# K ZAVEDENIU POJMU VEKTORA UHLOVEJ RÝCHLOSTI TUHÉHO TELESA UPEVNENÉHO V JEDNOM BODE

(Metodický príspevok)

JOZEF GARAJ

Katedra fyziky Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave

VENOVANÉ K 50. NARODENINÁM AKADEMIKA DIONÝZA ILKOVIČA

V kinematike tuhého telesa upevneného v jednom bode je žiadúce zaviesť pojem jeho vektora uhlovej rýchlosti čo najprirodzenejšie aj po stránke fyzikálnej. Práve z fyzikálneho hľadiska je zavádzanie tohto vektora nie často najvhodnejšie. Citujeme napr. z českého prekladu knihy N. A. Kilčevského, *Základy tenzorového počtu a jeho použitia v mechanike* [Praha 1956]: „V mnohých učebniciach teoretickej mechaniky sa zavádza vektor uhlovej rýchlosti telesa formálne. Uhlová rýchlosť sa pritom považuje za primárnu kinematickú veličinu, charakterizujúcu pohyb tuhého telesa. Možno sa však presvedčiť, že pojem uhlovej rýchlosti telesa vzniká prirodzeným spôsobom pri štúdiu rozloženia lineárnych rýchlostí v telese a že je pojmom druhotným.“

Autor tejto knihy dochádza ku pojmu vektora uhlovej rýchlosti použitím tenzorovej analýzy tak, že vyšetruje najprv tenzorové vlastnosti istých veličín na základe ich transformácií a z nich potom konštruuje vektor uhlovej rýchlosti.

Práve zložková metóda tenzorovej analýzy, ktorá sa v súčasnej literatúre stále ešte prevažne používa, vnáša aj do zmieneného postupu istú formálnosť, aj keď z hľadiska fyzikálneho je to postup oveľa prirodzenejší. Ukážeme, že použitím „priamej symboliky“ vektorového počtu, v ktorej sa neopierame o transformačné vzťahy, ale pojem tenzora zavádzame invariantne, dá sa zaviesť pojem vektora uhlovej rýchlosti ešte menej formálne a fyzikálne veľmi prirodzene.

Vyberme v tuhom telese tri body tak, aby ich polohové vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vzhľadom na pevný bod telesa boli nekomplanárne. Každý ďalší bod v tomto s telesom pevne spojenom systéme je daný polohovým vektorom

$$\mathbf{r} = x^j \mathbf{e}_j,$$



pričom kontravariantné súradnice $x^j$ sú pre uvažovaný bod telesa s časom nepremenné. Rýchlosť zvoleného bodu je

$$\mathbf{v} = x^j \frac{d\mathbf{e}_j}{dt}.$$

Je však tiež

$$\mathbf{v} = x^j \frac{d\mathbf{e}_j}{dt} \cdot \mathbf{I} = x^j \left(\frac{d\mathbf{e}_j}{dt} \cdot \mathbf{e}_i\right) \mathbf{e}^i,$$

kde $\mathbf{I} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}^i$ je tenzor identity (príslušné sumačné znamienka vynechávame).

Rýchlosť $\mathbf{v}$ možno vyjadriť tiež vo tvare

$$\mathbf{v} = \left(\mathbf{e}_i \cdot \frac{d\mathbf{e}_j}{dt}\right) \mathbf{e}^i (\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_j) x^j,$$

alebo tiež vo tvare

$$\mathbf{v} = \left(\mathbf{e}_i \cdot \frac{d\mathbf{e}_j}{dt} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j\right) \cdot \mathbf{e}_k x^k = \mathbf{T}_\omega \cdot \mathbf{r}.$$

O tenzore $\mathbf{T}_\omega$ ľahko zistíme, že je antisymetrický. Ako je známe platí totiž

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = g_{ij},$$

kde $g_{ij}$ sú fundamentálne metrické veličiny. Odtiaľ ihneď máme

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \cdot \mathbf{e}_j = -\frac{d\mathbf{e}_j}{dt} \cdot \mathbf{e}_i \quad \text{a} \quad \frac{d\mathbf{e}_k}{dt} \cdot \mathbf{e}_k = 0,$$

čím je horné tvrdenie dokázané.

Rýchlosť $\mathbf{v}$ môžeme teda vyjadriť tiež takto

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{2} (\mathbf{t}_\omega \times \mathbf{r}) = \omega \times \mathbf{r},$$

kde $\mathbf{t}_\omega$ je vektor antisymetrického tenzora $\mathbf{T}_\omega$ a vektor

$$-\frac{1}{2} \mathbf{t}_\omega = \omega$$

je hľadaný vektor uhlovej rýchlosti telesa.

## LITERATÚRA

1. Kilčevskij N. A., Základy tenzorového počtu a jeho použitie v mechanike, Moskva 1954, Praha 1956. 2. Kočin N. E., Vektornoje isčislenie i načala tenzornogo isčislenia, Akad. Nauk SSSR, Moskva 1951. 3. Raševskij P. K., Rimanova geometrija i tenzornyj analýz, Moskva 1953. 4. Ilkovič D., Vektorový počet, JČMF, Praha 1950.

Došlo 17. 10. 1956.