MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, VII, 1 — 1957

POZNÁMKY K ODVODENIU NAVIER-STOKESOVEJ ROVNICE

(Metodický príspevok)

IVAN NÁTER

Katedra fyziky Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave

VENOVANÉ K 50. NARODENINÁM AKADEMIKA DIONÝZA ILKOVIČA

Základné rovnice, ktoré opisujú prúdenie ideálnej nestlačiteľnej kvapaliny, sú Eulerova rovnica

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} = \mathbf{g} - \frac{1}{s} \operatorname{grad} p \tag{1}$$

a rovnica spojitosti

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{2}$$

kde $\mathbf{v}$ je rýchlosť prúdenia kvapaliny, t čas, $\mathbf{g}$ zrýchlenie voľne padajúceho telesa, s špecifická hmota kvapaliny a p tlak v kvapaline. Pritom gradient rýchlosti, resp. tlaku, ako aj divergencia rýchlosti sú myslené v tom bode priestoru, v okolí ktorého prúdenie kvapaliny vyšetrujeme.

Eulerova rovnica bola odvodená za predpokladu, že v kvapaline účinkujúcimi plošnými silami sú len normálne napätia, ktoré sa podľa Pascalovho zákona šíria v kvapaline všetkými smermi rovnomerne. V takejto kvapaline je tenzor napätia $\mathbf{P}$ vyjadrený vzťahom

$$\mathbf{P} = -p\mathbf{I}, \tag{3}$$

kde $\mathbf{I}$ je tenzor identity [1].

Eulerova rovnica pre skutočné kvapaliny stráca svoju platnosť, a ak kvapalinu považujeme za nestlačiteľnú, jej pohyb popri rovnici spojitosti (2) opisuje tzv. Navier—Stokesova rovnica, odvodená Navierom roku 1822 a Stokesom roku 1845.

Vo väčšine učebníc fyziky sa odvodzuje Navier—Stokesova rovnica tak, že sa bez hlbšieho odôvodnenia na viskóznu kvapalinu aplikujú rovnice platné pre spojité pružné prostredie s tou obmenou, že sa v tenzore napätia súradnice relatívnych posunutí nahradia súradnicami relatívnych rýchlostí. Podľa môjho

názoru je takéto odvodenie Navier—Stokesovej rovnice nie dosť presvedčivé a najmä tým, že sa úvahy s tenzorom napätia robia v súradniciach, neprehľadné a zdĺhavé.

Domnievam sa, že použitím vyjadrenia plošných síl, účinkujúcich na prúdiacu viskóznu kvapalinu, pri dôslednom používaní pravidiel a symboliky vektorového a tenzorového počtu možno jednoduchšie a prehľadnejšie odvodiť Navier—Stokesovu rovnicu priamo z Newtonovej pohybovej rovnice. Takéto odvodenie podávam vo svojom metodickom príspevku.

Plošné sily vznikajúce v prúdiacej kvapaline v dôsledku vnútorného trenia majú svoju príčinu v nerovnakých rýchlostiach jednotlivých čiastočiek kvapaliny. Napätia od vnútorného trenia sú závislé len od relatívnych rýchlostí jednotlivých čiastočiek kvapaliny. Rozloženie rýchlosti prúdenia kvapaliny $\mathbf{v}$ v okolí bodu A vnútri kvapaliny určuje gradient rýchlosti v bode A. Zmenu rýchlosti $\mathrm{d}\mathbf{v}$ odpovedajúcu zmene polohového vektora $\mathrm{d}\mathbf{r}$ môžeme vyjadriť takto:

$$\mathrm{d}\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v}.$$

Ak rozložíme tenzor grad $\mathbf{v}$ na symetrickú a antisymetrickú časť, je

$$\mathrm{d}\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \nabla\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla) + \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} - \mathbf{v}\nabla) =$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{d}\mathbf{r} \cdot (\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla) + \frac{1}{2}(\operatorname{rot} \mathbf{v}) \times \mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{1}{2}\mathrm{d}\mathbf{r} \cdot (\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla) + \boldsymbol{\omega} \times \mathrm{d}\mathbf{r},$$

keď sme použili známe vyjadrenie skalárneho súčinu vektora a antisymetrického tenzora pomocou vektora tohto tenzora [1].

Druhý člen $(\boldsymbol{\omega} \times \mathrm{d}\mathbf{r})$ v našom vyjadrení diferenciálu rýchlosti predstavuje tú časť zmeny rýchlosti, ktorá je vyvolaná otáčaním kvapaliny v okolí bodu A ako celku uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v}$. Pri takomto pohybe sa však jednotlivé čiastočky kvapaliny po sebe navzájom neposunujú, takže sily vnútorného trenia v kvapaline nevznikajú. Z uvedeného je zrejmé, že sily vnútorného trenia budú funkciou len tej časti diferenciálu rýchlosti, ktorá je v našom vyjadrení sprostredkovaná symetrickou časťou tenzora grad $\mathbf{v}$.

Pokiaľ súradnice tenzora grad $\mathbf{v}$ nemajú príliš veľké hodnoty, môžeme predpokladať, že závislosť síl vnútorného trenia od týchto súradníc je lineárna. Okrem toho závisia tieto sily aj od orientácie plôšky, na ktorej ich účinok vyšetrujeme. V prvom priblížení môžeme predpokladať, že sila $\mathrm{d}\mathbf{f}$, účinkujúca na elementárnu plôšku $\mathrm{d}S$ zo strany orientácie plošného vektora $\mathrm{d}\mathbf{S}$, je lineárnou vektorovou funkciou tohto vektora:

$$\mathrm{d}\mathbf{f} = \eta\, \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot (\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla).$$

Veličina η je koeficient viskozity.

Napätie τ vznikajúce vo viskóznej nestlačiteľnej kvapaline v dôsledku existencie vnútorného trenia môžeme teda vyjadriť takto:

$$\tau = \frac{d\boldsymbol{f}}{dS} = \eta \frac{d\boldsymbol{S}}{dS} \cdot (\nabla\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\nabla) = \eta \boldsymbol{n}^0 \cdot (\nabla\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\nabla), \tag{4}$$

keď sme jednotkový vektor súhlasne rovnobežný s vektorom $d\boldsymbol{S}$ označili $\boldsymbol{n}^0$. Ľahko vidieť, že takéto vyjadrenie napätia je v súhlase s Newtonovou formuláciou.

Tenzor napätia vo viskóznej nestlačiteľnej kvapaline má tvar:

$$\boldsymbol{P}_v = -p\boldsymbol{I} + \eta(\Delta\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\Delta). \tag{5}$$

Nazýva sa viskóznym tenzorom napätia [5].

V prúdiacej kvapaline myslime si uzavretú plochu S. Na kvapalinu ňou obklopenú účinkuje objemová sila – váha kvapaliny – určená výrazom $\int s\boldsymbol{g}\, dV$, kde dV je diferenciál objemu a objemová integrácia sa vzťahuje na celé vnútro uzavretej plochy. Prostredníctvom ohraničujúcej plochy účinkujú na vybranú časť kvapaliny ešte plošné sily, ktoré zas možno vyjadriť plošným integrálom $\oint d\boldsymbol{S} \,.\, \boldsymbol{P}_v$, vzťahujúcim sa na celú uzavretú plochu S. Plošné vektory $d\boldsymbol{S}$ sme pritom orientovali na vonkajšiu stranu tejto uzavretej plochy. Pohybová rovnica pre vybranú časť kvapaliny, ak zrýchlenie jej ťažiska označíme a, je

$$\boldsymbol{a}\int s\, dV = \int s\boldsymbol{g}\, dV + \oint d\boldsymbol{S} \,.\, \boldsymbol{P}_v. \tag{6}$$

Použitím Gaussovej vety môžeme plošný integrál previesť na objemový:

$$\oint d\boldsymbol{S} \,.\, \boldsymbol{P}_v = \int (\operatorname{div} \boldsymbol{P}_v)\, dV,$$

kde sa objemová integrácia vzťahuje zas na celé vnútro uzavretej plochy S.

Upravíme ešte výraz $\operatorname{div} \boldsymbol{P}_v$:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{P}_v = \operatorname{div} [-p\boldsymbol{I} + \eta(\nabla\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\nabla)] = -\operatorname{grad} \boldsymbol{p} + \\ + \eta[\operatorname{div} \operatorname{grad} \boldsymbol{v} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v}] = -\operatorname{grad} p + \eta\Delta\boldsymbol{v},$$

lebo podľa (2) je $\operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$.
Pohybová rovnica (6) je teda

$$\boldsymbol{a}\int s\, dV = \int s\boldsymbol{g}\, dV + \int (-\operatorname{grad} p + \eta\Delta\boldsymbol{v})\, dV,$$

alebo, keďže sa všetky tri integrály vzťahujú na ten istý a ináč úplne ľubovoľný objem,

$$\boldsymbol{a}s = s\boldsymbol{g} - \operatorname{grad} p + \eta\Delta\boldsymbol{v}.$$

Ak ešte celú poslednú rovnicu delíme špecifickou hmotou kvapaliny s a zrýchlenie $\boldsymbol{a}$ rozpíšeme podľa Eulera $\boldsymbol{a} = \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \,.\, \operatorname{grad} \boldsymbol{v}$, dostaneme Navier–Stokesovu rovnicu v známom tvare

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \,.\, \operatorname{grad} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{g} - \frac{1}{s} \operatorname{grad} p + \frac{\eta}{s} \Delta\boldsymbol{v}.$$

LITERATÚRA

1. Iľkovič, Vektorový počet. JČMF Praha, 2. vydanie, 1950. 2. Kilčevskij, Základy tensorového počtu a jeho použití v mechanice. SNTL, Praha 1956. 3. Schaefer, Einführung in die theoretische Physik I, 3. vydanie, Berlin a Leipzig 1929. 4. Sommerfeld, Vorlesungen über theoretische Physik II, Mechanik der deformierbaren Medien, 3. vydanie, Leipzig 1954. 5. Landau, Lifšic, Mechanika splošnych sred, 2. vydanie, Moskva 1954. 6. Joos, Lehrbuch der theoretischen Physik, 3. vydanie, Leipzig 1939.

Došlo 20. 9. 1956.