MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, VII, 2 — 1957

POZNÁMKA K ROZŠIROVANIU MIERY

IGOR KLUVÁNEK
Katedra matematiky Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave

Táto poznámka sa zaoberá dôkazom dôležitej vety z teórie miery,[1] ktorá hovorí, že pre každú σ-konečnú mieru μ definovanú na nejakom množinovom okruhu $\boldsymbol{R}$ existuje na minimálnom σ-okruhu $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ obsahujúcom $\boldsymbol{R}$ jediná miera $\bar{\mu}$, ktorej hodnoty na okruhu $\boldsymbol{R}$ sa zhodujú s μ. Táto veta sa obvykle dokazuje pomocou vonkajšej miery a pomocou pojmu merateľnosti množiny. Minimálny σ-okruh $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ nad okruhom $\boldsymbol{R}$ je rovný najmenšiemu systému, ktorý obsahuje okruh $\boldsymbol{R}$ a ktorý obsahuje i limitu každej monotónnej postupnosti do neho patriacich množín. Preto sa spomenutá veta dá dokázať i pomocou transfinitnej indukcie, a to tak, že sa rozširuje obor definície funkcie μ o limity monotónnych postupností množín zo systému, na ktorom je funkcia μ práve definovaná[2]. Pritom na množinách, ktoré takto do oboru definície priberáme, hodnota μ sa definuje z požiadavky, aby μ bola spojitá zhora i zdola. Pre Lebesguovu mieru však platí, že pre každú merateľnú množinu E existuje množina $A \subset E$ typu F_σ, pričom miera oboch množín A a E je rovnaká; podobne existuje množina $B \supset E$ typu G_δ rovnakej miery ako E. Je teda nádej, že pri rozširovaní oboru definície miery μ indukciou sa množina hodnôt po niekoľkých krokoch prestane rozširovať a do oboru definície sa ďalej priberajú iba množiny, ktoré sa líšia od doterajších len o množinu miery nula. Je to naozaj tak, ako ukazujú nasledujúce riadky.

Nech X je ľubovoľná neprázdna množina. Systém $\boldsymbol{R}$ podmnožín množiny X je množinová algebra, ak platí:

I. Ak $A \in \boldsymbol{R}$, $B \in \boldsymbol{R}$, tak aj $A \cup B \in \boldsymbol{R}$.

[1] Použité pojmy a označenia z teórie miery sú podľa [3].

[2] Myšlienka transfinitnou indukciou rozšíriť mieru na σ-okruh pochádza od Borela. Touto metódou postupujú citované práce [1], [2], [4], [5], z ktorých [4] nie je u nás prístupná a je známa iba z Math. Rewiews. V týchto prácach je vonkajšia miera, alebo nejaký ekvivalentný pojem použitý pri limitných ordinálnych číslach. V tejto práci je vonkajšia miera nahradená úvahou v dôkaze lemmy 9 a tým, že je táto úvaha urobená už pri druhom kroku, je celý proces indukcie redukovaný na tieto dva kroky.

II. Pre ľubovoľnú množinu $A \in \boldsymbol{R}$ je i $A^* = X - A \in \boldsymbol{R}$.

Mierou budeme rozumieť nezápornú reálnu funkciu μ definovanú na algebre $\boldsymbol{R}$, pričom pre ľubovoľnú postupnosť $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ disjunktných množín z $\boldsymbol{R}$ takú, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \in \boldsymbol{R}$ je $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ a $\mu(X)$ je konečné číslo.

Pre ľubovoľný systém $\boldsymbol{A}$ podmnožín množiny X definujeme systém $\boldsymbol{A}_\sigma$ ako systém takých množín $E \subset X$, pre ktoré existuje rastúca postupnosť $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ množín z $\boldsymbol{A}$, pričom $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Podobne $\boldsymbol{A}_\delta$ znamená systém tých množín $E \subset X$, pre ktoré existuje klesajúca postupnosť $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ množín z $\boldsymbol{A}$ a $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$.

Nech $\boldsymbol{R}$ je algebra. Všimnime si systém $\boldsymbol{R}_\sigma \cup \boldsymbol{R}_\delta$. Zrejmé sú tieto tvrdenia: $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{R}_\sigma$; $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{R}_\delta$. Ak $A \in \boldsymbol{R}_\sigma$, tak $A^* \in \boldsymbol{R}_\delta$; podobne $A \in \boldsymbol{R}_\delta \Rightarrow A^* \in \boldsymbol{R}_\sigma$.

Ak $A_n \in \boldsymbol{R}_\sigma$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$, tak aj $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \boldsymbol{R}_\sigma$; tiež $A_n \in \boldsymbol{R}_\delta$, $n = 1, 2, 3, \ldots \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \boldsymbol{R}_\delta$.

Ak $A \in \boldsymbol{R}_\sigma$, $B \in \boldsymbol{R}_\sigma$, tak i $A \cap B \in \boldsymbol{R}_\sigma$; $A \in \boldsymbol{R}_\delta$, $B \in \boldsymbol{R}_\delta \Rightarrow A \cup B \in \boldsymbol{R}_\delta$. $A \in \boldsymbol{R}_\sigma$, $B \in \boldsymbol{R}_\delta \Rightarrow A - B \in \boldsymbol{R}_\sigma$; $A \in \boldsymbol{R}_\delta$, $B \in \boldsymbol{R}_\sigma \Rightarrow A - B \in \boldsymbol{R}_\delta$.

Pre každú množinu $E \in \boldsymbol{R}_\sigma \cup \boldsymbol{R}_\delta$ definujme číslo $\mu_1(E)$ takto: Ak $E \in \boldsymbol{R}_\sigma$, t. j. $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, pričom $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť množín z $\boldsymbol{R}$, kladieme $\mu_1(E) = \lim_n \mu(E_n)$; ak $E \in \boldsymbol{R}_\delta$, t. j. $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, kde $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca postupnosť množín z $\boldsymbol{R}$, kladieme znovu $\mu_1(E) = \lim_n \mu(E_n)$.

$\mu_1(E)$ existuje pre každú množinu $E \in \boldsymbol{R}_\sigma \cup \boldsymbol{R}_\delta$, pretože ide o limity obmedzených monotónnych postupností. Okrem toho μ_1 je funkcia na $\boldsymbol{R}_\sigma \cup \boldsymbol{R}_\delta$. Skutočne, ak $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, pričom $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú rastúce postupnosti množín z $\boldsymbol{R}$, je pre každé $n = 1, 2, 3, \ldots, F_n \subset E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n - E_{n-1})$ (kladieme $E_0 = \emptyset$) a podľa vlastností miery aj $\mu(F_n) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n - E_{n-1}) = \lim_n \mu(E_n)$ a z toho i $\lim_n \mu(F_n) \leqq \lim_n \mu(E_n)$. Podobne dokážeme i obrátenú nerovnosť. Prechodom ku komplementom dokážeme podobné tvrdenie i pre množiny $E \in \boldsymbol{R}_\delta$. Ak $E \in \boldsymbol{R}_\sigma \cap \boldsymbol{R}_\delta$, t. j. $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, pričom $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesajúca postupnosť množín z $\boldsymbol{R}$, je $\{F_n - E_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesajúca postupnosť množín z $\boldsymbol{R}$ a $\bigcap_{n=1}^{\infty} (F_n - E_n) = \emptyset$, teda $0 = \lim_n \mu(F_n - E_n) = \lim_n (\mu(F_n) - \mu(E_n)) = \lim_n \mu(F_n) - \lim_n \mu(E_n)$.

Lemma 1. *Funkcia μ_1 je aditívna na systéme $\mathbf{R}_\sigma \cup \mathbf{R}_\delta$, t. j. ak $A \in \mathbf{R}_\sigma \cup \mathbf{R}_\delta$, $B \in \mathbf{R}_\sigma \cup \mathbf{R}_\delta$, $A \cup B \in \mathbf{R}_\sigma \cup \mathbf{R}_\delta$ a $A \cap B = \emptyset$, tak $\mu_1(A \cup B) = \mu_1(A) + \mu_1(B)$.*

Dôkaz. Ak $A \in \mathbf{R}_\sigma$, $B \in \mathbf{R}_\sigma$, je to zrejmé. Nech $A \in \mathbf{R}_\delta$, $B \in \mathbf{R}_\delta$; $A = \bigcap_{n=1}^\infty A_n$, $B = \bigcap_{n=1}^\infty B_n$, $\{A_n\}_{n=1}^\infty$, $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ sú klesajúce postupnosti množín z $\mathbf{R}$. Zrejme $A \cup B = \bigcap_{n=1}^\infty (A_n \cup B_n)$, $\mu_1(A \cup B) = \lim_n \mu(A_n \cup B_n) = \lim_n (\mu(A_n) + \mu(B_n) - \mu(A_n \cap B_n))$. Z toho, že $A \cap B = \emptyset$ vyplýva, že $\bigcap_{n=1}^\infty (A_n \cap B_n) = \emptyset$, a teda i $\lim_n \mu(A_n \cap B_n) = 0$ a z toho v tomto prípade lemma okamžite vyplýva.

Nech $A \in \mathbf{R}_\sigma$, $B \in \mathbf{R}_\delta$, $A \cup B \in \mathbf{R}_\sigma$. Nech $A \cup B = \bigcup_{n=1}^\infty C_n$, $B = \bigcap_{n=1}^\infty B_n$, $\{C_n\}_{n=1}^\infty$ rastúca a $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ klesajúca postupnosť. Položme $A_n = C_n - B_n$. Zrejme je $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ a $C_n = A_n \cup B_n - (B_n - C_n)$. $\mu(C_n) = \mu(A_n) + \mu(B_n) - \mu(B_n - C_n)$. Pretože $\bigcap_{n=1}^\infty (B_n - C_n) = \emptyset$, teda i $\lim_n \mu(B_n - C_n) = 0$, je lemma i v tomto prípade dokázaná.

Konečne ak $A \in \mathbf{R}_\delta$, $B \in \mathbf{R}_\sigma$, $A \cup B \in \mathbf{R}_\delta$, nech $A \cup B = \bigcap_{n=1}^\infty C_n$, $B = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$. Položíme $A_n = C_n - B_n$. Zrejme $A = \bigcap_{n=1}^\infty A_n$, $C_n = A_n \cup B_n$ a $A_n \cap B_n = \emptyset$, z čoho lemma i v tomto prípade ľahko vyplynie.

Lemma 2. *Funkcia μ_1 je monotónna na $\mathbf{R}_\sigma \cup \mathbf{R}_\delta$, t. j. ak $A \in \mathbf{R}_\sigma \cup \mathbf{R}_\delta$, $B \in \mathbf{R}_\sigma \cup \mathbf{R}_\delta$ a $A \subset B$, je $\mu_1(A) \leq \mu_1(B)$.*

Dôkaz. Ak $A \in \mathbf{R}_\sigma$ i $B \in \mathbf{R}_\sigma$, resp. $A \in \mathbf{R}_\delta$ i $B \in \mathbf{R}_\delta$, príslušné monotónne postupnosti $\{A_n\}_{n=1}^\infty$, $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ možno zrejme voliť tak, aby bolo $A_n \subset B_n$, a z toho máme ihneď lemmu dokázanú. Ak $A \in \mathbf{R}_\delta$, $B \in \mathbf{R}_\sigma$ je $B = A \cup (B - A)$, množiny vpravo sú disjunktné, $B - A \in \mathbf{R}_\sigma$, teda $\mu_1(B) = \mu_1(A) + \mu_1(B - A)$. Pretože μ_1 je nezáporná funkcia na $\mathbf{R}_\sigma \cup \mathbf{R}_\delta$, je to i v tomto prípade dokázané. Podobne pre prípad $A \in \mathbf{R}_\sigma$ a $B \in \mathbf{R}_\delta$.

Lemma 3. *Nech $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ je rastúca postupnosť množín z $\mathbf{R}_\sigma$, nech $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Potom $\mu_1(A) = \lim_n \mu_1(A_n)$.*

Nech $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ je klesajúca postupnosť množín z $\mathbf{R}_\delta$, nech $B = \bigcap_{n=1}^\infty B_n$. Potom $\mu_1(B) = \lim_n \mu_1(B_n)$.

Dôkaz. Pretože pre všetky $n = 1, 2, 3, \ldots$ je $A \supset A_n$, podľa predošlej lemmy je $\mu_1(A) \geq \mu_1(A_n)$, ako aj $\mu_1(A) \geq \lim_n \mu_1(A_n)$. Ku každej množine A_n existuje však rastúca postupnosť $\{A_{n,k}\}_{k=1}^\infty$ množín z $\mathbf{R}$, pričom $A_n = \bigcup_{k=1}^\infty A_{n,k}$. Položme $C_n = \bigcup_{i,k=1}^n A_{i,k}$. Zrejme je $C_n \subset A_n$, z toho $\mu(C_n) \leq \mu_1(A_n)$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\bigcup_{n=1}^\infty C_n = A$, teda $\mu_1(A) = \lim_n \mu(C_n) \leq \lim_n \mu_1(A_n)$.

Druhú časť lemmy dokážeme podobne.

Lemma 4. *Nech je $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ klesajúca postupnosť množín z $\mathbf{R}_\sigma$ a nech $\bigcap_{n=1}^\infty A_n = \emptyset$. Potom $\lim_n \mu_1(A_n) = 0$.*

Dôkaz. Pretože $\{\mu_1(A_n)\}_{n=1}^\infty$ je nerastúca postupnosť, existuje $\lim_n \mu_1(A_n) \geq 0$. Zvoľme $\varepsilon > 0$. Ku každej množine A_n existuje množina $B_n \in \mathbf{R}$ tak, že $B_n \subset A_n$ a $\frac{\varepsilon}{2^n} + \mu(B_n) > \mu_1(A_n)$. Položme $C_n = \bigcap_{k=1}^n B_k$. Vtedy je $\mu(C_n) > \mu_1(A_n) - \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{2^k} > \mu_1(A_n) - \varepsilon$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ Ale $C_n \supset C_{n+1}$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\bigcap_{n=1}^\infty C_n = \emptyset$, teda $\lim_n \mu(C_n) = 0$ a z toho pre každé $\varepsilon > 0$ je $0 \leq \lim_n \mu_1(A_n) \leq \varepsilon$.

Lemma 5. *Ak $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ a $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ sú klesajúce postupnosti množín z $\mathbf{R}_\sigma$ a $\bigcap_{n=1}^\infty A_n \subset \bigcap_{n=1}^\infty B_n$, tak $\lim_n \mu_1(A_n) \leq \lim_n \mu_1(B_n)$.*

Ak $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ a $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ sú rastúce postupnosti množín z $\mathbf{R}_\delta$ a $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \subset \bigcup_{n=1}^\infty B_n$, tak $\lim_n \mu_1(A_n) \leq \lim_n \mu_1(B_n)$.

Dôkaz. Pre každé prirodzené k je $\bigcap_{n=1}^\infty A_n \subset B_k$. K množine B_k existuje rastúca postupnosť $\{C_n\}_{n=1}^\infty$,[3] $C_n \in \mathbf{R}$ a $B_k = \bigcup_{n=1}^\infty C_n$. Položme $D_n = A_n - C_n$. Zrejme je $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ klesajúca postupnosť, $D_n \in \mathbf{R}_\sigma$ a $\bigcap_{n=1}^\infty D_n = \emptyset$, teda $\lim_n \mu_1(D_n) = 0$ podľa predošlej lemmy. Pretože $\mu_1(A_n) - \mu_1(C_n) \leq \mu_1(A_n) - \mu_1(A_n \cap C_n) = \mu_1(A_n - C_n) = \mu_1(D_n)$, je $\lim_n (\mu_1(A_n) - \mu(C_n)) = \lim_n \mu_1(A_n) - \mu_1(B_k) \leq 0$. Teda pre všetky prirodzené k je $\lim_n \mu_1(A_n) \leq \mu_1(B_k)$ a to dokazuje prvú časť lemmy. Druhú časť dokážeme prechodom ku komplementu.

Položme teraz $\mathbf{R}_{\delta\sigma} = (\mathbf{R}_\delta)_\sigma$ a $\mathbf{R}_{\sigma\delta} = (\mathbf{R}_\sigma)_\delta$. Zrejme platí: $\mathbf{R}_\sigma \cup \mathbf{R}_\delta \subset \mathbf{R}_{\delta\sigma}$; $\mathbf{R}_\sigma \cup \mathbf{R}_\delta \subset \mathbf{R}_{\sigma\delta}$. $A \in \mathbf{R}_{\delta\sigma} \Rightarrow A^* \in \mathbf{R}_{\sigma\delta}$; $A \in \mathbf{R}_{\sigma\delta} \Rightarrow A^* \in \mathbf{R}_{\delta\sigma}$. Ak $A_n \in \mathbf{R}_{\delta\sigma}$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$, tak $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathbf{R}_{\delta\sigma}$; $A_n \in \mathbf{R}_{\sigma\delta}$ pre $n = 1, 2, 3 \ldots \Rightarrow \bigcap_{n=1}^\infty A_n \in \mathbf{R}_{\sigma\delta}$. $A \in \mathbf{R}_{\delta\sigma}$, $B \in \mathbf{R}_{\delta\sigma} \Rightarrow A \cap B \in \mathbf{R}_{\delta\sigma}$; $A \in \mathbf{R}_{\sigma\delta}$, $B \in \mathbf{R}_{\sigma\delta} \Rightarrow A \cup B \in \mathbf{R}_{\sigma\delta}$.

[3] Píšeme C_n miesto $C_n(k)$, hoci C_n závisí od k, podobne D_n.

Pre každú množinu $E \in \boldsymbol{R}_{\delta\sigma} \cup \boldsymbol{R}_{\sigma\delta}$ definujeme číslo $\mu_2(E)$ takto:

Ak $E \in \boldsymbol{R}_{\delta\sigma}$, t. j. $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, pričom $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť množín z $\boldsymbol{R}_\delta$, kladieme $\mu_2(E) = \lim_n \mu_1(E_n)$; ak $E_n \in \boldsymbol{R}_{\sigma\delta}$, t. j. $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, kde $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca postupnosť množín z $\boldsymbol{R}_\sigma$, zasa kladieme $\mu_2(E) = \lim_n \mu_1(E_n)$.

Zrejme existuje $\mu_2(E)$ pre každú množinu $E \in \boldsymbol{R}_{\delta\sigma} \cup \boldsymbol{R}_{\sigma\delta}$. μ_2 je funkcia na systéme $\boldsymbol{R}_{\delta\sigma} \cup \boldsymbol{R}_{\sigma\delta}$. Ak $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, pričom $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú rastúce postupnosti množín z $\boldsymbol{R}_\delta$, z lemmy 5 vyplýva, že $\lim_n \mu_1(E_n) = \lim_n \mu_1(F_n)$. Z tej istej lemmy vyplýva jednoznačnosť aj v prípade prieniku. Ak $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, pričom $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť množín z $\boldsymbol{R}_\delta$ a $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca postupnosť množín z $\boldsymbol{R}_\sigma$, $\{F_n - E_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca postupnosť množín z $\boldsymbol{R}_\sigma$, ktoré majú prázdny prienik, teda $\lim_n \mu_1(F_n - E_n) = \lim_n \mu_1(F_n) - \lim_n \mu_1(E_n) = 0$.

Podobne ako lemmy 1, 2, 3 sa dokážu nasledujúce tri lemmy.

Lemma 6. *Funkcia μ_2 je aditívna na systéme $\boldsymbol{R}_{\delta\sigma} \cup \boldsymbol{R}_{\sigma\delta}$, t. j. pre $A, B \in \boldsymbol{R}_{\delta\sigma} \cup \boldsymbol{R}_{\sigma\delta}$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B \in \boldsymbol{R}_{\delta\sigma} \cup \boldsymbol{R}_{\sigma\delta}$ je $\mu_2(A \cup B) = \mu_2(A) + \mu_2(B)$.*

Lemma 7. *Pre $A, B \in \boldsymbol{R}_{\delta\sigma} \cup \boldsymbol{R}_{\sigma\delta}$, $A \subset B$ je $\mu_2(A) \leqq \mu_2(B)$.*

Lemma 8. *Ak $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť množín z. $\boldsymbol{R}_{\delta\sigma}$, tak $\mu_2(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_n \mu_2(A_n)$.*

Ak $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca postupnosť množín z $\boldsymbol{R}_{\sigma\delta}$, tak $\mu_2(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_n \mu_2(B_n)$.

Teraz už máme možnosť pristúpiť k rozhodujúcemu kroku našej úvahy. Označme $\boldsymbol{S}$ systém množín $E \subset X$ s vlastnosťou, že pre množinu E existuje množina $A \in \boldsymbol{R}_{\delta\sigma}$ a množina $B \in \boldsymbol{R}_{\sigma\delta}$, $A \subset E \subset B$, pričom $\mu_2(B - A) = 0$, t. j. $\mu_2(B) = \mu_2(A)$.

Lemma 9. *Systém $\boldsymbol{S}$ je množinová algebra, ktorá obsahuje súčet každej postupnosti disjunktných množín patriacich do $\boldsymbol{S}$.*

Dôkaz. Nech $E \in \boldsymbol{S}$. Existuje $A \in \boldsymbol{R}_{\delta\sigma}$, $B \in \boldsymbol{R}_{\sigma\delta}$ tak, že $A \subset E \subset B$ a $\mu_2(B - A) = 0$. Zrejme $B^* \subset E^* \subset A^*$, $B^* \in \boldsymbol{R}_{\delta\sigma}$, $A^* \in \boldsymbol{R}_{\sigma\delta}$, $\mu_2(A^* - B^*) = 0$, teda $E^* \in \boldsymbol{S}$. Vezmime E_1, E_2 z $\boldsymbol{S}$ a k nim patriace A_1, A_2, B_1, B_2. Zrejme $A_1 \cup A_2 \subset E_1 \cup E_2 \subset B_1 \cup B_2$ a z toho, že $B_1 \cup B_2 - A_1 \cup A_2 \subset (B_1 - A_1) \cup (B_2 - A_2)$ vyplýva podľa lemmy 7, že $\mu_2(B_1 \cup B_2 - A_1 \cup A_2) = 0$. Pretože $A_1 \cup A_2 \in \boldsymbol{R}_{\delta\sigma}$ a $B_1 \cup B_2 \in \boldsymbol{R}_{\sigma\delta}$, je $E_1 \cup E_2 \in \boldsymbol{S}$.

Nech $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť disjunktných množín z $\boldsymbol{S}$. Pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ nech je $A_n \subset E_n \subset B_n$, $A_n \in \boldsymbol{R}_{\delta\sigma}$, $B_n \in \boldsymbol{R}_{\sigma\delta}$, $\mu_2(B_n - A_n) = 0$. Zrejme sú A_n

disjunktné množiny. Označme $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. $A \in \boldsymbol{R}_{\delta\sigma}$. Podľa lemmy 6 a lemmy 8 je $\mu_2(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n)$. Ku každej množine B_n a k číslu $\varepsilon > 0$ existuje množina $C_n = C_n(\varepsilon) \in \boldsymbol{R}_\sigma$, pričom $B_n \subset C_n$ a $\mu_1(C_n) < \mu_2(B_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} = \mu_2(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. $\mu_1(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(C_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n) + \varepsilon = \mu_2(A) + \varepsilon$. Položme $C(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. $C(\varepsilon) \in \boldsymbol{R}_\sigma$. Položme $D_n = \bigcap_{k=1}^{n} C\left(\frac{1}{k}\right)$. Zrejme je $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset D_n$, $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca postupnosť množín z $\boldsymbol{R}_\sigma$, $\mu_1(D_n) < \mu_2(A) + \frac{1}{n}$. Ak $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$, je $\mu_2(B - A) \leqq \leqq \mu_2(D_n - A) = \mu_2(D_n) - \mu_2(A) < \frac{1}{n}$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ Z toho, že $B \in \boldsymbol{R}_{\sigma\delta}$, $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset B$ a $\mu_2(B - A) = 0$, je lemma dokázaná.

Dokázaná lemma hovorí, že systém $\boldsymbol{S}$ je σ-algebra, t. j. systém, ktorý s každou množinou obsahuje i jej komplement a s každou postupnosťou množín i súčet členov tejto postupnosti. Zrejme platí okrem toho, že $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{S}$.

Definujme pre každú množinu $E \in \boldsymbol{S}$ číslo $\bar{\mu}$ takto: K množine E nájdeme príslušné množiny $A \in \boldsymbol{R}_{\delta\sigma}$, $B \in \boldsymbol{R}_{\sigma\delta}$, $A \subset E \subset B$ tak, aby $\mu_2(B - A) = 0$ a položíme $\bar{\mu}(E) = \mu_2(A)$ $(= \mu_2(B))$.

$\bar{\mu}$ je funkcia na systéme $\boldsymbol{S}$. Skutočne, ak $A_1 \subset E \subset B_1$ a zároveň $A_2 \subset E \subset B_2$, pričom $A_1, A_2 \in \boldsymbol{R}_{\delta\sigma}$, $B_1, B_2 \in \boldsymbol{R}_{\sigma\delta}$ a $\mu_2(A_1) = \mu_2(B_1)$, $\mu_2(A_2) = \mu_2(B_2)$, je $A_1 \subset B_2$ a $A_2 \subset B_1$, $\mu_2(B_2) \geqq \mu_2(A_1)$, $\mu_2(B_1) \geqq \mu_2(A_2)$, z čoho jednak $\mu_2(A_2) \leqq \leqq \mu_2(A_1)$, jednak $\mu_2(A_1) \leqq \mu_2(A_2)$.

Lemma 10. *Funkcia $\bar{\mu}$ je miera na algebre $\boldsymbol{S}$. Pritom je to jediná miera s tou vlastnosťou, že pre množiny $E \in \boldsymbol{R}$ je $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$.*

Dôkaz. Pre $E \in \boldsymbol{R}$ rovnica $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$ zrejme platí. Ak $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť disjunktných množín z $\boldsymbol{S}$ a $A_n \subset E_n$ sú množiny z $\boldsymbol{R}_{\delta\sigma}$, pre ktoré $\mu_2(A_n) = \bar{\mu}(E_n)$, podľa dôkazu lemmy 9 je $\mu_2(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bar{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$, teda $\bar{\mu}$ je miera, a to zrejme konečná, lebo $\bar{\mu}(E) \leqq \bar{\mu}(X) = \mu(X) < \infty$ pre každú množinu $E \in \boldsymbol{S}$.

Ale každá konečná miera je spojitá zhora i zdola v každej množine, t. j. ak $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna postupnosť množín a $E = \lim_n E_n$, tak $\bar{\mu}(E) = \lim_n \mu(E_n)$. Z toho vyplýva, že na systéme $\boldsymbol{R}_\sigma \cup \boldsymbol{R}_\delta$ a ďalej i na systéme $\boldsymbol{R}_{\delta\sigma} \cup \boldsymbol{R}_{\sigma\delta}$ je miera $\bar{\mu}$ jednoznačne svojimi hodnotami na $\boldsymbol{R}$ daná. Ďalej pre ľubovoľné dve množiny $F_1 \subset F_2$ z $\boldsymbol{S}$ musí byť $\bar{\mu}(F_1) \leqq \bar{\mu}_2(F_2)$ a pretože ku každej množine $E \in \boldsymbol{S}$ existujú množiny $A \in \boldsymbol{R}_{\delta\sigma}$ a $B \in \boldsymbol{R}_{\sigma\delta}$ tak, že $A \subset E \subset B$ a $\bar{\mu}(A) = \bar{\mu}(B)$ je miera $\bar{\mu}$ na celom systéme $\boldsymbol{S}$ určená jednoznačne.

Pred vyslovením vety pripomeňme, že miera daná na σ-algebre $\boldsymbol{S}$ je úplná, ak $\boldsymbol{S}$ obsahuje všetky podmnožiny každej množiny, ktorej miera je rovná nule.

Veta. *Nech μ je miera na algebre $\boldsymbol{R}$, $\mu(X) < \infty$. Potom existuje taká σ-algebra $\boldsymbol{S}$, že platí:*

1. $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{S}$.

2. *Na σ-algebre $\boldsymbol{S}$ existuje jediná úplná miera $\bar{\mu}$ s vlastnosťou, že pre množiny $E \in \boldsymbol{R}$ je $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$.*

Dôkaz. Existencia σ-algebry $\boldsymbol{S}$ i miery $\bar{\mu}$ na nej i jednoznačnosť miery $\bar{\mu}$ je zaručená lemmou 9 a 10. Stačí dokázať, že miera, ktorú popisuje lemma 10, je úplná. Ale to je zrejmé, pretože $\bar{\mu}(E) = 0$ iba vtedy, ak existuje množina $B \in \boldsymbol{R}_{\sigma\delta}$, pričom $\mu_2(B) = 0$ a $E \subset B$. Zrejme je $\emptyset \in \boldsymbol{R}_{\delta\sigma}$, teda môžeme za množinu A voliť $\emptyset$ a bude $A \subset E \subset B$, pričom $\mu_2(B - A) = 0$. Z toho však vyplýva, že ľubovoľná množina $F \subset E$ tiež patrí do $\boldsymbol{S}$, čiže $\bar{\mu}$ je úplná miera.

Záverom poznamenajme, že získaný výsledok môžeme použiť aj na dokázanie vety o rozšírení miery i v prípade, ak $\boldsymbol{R}$ nie je algebra, ale iba okruh, a μ je σ-konečná miera na ňom. Tento výsledok sa získa použitím našej vety na okruh $\boldsymbol{R} \cap A$ (to je systém množín $B \cap A$ pre $B \in \boldsymbol{R}$) pre množiny $A \in \boldsymbol{R}$, $\mu(A) < \infty$, ak si uvedomíme, že $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}) \cap A$ je minimálny σ-okruh nad systémom $\boldsymbol{R} \cap A$ a každá množina $E \in \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ sa dá pokryť spočítateľným systémom disjunktných množín z $\boldsymbol{R}$, ktorých miera je konečná.

LITERATÚRA

1. Albuquerque J., Ensembles de Borel, Portugaliae Math., 4 (1943–1945) 161–198. 2. Le Blanc L., Fox G. E., On the extension of measure by the method of Borel, Can J. Math. 8 (1956) 516–523. 3. Halmos P. R., Measure theory, New York 1950. 4. Neves R., Sôbre a construçae algebrica da teoria geral da Medida, Gendro de estudas matematicas, Pôrto, Publ. no 13 (1945). 5. Novák J., Über die eindeutigen stetigen Erweiterungen stetiger Funktionen, Чех. Мат. Журнал 7 (82) (1957) (v tlači).

Došlo 15. 1. 1956.

ЗАМЕТКА К РАСШИРЕНИЮ МЕРЫ

ИГОР КЛУВАНЕК

Выводы

В этой статьи доказывается теорема о расширении меры следующим образом. Пусть $\boldsymbol{R}$ алгебра подмножеств некоторого множества X и μ — вполне конечная мера на ней. Пусть $\boldsymbol{R}_\sigma(\boldsymbol{R}_\delta)$ класс тех множеств E, к которым существует такая возрастающая (убывающая) последовательность $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ множеств из $\boldsymbol{R}$, что $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \ (E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)$. Положим $\mu_1(E_n) = \lim_n \mu(E_n)$. Далее пусть $\boldsymbol{R}_{\sigma\delta}(\boldsymbol{R}_{\delta\sigma})$ класс множеств вида $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ $(E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$, где $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ убывающая (возрастающая) последовательность множеств из $\boldsymbol{R}_\sigma(\boldsymbol{R}_\delta)$ и пусть $\mu_2(E) = \lim_n \mu_1(E_n)$.

Если обозначим $\boldsymbol{S}$ класс всех тех множеств $E \subset X$, к которым можно найти множество $A \in \boldsymbol{R}_{\delta\sigma}$ и множество $B \in \boldsymbol{R}_{\sigma\delta}$ такое, что $A \subset E \subset B$ и $\mu_2(A) = \mu_2(B)$, то $\boldsymbol{S}$ является σ-алгеброй содержающей $\boldsymbol{R}$ и функция $\bar{\mu}$ на $\boldsymbol{S}$ определенная уравнением $\bar{\mu}(E) = \mu_2(A)$ является (единой) полной мерой, которая совпадает с μ на $\boldsymbol{R}$.

NOTE ON THE EXTENSION OF MEASURE

IGOR KLUVÁNEK

Summary

In this article the theorem on extension of measure is proved as follows.

Let $\boldsymbol{R}$ be an algebra of subsets of any set X and μ totally finite measure on $\boldsymbol{R}$. Let $\boldsymbol{R}_\sigma(\boldsymbol{R}_\delta)$ be the class of all sets E such that there exists an increasing (decreasing) sequence $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ of sets in $\boldsymbol{R}$ and $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n (E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)$. Denote $\mu_1(E) = \lim_n \mu(E_n)$. Further let $\boldsymbol{R}_{\sigma\delta}$ $(\boldsymbol{R}_{\delta\sigma})$ be the class of sets of the form $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ $(E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$, where $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a decreasing (increasing) sequence of sets in $\boldsymbol{R}_\sigma(\boldsymbol{R}_\delta)$ and let $\mu_2(E) = \lim_n \mu_1(E_n)$.

If we denote by $\boldsymbol{S}$ the system of all sets $E \subset X$ for which there exists a set $A \in \boldsymbol{R}_{\delta\sigma}$ and a set $B \in \boldsymbol{R}_{\sigma\delta}$ such that $A \subset E \subset B$ and $\mu_2(A) = \mu_2(B)$, then $\boldsymbol{S}$ is a σ-algebra containing $\boldsymbol{R}$ and the function $\bar{\mu}$ on $\boldsymbol{S}$, unambiguously defined by the equation $\bar{\mu}(E) = \mu_2(A)$, is a (unique) complete measure which coincides with μ on $\boldsymbol{R}$.