a(x) \neq b(x)$ platí najviac v konečnom počte bodov $x \in J$, pričom v týchto bodoch je $a(x) \in \{0, 2\}$, $b(x) \in \{0, 2\}$, potom píšeme $a \sim b$. Nech $f_0(f_1)$ je najmenší (najväčší) prvok v S.

Nech S_0 je podmnožina množiny S, obsahujúca len tieto funkcie:

1. všetky funkcie z množiny S, nadobúdajúce len hodnoty 0, 2 (množinu všetkých týchto funkcií označme S_{01})

2. g

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle 0, \frac{1}{3}\rangle \\ 1 & x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ 2 & x \in \langle \frac{2}{3}, 1\rangle \end{cases}$$

3. všetky funkcie $f \in S$, pre ktoré platí $f \sim g$ (množinu týchto funkcií označme S_{02}).

Ak $\{f_i\} \subset S_0$ a ak (vzhľadom na čiastočne usporiadanú množinu S_0) existuje supremum, resp. infimum množiny $\{f_i\}$, označíme tieto prvky znakmi $\cup\, f_i$, resp. $\cap\, f_i$. Ak $\{f_i\} \subset S_0$ a pritom $\vee f_i \in S_0$, zrejme platí $\vee f_i = \cup\, f_i$ (a duálne). Dokážeme, že S_0 je úplný sväz (z postupu bude zrejmé, že S_0 nie je podsväzom vo sväze S). Ľahko sa zistí, že na to stačí dokázať tvrdenia:

a) ak $\{f_i\} \subset S_{01}$, existuje $\cup\, f_i$,

b) ak $\{f_i\} \subset S_{02}$, existuje $\cup\, f_i$,

c) ak $f_1 \in S_{01}$, $f_2 \in S_{02}$, existuje $f_1 \cup f_2$

a tvrdenia duálne k a), b), c).

Keďže zo vzťahu $\{f_i\} \subset S_{01}$ vyplýva $\vee f_i \in S_0$, platí a). Pre $f \in S_{02}$ označme znakom f^* funkciu z množiny S_{01}, definovanú takto: ak $f(x) = 0$ ($f(x) = 1$ alebo $f(x) = 2$), položíme $f^*(x) = 0$ ($f^*(x) = 2$). Nech $Q = \{f_i\} \subset S_{02}$ a nech J_1 je množina tých $x \in \langle 0, \frac{1}{3} \rangle$, pre ktoré existuje $f_i \in Q$, $f_i(x) = 2$. Ak množina J_1 je konečná, existuje $\cup f_i = \vee f_i \in S_{02}$. Ak množina J_1 je nekonečná, neexistuje žiaden prvok $f \in S_{02}$, pre ktorý by bolo $f \geqq f_i$ pre každé $f_i \in Q$. Ak je však pre $f \in S_{01}$ splnený vzťah $f \geqq f_i$ pre každé $f_i \in Q$, musí byť zároveň $f \geqq f_i^*$, takže $\cup f_i = \vee f_i^*$. Tým je dokázané b). Nech $f_1 \in S_{01}$, $f_2 \in S_{02}$, nech J_2 je množina tých x, pre ktoré $f_1(x) = 2 \neq f_2(x)$. Ak je J_2 konečná množina, je $f_1 \vee f_2 \in S_0$. Ak je J_2 nekonečná množina, dokáže sa podobnou úvahou ako v predošlom, že platí $f_1 \cup f_2 = f_1 \vee f_2^*$. Tým je dokázané c). Analogicky sa dokážu duálne tvrdenia. Označme $J_3 = \langle 0, \frac{1}{3} \rangle \cup \langle \frac{2}{3}, 1 \rangle$ a definujme funkcie f_y (pre každé $y \in J_3$), a funkcie $f_a, f_b, f_c \in S_0$ takto:

$$f_y(x) = \begin{cases} 2 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}, \qquad f_a(x) = \begin{cases} 2 & x \in J_3 \\ 0 & x \notin J_3 \end{cases},$$

$$f_b(x) = \begin{cases} 2 & x \in \langle \frac{2}{3}, 1 \rangle \\ 0 & x \notin \langle \frac{2}{3}, 1 \rangle \end{cases}, \qquad f_c(x) = \begin{cases} 2 & x \in \langle 0, \frac{1}{3} \rangle \\ 0 & x \notin \langle 0, \frac{1}{3} \rangle \end{cases}.$$

Ľahko sa zistí, že všetky prvky f_y patria do centra C sväzu S_0. Platí $\cup f_y = f_a$. Prvok f_a nie je neutrálny, keďže podsväz S_m sväzu S_0, vytvorený prvkami $, f_c, g$, nie je distributívny. Platí totiž:

$$f_a \cup f_c = f_a \cup g = f_1, \qquad f_a \cap f_c = f_a \cap g = f_b, \qquad f_c \neq g.$$

Teda f_a nie je prvkom centra C. Z toho vyplýva

Veta 3. *Úplné sväzy vo všeobecnosti nesplňujú tvrdenie* (A).

Veta 4. *Nekonečne distributívny úplný sväz S sa dá vyjadriť v tvare*

$$S \sim A \times B, \tag{2}$$

pričom 1. *sväz A sa dá rozložiť na priamy súčin faktorov, z ktorých každý je priamo nerozložiteľný,* 2. *ak sväz B obsahuje viac ako jeden prvok, sväz B je priamo rozložiteľný a každý jeho priamy faktor, obsahujúci viac ako jeden prvok, je priamo rozložiteľný,* 3. *rozklad* (2), *ktorý má vlastnosti* 1. *a* 2. *je jednoznačný.*[3]

Dôkaz. Nech C je centrum úplného a nekonečne distributívneho sväzu S, nech C_0 je množina všetkých atómov vo sväze S, nech $0 (1)$ je najmenší (najväčší) prvok v S. Ak $C_0 = \emptyset$, podmienkam vety zrejme vyhovuje rozklad $S \sim \{0\} \times S$. Predpokladajme, že $C_0 \neq \emptyset$ a označme $a_0 = \cup a (a \in C_0)$. Podľa vety 1 $a_0 \in C$. Nech a_0' je komplement prvku a vo sväze S, $A = \langle 0, a_0 \rangle$, $B = \langle 0, a_0' \rangle$. Platí $S \sim A \times B$. Nech $C_1 (C_2)$ je centrum sväzu $A(B)$. Podľa vety 1 C_1 je úplný podsväz sväzu A, teda C_1 je úplná Boolova algebra. Z konštrukcie sväzu A vyplýva, že Boolova algebra C_1 je atomárna, teda (pozri [1b], str. 240, cvič. 4) C_1 je úplne distributívny sväz. Podľa vety 2, [3] platí

$$A \sim \Pi A_i, \qquad A_1 = \langle 0, a_i \rangle,$$

pričom a_i prebieha celú množinu C_0 (sväzy A_i sú zrejme priamo nerozložiteľné). Ak $a_0' = 0$, tak sväz B obsahuje jediný prvok. Ak $a_0' > 0$, sväz B nemôže mať žiadny priamy faktor B_i, ktorý by bol nerozložiteľný a ktorý by obsahoval viac ako jeden prvok (najväčší prvok b_i sväzu B_i by potom patril do množiny C_0, čo je proti predpokladu). Jednoznačnosť rozkladu (2) s vlastnosťami 1, 2 je z predošlého zrejmá.

Poznámka: Z predošlého príkladu 2 vidieť, že vo vete 4 nemôžeme vynechať predpoklad o nekonečnej distributívnosti sväzu S.

[3] Výraz „priamy súčin" používame v takom zmysle, ako sa v [2] používa výraz „úplný priamy súčin". Znakom $\sim$ označujeme sväzový izomorfizmus.

LITERATÚRA

1. Birkhoff G., Lattice theory, New York 1948 ([1b] Теория структур, Москва 1952).
2. Dubreil-Jacotin M. L., Lesieur L., Croisot R., Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques, Paris 1953. 3. Jakubík J., Прямые разложения вполне дистрибутивных структур, Чехослов. матем. журнал 5 (80), 488–491. 4. Kolibiar M., Тернарная операция в структурах, Чехослов. матем. журнал 6 (81), 318–329.

Došlo 20. 7. 1956.

ЦЕНТР БЕСКОНЕЧНО ДИСТРИБУТИВНЫХ СТРУКТУР

ЯН ЯКУБИК

Выводы

Пусть S — структура, которая имеет непустый центр C. Известно, что C является подструктурой структуры C, т. е.

$$x_i \in C, \quad i = 1, \ldots, n \Rightarrow \cap x_i \in C \tag{1}$$

и дуально.

Возникает вопрос, можно-ли импликацию (1) расширить для случая бесконечного множества $\{x_i\} \subset C$. Определим свойство (A) структуры S как следует:

(A) Если $\{x_i\}$ — непустое подмножество центра C структуры S и если в S существуют элементы $a = \cap x_i$, $b = \cup x_i$, тогда $a, b \in C$.

В заметке доказывается:

1. Бесконечно дистрибутивные структуры имеют свойство (A).
2. Существуют дистрибутивные структуры, которые не имеют свойство (A) (построен пример). Не решен вопрос, могут-ли такие дистрибутивные структуры быть полными.
3. Существуют полные структуры, которые не имеют свойство (A).
4. Бесконечно дистрибутивную полную структуру S можно представить в виде прямого произведения

$$S \sim A \times B \tag{2}$$

где а) структура A разложима в прямое произведение $A \sim \Pi A_i$, в котором каждый прямый множитель A_i не разложим; б) каждый прямый множитель B_i структуры B разложим в прямое произведение $B_i \sim C_i \times D_i$ так что каждая из структур B_i, C_i имеет более одного элемента.

5. Существуют полные структуры, которые не возможно разложить в прямое произведение (1) со свойствами а), б) (т. е. не возможно ,,отделить неразложимые множители от разложимых,,). Тот самый пример как в 3.