

DVE POZNÁMKY K DEMAGNETIZAČNÝM FAKTOROM TYČOVÝCH VZORIEK

VLADIMÍR HAJKO

Katedra fyziky Vysoké školy technickej v Košiciach

VENOVANÉ K 50. NARODENINÁM AKADEMICKÁ
DIONÝZA ILKOVIČA

1. Ako je známe, demagnetizačný faktor elipsoidálnej feromagnetickej vzorky možno presne vypočítať z rozmerov elipsoidu a v prípade, že ide o rotačný elipsoid s veľkou polosou a a malou polosou b , uložený do homogénneho vonkajšieho magnetického poľa tak, že smer veľkej osi elipsoidu spadá do smeru vonkajšieho poľa, je hodnota jeho demagnetizačného faktora daná vzťahom

$$N = \frac{4\pi}{p^2 - 1} \left\{ \frac{p}{\sqrt{p^2 - 1}} \ln(p + \sqrt{p^2 - 1}) - 1 \right\},$$

kde $p = a/b$. Vidieť, že hodnota demagnetizačného faktora je úplne určená veľkosťou p , a preto sa hodnoty demagnetizačných faktorov elipsoidov tabulujú pre rôzne hodnoty p .

Pri tyčových vzorkách valcového tvaru je tiež zvykom pri hodnotení závislosti stredového (balistického) demagnetizačného faktora na geometrických rozmeroch tyče pracovať s veľkosťou p , ktorá je však teraz definovaná vzťahom $p = l/d$, kde l je dĺžka tyče a d jej priemer, aj keď, ako je známe, nezávisia stredové demagnetizačné faktory tyčových vzoriek len od geometrických rozmerov tyče, ale aj od magnetického stavu tyče a od magnetických vlastností materiálu tyče.

Pri tyčových vzorkách so štvorcovým alebo obdĺžnikovým prierezom zavádzajú niektorí autori veľkosť p ako podiel dĺžky tyče a druhej odmocniny z veľkosti prierezu. Na inú možnosť definície veľčiny p poukazuje Schneider [1], ktorý túto veľkosť definuje ako podiel dĺžky tyče a priemeru takého kruhu, ktorého obsah je rovný obsahu štvorcového alebo obdĺžnikového prierezu tyče. Ak označíme dĺžku tyče l a jej druhé dva rozmery a, b , je

$$p = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{l}{\sqrt{ab}}. \quad (1)$$

Schneider experimentálne zistil, že pri takejto definícii p sú priemerné (magnetometrické) demagnetizačné faktory valcovej tyče a tyče so štvorcovým prierezom pri tomže p rovnaké. Veľčiny p podľa definície (1) použil aj Warmuth [2], ktorý experimentálne zistil, že pri tomže p a tej istej susceptibilite κ majú v obore rastúceho κ valcové vzorky a vzorky so štvorcovým prierezom ten istý stredový demagnetizačný faktor.

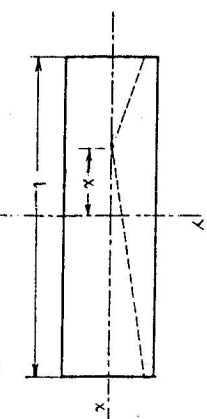
V špeciálnom prípade, keď tyčové vzorky sú zmagnetované do nasýtenia pozdĺž celej svojej dĺžky, možno matematicky ukázať, že pri definícii veľčiny p podľa (1) sú stredové demagnetizačné faktory valcových tyčí a tyčí so štvorcovým alebo obdĺžnikovým prierezom pri tomže p rovnaké. To je účelom prvej poznámky.

Z magnetostatiky pre demagnetizačné pole platí vzťah

$$H_p = \text{grad} \left(\iiint \frac{\text{div } \mathbf{J}}{r} dV - \iint \frac{\mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}}{r} \right), \quad (2)$$

kde sa integrácia týka celého objemu, resp. celého povrchu feromagnetika. V limitnom prípade, keď tyčová vzorka je zmagnetovaná do nasýtenia pozdĺž celej svojej dĺžky a vo smere dĺžky, je $\mathbf{J}$ pozdĺž celej vzorky rovnaké, takže $\text{div } \mathbf{J} = 0$ a vzťah (2) prejde v tomto prípade na tvar

$$H_p = - \text{grad} \iint \frac{\mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}}{r},$$



Obr. 1.

kde sa integrácia týka už len obidvoch základní tyče, keďže všade inde na povrchu je $\mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$. Hodnotu demagnetizačného poľa možno potom v určitom mieste na osi tyče (obr. 1) vypočítať podľa vzťahu

$$H_x = \left(\frac{l}{2} + x \right) J \iint \frac{dy dz}{\left[\left(\frac{l}{2} + x \right)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \left(\frac{l}{2} - x \right) J \iint \frac{dy dz}{\left[\left(\frac{l}{2} - x \right)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}},$$

$$N_x = \left(\frac{l}{2} + x \right) \iint \frac{dy dz}{\left[\left(\frac{l}{2} + x \right)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \left(\frac{l}{2} - x \right) \iint \frac{dy dz}{\left[\left(\frac{l}{2} - x \right)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}}, \quad (3)$$

ak sme os x orientovali v smere dĺžky tyče. Vzhľadom na to, že je $H_x = N_x J$, platí pre demagnetizačný faktor v tomže mieste na osi tyče vzťah

Uvedeným postupom spočítaval Arkadieiev [3] demagnetizačné faktory pre úplne nasýtený stav valcových tyčí a pre stredový demagnetizačný faktor (pri $p \gg 1$) dostal hodnotu

$$N = \frac{2\pi}{p^2}. \quad (4)$$

Pre tyč s obdĺžnikovým prierezom o rozmeroch a, b zrejme platí

$$N_x = \left(\frac{l}{2} + x \right) \int_{-\frac{b}{2} - \frac{a}{2}}^{+\frac{b}{2} + \frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2} - \frac{a}{2}}^{+\frac{b}{2} + \frac{a}{2}} \frac{dy dz}{\left[\left(\frac{l}{2} + x \right)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \left(\frac{l}{2} - x \right) \int_{-\frac{b}{2} - \frac{a}{2}}^{+\frac{b}{2} + \frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2} - \frac{a}{2}}^{+\frac{b}{2} + \frac{a}{2}} \frac{dy dz}{\left[\left(\frac{l}{2} - x \right)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (5)$$

Riešením integrálov vo vzťahu (5) dostávame pre N_x vzťah

$$N_x = 2 \left[\operatorname{arctg} \frac{ab}{2 \left(\frac{l}{2} + x \right) \sqrt{a^2 + b^2 + 4 \left(\frac{l}{2} + x \right)^2}} - \operatorname{arctg} \frac{ab}{2 \left(\frac{l}{2} + x \right) \sqrt{a^2 + b^2 + 4 \left(\frac{l}{2} + x \right)^2}} \right] + 2 \left[\operatorname{arctg} \frac{ab}{2 \left(\frac{l}{2} - x \right) \sqrt{a^2 + b^2 + 4 \left(\frac{l}{2} - x \right)^2}} - \operatorname{arctg} \frac{ab}{2 \left(\frac{l}{2} - x \right) \sqrt{a^2 + b^2 + 4 \left(\frac{l}{2} - x \right)^2}} \right].$$

Pre stred tyče je $x = 0$, takže pri rešpektovaní okolností, že je spravidla $l \gg a, a \gg b$, dostávame pre stredový demagnetizačný faktor hodnotu

$$N = 4 \left[\operatorname{arctg} \frac{ab}{l \sqrt{a^2 + b^2 + l^2}} - \operatorname{arctg} \frac{ab}{l \sqrt{a^2 + b^2 + l^2}} \right] = 4 \left[\operatorname{arctg} \frac{ab}{l^2} - \operatorname{arctg} \frac{ab}{l^2} \right] = \frac{8ab}{l^2}, \quad (6)$$

keď sme prislúšné výrazy v poslednej zátvorke rozvinuli v rad a zanedbali veličiny malé vyššieho rádu.

Porovnaním vzťahu (4) a (6) dostávame podmienku, pri ktorej stredový demagnetizačný faktor valcovej tyče a tyče s obdĺžnikovým prierezom je v magnetickom stave úplného nasýtenia rovnaký. Je to zrejme splnené vtedy, keď platí

$$lp = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{l}{\sqrt{ab}}. \quad (1)$$

Ak teda definujeme pri tyčoch s obdĺžnikovým prierezom veličinu p podľa vzťahu (1), tak z predchádzajúceho plynie, že pri rovnakom p majú valcové tyče aj tyče s obdĺžnikovým prierezom v magnetickom stave úplného nasýtenia rovnaké stredové demagnetizačné faktory.

2. Druhá poznámka sa týka javu hysterézie stredového demagnetizačného faktora. Autor spolu s J. Danielom - Szabóom upozornil v práci [4] a [5] na to, že podstatu tohto javu treba vidieť v typickom priebehu procesu premagnetívania tyčových vzoriek v homogénnom postupne klesajúcom a do záporných hodnôt prechádzajúcom vonkajšom magnetickom poli. Oprávnenosť tohto tvrdenia možno podporiť aj výsledkami nasledujúcich úvah.

Rozloženie magnetizácie pozdĺž tyče, prislúchajúce jednotlivým magnetickým stavom pri premagnetívaní možno s dost dobrou presnosťou vyjadriť vzťahom

$$J = J_0(1 - k_1 x^2 - k_2 x^4), \quad (7)$$

kde J_0 je hodnota magnetizácie v strede tyče, x je vzdialenosť od stredu tyče miesta, v ktorom má magnetizácia hodnotu J , k_1 a k_2 sú konštanty, ktoré však môžu mať v rôznych magnetických stavoch tyče rôzne hodnoty. Do akej miery vzťah (7) správne vyjadruje rozloženie magnetizácie pozdĺž tyče v jednotlivých stavoch vidieť z tab. 1, v ktorej sú porovnané výsledky vypočítané podľa vzťahu (7) pri vhodných hodnotách konštánt k_1 a k_2 s výsledkami meraní, uvedenými v práci [5].

Použitím vzťahu (7) a zavedením zjednodušujúceho predpokladu, že smer magnetizácie spadá do smeru dĺžky tyče v každom mieste tyče, možno hodnoty stredových demagnetizačných faktorov v jednotlivých magnetických stavoch tyče počas premagnetívania matematicky vypočítať. Vychádzajúc zo vzťahu (2) a rešpektujúc platnosť rovnice $H_p = NJ$, možno pre valcovú tyč vzhľadom

¹ Máme tu na mysli zložku magnetizácie spadajúcu do smeru dĺžky tyče. Títo totiž pri balistických meraniach na tyčových vzorkách určujeme.

Tabuľka 1

J_0 v G	k_1 v cm ⁻² k_2 v cm ⁻⁴		J/J_0					
			0,0 l	0,2 l	0,4 l	0,6 l	0,8 l	0,95 l
1146	$k_1 = 0,562 \cdot 10^{-2}$ $k_2 = 0,293 \cdot 10^{-4}$	meranie výpočet	1,00 1,00	0,97 0,98	0,90 0,90	0,75 0,76	0,52 0,52	0,24 0,25
400	$k_1 = 0,682 \cdot 10^{-2}$ $k_2 = 0,226 \cdot 10^{-4}$	meranie výpočet	1,00 1,00	0,97 0,97	0,88 0,89	0,72 0,73	0,49 0,47	0,21 0,20
152	$k_1 = 0,682 \cdot 10^{-2}$ $k_2 = 0,226 \cdot 10^{-4}$	meranie výpočet	1,00 1,00	0,98 0,97	0,88 0,89	0,71 0,73	0,45 0,47	0,20 0,20
9,7	$k_1 = 1,016 \cdot 10^{-2}$ $k_2 = -0,102 \cdot 10^{-4}$	meranie výpočet	1,00 1,00	0,96 0,96	0,84 0,84	0,64 0,65	0,41 0,39	0,17 0,17
3,9	$k_1 = 1,588 \cdot 10^{-2}$ $k_2 = -0,553 \cdot 10^{-4}$	meranie výpočet	1,00 1,00	0,88 0,94	0,73 0,76	0,55 0,50	0,31 0,21	0,08 0,14
0,8	$k_1 = 2,300 \cdot 10^{-2}$ $k_2 = -0,980 \cdot 10^{-4}$	meranie výpočet	1,00 1,00	0,94 0,91	0,71 0,66	0,40 0,30	0,03 -0,07	-0,36 -0,28
0,6	$k_1 = 2,120 \cdot 10^{-2}$ $k_2 = +2,814 \cdot 10^{-4}$	meranie výpočet	1,00 1,00	1,17 1,08	1,27 1,27	1,47 1,40	1,35 1,21	0,62 0,63
9,2	$k_1 = 0,682 \cdot 10^{-2}$ $k_2 = 0,226 \cdot 10^{-4}$	meranie výpočet	1,00 1,00	0,96 0,97	0,88 0,89	0,73 0,73	0,49 0,47	0,18 0,20
33,5	$k_1 = 0,682 \cdot 10^{-2}$ $k_2 = 0,226 \cdot 10^{-4}$	meranie výpočet	1,00 1,00	0,96 0,97	0,87 0,89	0,71 0,73	0,48 0,47	0,19 0,20
96,4	$k_1 = 0,682 \cdot 10^{-2}$ $k_2 = 0,226 \cdot 10^{-4}$	meranie výpočet	1,00 1,00	0,99 0,97	0,90 0,89	0,73 0,73	0,50 0,47	0,22 0,20
346	$k_1 = 0,682 \cdot 10^{-2}$ $k_2 = 0,226 \cdot 10^{-4}$	meranie výpočet	1,00 1,00	0,97 0,97	0,87 0,89	0,71 0,73	0,48 0,47	0,21 0,20
996	$k_1 = 0,682 \cdot 10^{-2}$ $k_2 = 0,226 \cdot 10^{-4}$	meranie výpočet	1,00 1,00	0,97 0,97	0,89 0,89	0,72 0,73	0,49 0,47	0,22 0,20

Dĺžka tyče = $2l = l_0$.

na označenie v obr. 2, ako aj na zjednodušujúci predpoklad, že magnetizácia má v každom mieste tyče smer spádajúci do smeru dĺžky tyče, píšat

$$N = 2\pi \int_0^R (-2k_1 x - 4k_2 x^3) \frac{\partial}{\partial a} \left[\int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{(x+a)^2 + r^2}} \right] dx -$$

$$- 2\pi \frac{J_0 \partial}{J_0 \partial a} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{\left(\frac{l_0}{2} + a\right)^2 + r^2}} + 2\pi \frac{J_0 \partial}{J_0 \partial a} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{\left(\frac{l_0}{2} - a\right)^2 + r^2}}, \quad (8)$$

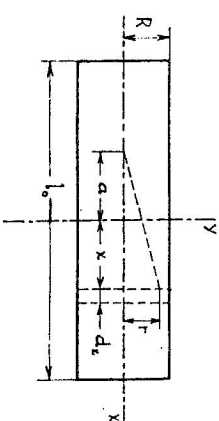
kde N vo vzťahu (8) značí hodnotu demagnetizačného faktora v mieste, ktoré sa nachodí vo vzdialenosti a od stredu tyče. Ak vo vzťahu (8) jednotlivé integrály, ktoré treba vykonať pozdĺž celej tyče, resp. cez povrch základnej

tyče, vypočítame a položíme $a = 0$, pre hodnotu stredového demagnetizačného faktora, dostaneme

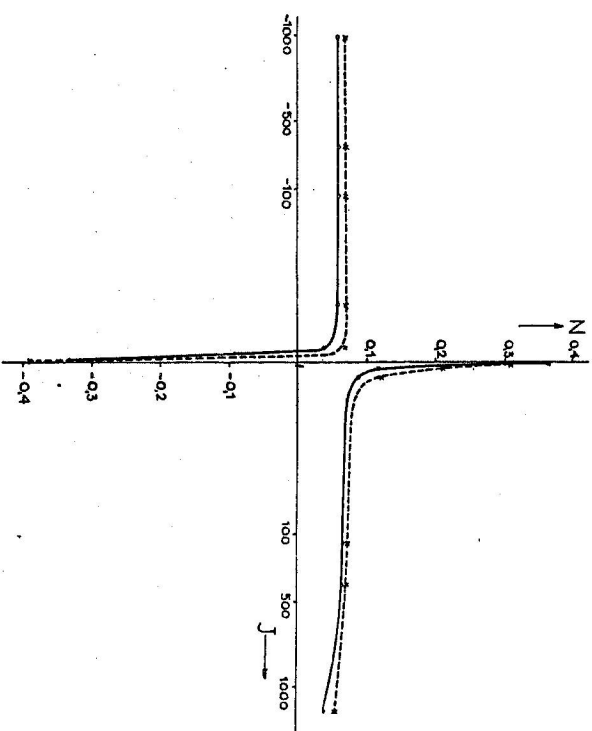
$$N = 4\pi k_1 R^2 \ln \frac{l_0}{R} - \frac{3}{2} \pi k_2 R^2 l_0^2 - 6\pi k_2 R^4 \ln \frac{l_0}{R} + \frac{2\pi J_0}{p^2 l_0}, \quad (9)$$

keď sme pri úprave príslušných výrazov zanedbávali hodnotu výrazu R^2/l_0^2 , resp. veličiny malé vyššieho rádu voči jednotke.

Ak do vzťahu (9) dosadíme $l_0 = 20$ cm, $R = 0,5$ cm ako rozmery valcovej tyče, na ktorej sa robili merania, uvedené v tab. 1, môžeme pre jednotlivé magnetické stavy tyče použitím príslušných hodnôt konštánt k_1 , k_2 vypočítat



Obr. 2.



Obr. 3.

týmto stavom prislúchajúce hodnoty stredových demagnetizačných faktorov. Na obr. 3² je čiarokovane vyznačená takýmto výročtom získaná závislosť $N = N(J)$ pozdĺž klesajúcej vetvy hysteréznej slučky a porovnaná s experimentálne získanými vyjadreniami tejto závislosti (plynné krivky). Vidieť, že i napriek zjednodušujúcim predpokladom výročtom získaná závislosť $N = N(J)$ kvalitatívne dobre vystihuje typický charakter zjavu hysterézie stredového demagnetizačného faktora.

LITERATÚRA

1. Schneider W., Zeitschrift für Physik 42, 1927, 883—898. 2. Warmuth K., Archiv für Elektrotechnik 30, 1936, 761—779. 3. Arkadiev V. K., Sbornik „Problemy ferromagnetizma i magnetodinamiki“, izd. AN SSSR, Moskva 1946, 129—132. 4. Hajko, Daniel-Szabó J., Čs. Čas. Fys. 6, 1956, 352—354. 5. Hajko V., Daniel-Szabó J., Mat.-fyz. Čas. SAV.

Došlo 8. 10. 1956.

ДВА ЗАМЕЧАНИЯ К РАЗМАГНИЧИВАЮЩИМ ФАКТОРАМ СТЕРЖНЕВЫХ ОБРАЗЦОВ

ВЛАДИМИР ГАЙКО

В И В О Д

В первом замечании приводится подсчет среднего размагничивающего фактора стержня прямоугольного сечения в состоянии полного насыщения стержня и указывается на обстоятельство, что при определении величины p согласно (1) стержни цилиндрические и стержни прямоугольного сечения имеют при том же p то самое значение среднего размагничивающего фактора.

Второе замечание относится к явлению гистерезиса среднего размагничивающего фактора. Указывается на возможность математического выражения расположения намагничивания вдоль стержня в отдельных состояниях, соответствующих отдельным точкам нисходящей ветви петли гистерезиса, отношением (7), где k_1 , k_2 константы, которые могут быть в разных магнетических состояниях разными. Использование отношения (7) и при упрощенном предположении, что направление намагничивания в каждом месте стержня ориентировано в направлении длины стержня, можно согласно (2) и (8) вычислить значения среднего размагничивающего фактора соответствующим отдельным магнитным состояниям стержня и таким образом получить математическое выражение зависимости $N = N(J)$. Эта зависимость графически представлена пунктиром на рис. 3 и сравнена с той же самой зависимостью полученной экспериментально. Видно, что вычислением полученная зависимость $N = N(J)$ качественно хорошо выражает особенный характер гистерезиса размагничивающего фактора.

² Kvôli prehľadnosti sme na obr. 3 volli pre magnetizácie do 100 G inú mierku ako pre demagnetizácie vyššie.

ZWEI BEMERKUNGEN ZU DEN ENTMAGNETISIERUNGS- FAKTOREN DER FERROMAGNETISCHEN STÄBE

VLADIMIR HAJKO

Zusammenfassung

In der ersten Bemerkung wird die Ausrechnung des ballistischen Entmagnetisierungsfaktors des Stabes vom rechteckigen Querschnitt im Zustand absoluter Sättigung des Stabes durchgeführt und es wird an die Umstände hingewiesen, daß die zylindrischen und rechteckigen Stäbe bei der Definition der Größe p nach (1) bei dem gleichen p denselben Wert des ballistischen Entmagnetisierungsfaktors haben.

Die zweite Bemerkung beschäftigt sich mit der Erscheinung der Hysterese des ballistischen Entmagnetisierungsfaktors. Es wird hingewiesen an die Möglichkeit mathematisch die Zerlegung der Magnetisierung längs des Stabes in den Zuständen, welche den einzelnen Punkten des absteigenden Astes der Hysteresisschleife entsprechen, mit Hilfe der Beziehung (7) auszudrücken, wo k_1 und k_2 Konstanten sind, die in den verschiedenen magnetischen Zuständen verschiedene Werte haben können. Bei Verwendung der Beziehung (7) und bei vereinfachender Voraussetzung, daß die Magnetisierung in jeder Stelle des Stabes dieselbe Richtung hat wie die Länge des Stabes, kann man gemäß der Beziehung (2) und (8) die Werte des ballistischen Entmagnetisierungsfaktors, welche den einzelnen magnetischen Zuständen des Stabes entsprechen, ausrechnen und in dieser Weise den Ausdruck der Beziehung $N = N(J)$ mathematisch bekommen. Dieser Ausdruck ist graphisch im Bilde 3 sichtlichweise dargestellt und mit der durch Experiment gewonnenen Beziehung $N = N(J)$ verglichen. Man sieht, daß die durch die Ausrechnung gewonnene Beziehung $N = N(J)$ qualitativ den typischen Charakter der Hysterese des Entmagnetisierungsfaktors gut ausdrückt.