MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, VI, 4 — 1956

O OBRÁTENÝCH ÚLOHÁCH STURMOVHO TYPU

JÁN HORVÁTH

Katedra matematiky Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave

§ 1. Úvod

V posledných rokoch vznikol celý rad nových prác v súvislosti s istou úlohou teórie kmitov Sturmových systémov a úlohami bezprostredne na ňu nadväzujúcimi. Teória kmitov Sturmových systémov vznikla ešte v minulom storočí. Vychádzalo sa pri nej z jednoduchej fyzikálnej úlohy — kmitania nite s konečným počtom hmotných bodov. Matematické vyšetrovanie tejto úlohy znamenalo objavenie celého radu význačných faktov. Napr. dôkaz reálnosti koreňov sekulárnej rovnice symetrickej matice, vypracovanie teórie Jakobiho foriem, ako aj teóriu redukcie kvadratickej formy na kánonický tvar. Ostatne to bola prvá úloha na vyšetrovanie malých kmitov systému s n stupňami voľnosti. Úlohou sa zaoberali mnohí význační matematici ako napr. d'Alembert, D. Bernoulli, Lagrange a iní.

Sám C. Sturm, podľa ktorého bola neskôr teória nazvaná, objavil pri vyšetrovaní tejto úlohy celý rad výsledkov z vyššej algebry a teórie diferenciálnych rovníc.

Ako sa ukázalo neskôr, teória Sturmových systémov mala bohaté aplikácie tak v rôznych oblastiach mechaniky (teória pozdĺžnych a torzných kmitov najrôznejších mechanizmov, teória plynov a kvapalín v potrubiach), ako aj v elektrotechnike (teória elektrických filtrov).

Bezprostredným zovšeobecňovaním tejto úlohy boli problémy, ktoré vznikli v prípade spojite rozložených parametrov systému — kmitanie strún, tyčí, pružín, membrán, dosiek, torzných kmitov hriadeľov, kmitanie vzduchu v rezonátoroch i teória elektrických kmitov vo vedeniach.

Všetky tieto úlohy, ako sa ukázalo, viedli v podstate k Sturm—Liouvillovej úlohe určenia charakteristických hodnôt a funkcií.

Z matematického hľadiska išlo v prvom prípade o riešenie systému obyčajných diferenciálnych rovníc s príslušnými počiatočnými podmienkami. V druhom prípade išlo o riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice s hraničnými a počiatočnými podmienkami. Pri tomto riešení šlo vždy o určenie frekvencií vlastných kmitov príslušného systému na základe daných diferenciálnych rovníc a podmienok.

Na úplne nový typ úloh narazíme, ak sa pokúsime poslednú úlohu obrátiť. Uvažujme napr. istý typ skleronómneho konzervatívneho mechanického systému, schopného konať malé kmity okolo rovnovážnej polohy. Nech je daná postupnosť kladných čísiel:

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots$$

konečná alebo i nekonečná. V poslednom prípade budeme navyše o tejto postupnosti predpokladať, že jej asymptotické chovanie nie je ľubovoľné, ale splňuje isté vhodné podmienky, závislé od typu mechanického systému (struna, membrána atď.). Úloha znie: Treba nájsť taký systém daného typu, ktorého vlastné frekvencie budú tvoriť práve túto postupnosť.

Práve tak ako klasická teória kmitov Sturmových systémov vyšla z fyzikálnej problematiky aj obrátená úloha sa objavila pri riešení rôznych úloh z klasickej i kvantovej fyziky. V nasledujúcom odseku sa preto pokúsime dať krátky prehľad o týchto úlohách a pre tie najjednoduchšie otázky podať priamo fyzikálne pozadie problému.

Zmyslom celej práce je podať jednak ucelený a sebestačný prehľad o dosiahnutých výsledkoch, jednak spresniť formuláciu radu známych výsledkov. Metóda podania je na niektorých miestach nová. V predloženej — prvej — časti práce vystačíme „zhruba povedané" s algebraickými pomôckami. Problémy vyžadujúce pomôcky z funkcionálnej analýzy budú predmetom ďalšej práce.

§ 2. Fyzikálna problematika vedúca k obrátenej úlohe

Prvé práce, v ktorých bola formulovaná obrátená úloha, vyšla z klasickej mechaniky. V prvom rade išlo o úlohu malých priečnych kmitov struny. Takto prvýkrát postavil úlohu V. A. Ambarcumjan [1], hoci už predtým možno nájsť nábehy k podobnému formulovaniu problému v prácach E. L. Inceho [2], Ž. Markoviča [3] aj W. Mothwurfa [4].

Riešením obrátenej úlohy pre lineárne pružné kontinuum sa zaoberal význačný sovietsky matematik M. G. Krejn v celom rade prác [5]—[10], v ktorých dosiahol pozoruhodné výsledky.

Klasická mechanika, ako sme uviedli, nebola jediným východiskom pre obrátenú úlohu. I v rade problémov kvantovej mechaniky možno dôjsť k obrátenej úlohe. Ako je známe, spektrálna analýza diferenciálnych operátorov je základným matematickým aparátom pri riešení mnohých úloh z kvantovej mechaniky. Preto je veľmi prirodzené postaviť i tu obrátenú úlohu — z daného spektra vlastných hodnôt určiť vlastnosti príslušného diferenciálneho operátora. Pritom treba poznamenať, že takto formulovaná úloha nadobúda v tejto oblasti zvláštny význam, a to tým, že obvykle je najprístupnejšie experimentálnemu vyšetrovaniu príslušné spektrum daného objektu. Ako príklad možno uviesť vyšetrovanie charakteru jadrových síl z daného spektra energetických hladín, alebo úlohy spojené s vyšetrovaním vlastností kryštálovej mriežky z príslušného energetického spektra.

Z tohto všetkého vysvitá, že možno formulovať viacero rôznych typov obrátených úloh. Pokúsime sa preto v ďalšom podať formuláciu niektorých jednoduchých fyzikálnych úloh, čo poskytne dosť názorný prehľad o rôznych druhoch obrátených úloh.

Najjednoduchší typ obrátenej úlohy dostaneme, ak budeme uvažovať dokonale ohybnú pružnú niť, nesúcu n hmotných bodov.

Úloha 1. Nech je daná dokonale ohybná pružná niť, nesúca n hmotných bodov. Spôsob upevnenia koncov nite je daný. Známa je aj dĺžka nite l, ako aj sila T, ktorou je niť rozťahovaná. Pre túto niť je daná postupnosť n kladných čísiel:

$$0 < p_1 < p_2 < \dots < p_n.$$

Treba nájsť veľkosť jednotlivých hmotných bodov, ako aj ich rozloženie tak, aby frekvencie vlastných malých priečnych kmitov nite tvorili uvedenú postupnosť. V prípade, že úloha nemá jednoznačné riešenie, treba nájsť podmienky zaručujúce jednoznačnosť.

Poznámka: Pri formulácii uvedenej úlohy sme predpokladali, že v prípade systému pozostávajúceho z n hmotných bodov s n stupňami voľnosti má spektrum jeho vlastných kmitov n frekvencií, n navzájom rôznych kladných čísiel. To, pravda, nemusí vždy platiť. Ako je známe, napr. úloha o malých torzných kmitoch n zotrvačníkov uložených na pružnom hriadeli, ktorý má zanedbateľne malú hmotu a pritom je na oboch koncoch voľný, dáva len n-1 frekvencií (navzájom rôznych kladných čísiel). Okrem toho sme predpokladali, že systém, ktorého spektrum pozostáva z n frekvencií, obsahuje n diskrétne rozložených hmôt. Ani to nemusí vždy platiť, ako plynie už z uvedeného príkladu malých torzných kmitov hriadeľa so zotrvačníkmi.

Na podobnú úlohu ako úloha 1 narazíme, ak miesto nite — jednorozmerného útvaru — budeme uvažovať dvojrozmerný — dokonale ohybnú pružnú membránu o zanedbateľnej hmote s bodove rozloženou hmotou.

Úloha 2. Daná je dokonale ohybná, pružná membrána o zanedbateľnej hmote, nesúca n hmotných bodov. Tvar membrány, ako aj spôsob upevnenia okraja je známy. Napätie T je dané. Okrem toho je daná postupnosť n kladných čísiel:

$$0 < p_1 < p_2 < \dots < p_n.$$

Úlohou je nájsť veľkosť jednotlivých hmotných bodov, ich rozloženie na membráne, tak aby frekvencie vlastných malých priečnych kmitov boli rovné danej postupnosti kladných čísiel, a súčasne vyšetriť podmienky pre jednoznačnosť riešenia.

V oboch týchto príkladoch išlo o určenie veľkosti a rozloženia n hmotných

bodov nespojite rozloženej hmoty. Vzniká, prirodzene, otázka, čo sa stane, ak namiesto konečného počtu hmotných bodov budeme predpokladať spočetne mnoho hmotných bodov, alebo prípadne spojité rozloženie hmoty, resp. kombináciu oboch možností diskrétneho i spojitého rozloženia hmoty. Hoci formulácia takto postavených fyzikálnych úloh bude skoro doslovným opakovaním prvých dvoch úloh, v metódach riešenia a vo výsledkoch sa budú oba prípady zásadne líšiť.

Predovšetkým treba poznamenať, že kým v prvom prípade išlo o systém s konečným počtom stupňov voľnosti, teraz pôjde o systémy s nekonečne mnoho stupňami voľnosti. Bezprostredným dôsledkom toho bude, že miesto konečnej postupnosti dostaneme nekonečnú postupnosť frekvencií vlastných kmitov. Na základe prvých dvoch úloh by sa dalo čakať, že pre ľubovoľne nekonečne rastúcu postupnosť kladných čísiel bude vždy existovať taký systém, ktorého frekvencie vlastných kmitov tvoria uvedenú postupnosť. Nie je to však tak. Už v prípade spojitého rozloženia hmoty kmitavého systému dokázal Liouville pre niektoré špeciálne prípady asymptotické vzťahy pre chovanie sa postupnosti frekvencií vlastných kmitov. Pozri R. Courant, D. Hilbert [12]. Preto pri formulácii všetkých ďalších úloh budeme všade najprv predpokladať, že daná postupnosť kladných čísiel spĺňuje všetky nutné podmienky na to, aby mohla tvoriť postupnosť frekvencií vlastných kmitov uvažovaného systému. Neskôr pri podrobnejšom rozbore jednotlivých úloh uvedieme tieto podmienky pre každú úlohu zvlášť.[1]

Úloha 3. Daná je struna o dĺžke l, rozťahovaná silou T, s ľubovoľným rozložením hmoty (t. j. tak spojitým, ako aj diskrétnym). Spôsob upevnenia jej koncov je známy. Nech

$$0 < p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots$$

je nekonečná postupnosť kladných čísiel, majúca už spomenuté vlastnosti. Treba nájsť strunu s takým rozložením hmoty, aby frekvencie jej vlastných malých priečnych kmitov tvorili uvedenú postupnosť. V prípade viacznačného riešenia máme nájsť podmienky jednoznačnosti.

Skoro doslovným zopakovaním formulácie úlohy 2 dostaneme nasledujúcu úlohu 4.

[1] Aby sme ozrejmili už teraz, o aké podmienky ide, pripomeňme, že je známe, napr. že pre vlastné kmity nehomogénnej struny so spojite rozloženou hmotou platí:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{\lambda_n}\right) = \frac{1}{\pi^2}\left(\int_0^l \sqrt{\varrho(x)}\,dx\right)^2,$$

kde λ_n sú okrem konštanty úmernosti frekvencie vlastných kmitov struny (konštanta úmernosti je rýchlosť priečneho vlnenia v strune), l je dĺžka struny a $\varrho(x)$ je lineárna hustota struny. Pozri R. Courant, D. Hilbert [12].

Úloha 4. Nech je daná dokonale ohybná pružná membrána s ľubovoľným rozložením hmoty. Tvar membrány a spôsob upevnenia jej okraja je známy. Napätie membrány je T. Daná je postupnosť kladných čísiel:

$$0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots,$$

ktorá splňuje uvedené požiadavky. Úlohou je nájsť membránu s takým rozložením hmoty, aby postupnosť frekvencií jej malých priečnych kmitov tvorila uvedenú postupnosť. Treba nájsť podmienky jednoznačnosti riešenia.

Úlohy 1—4 boli formulované pomocou jednoduchých mechanických objektov. Práve tak dobre ich možno formulovať na základe príslušných pojmov z teórie torzných kmitov hriadeľov, z teórie elektrických kmitov v článkových vedeniach, prípadne v dlhých vedeniach alebo z teórie pozdĺžnych kmitov plynov a kvapalín v potrubiach.

Napr. ak by sme chceli úlohu 1 formulovať pomocou pojmov z teórie elektrických kmitov, stačilo by zameniť hmotný bod ideálnou indukčnosťou a jednotlivé úseky nite odpovedajúcimi kapacitami zapojenými tak, aby tvorili reťazec premostený indukčnosťami.

Na rozdiel od dosiaľ uvažovaných úloh, ktoré sa líšili predovšetkým tým, že v prvých dvoch išlo o sústavy so sústredenými parametrami, kým v posledných dvoch o sústavy s ľubovoľne rozloženými parametrami, možno urobiť ďalšie zovšeobecňovanie obrátených úloh tak, že budeme uvažovať systémy s ľubovoľne rozloženými parametrami vyšších typov. Pod mechanickými systémami vyšších typov budeme rozumieť systémy, pre ktoré diferenciálna rovnica malých kmitov je rádu vyššieho ako druhého. Dostaneme takto i obrátené úlohy vyšších typov.

Pre jednoduchosť sa opäť obmedzíme na formulovanie týchto úloh na základe mechanických predstáv. Na to stačí zameniť v posledných dvoch úlohách strunu tyčou a miesto membrány uvažovať dosku.

Úloha 5. Daná je tenká pružná tyč konštantného prierezu q, o dĺžke l s ľubovoľným rozložením hmoty. Tvar prierezu a spôsob upevnenia koncov tyče je známy. Nech

$$0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$$

je nekonečná postupnosť kladných čísiel, vyhovujúca istým spomínaným podmienkam. Treba nájsť tyč s takým rozložením hmoty (za predpokladu, že modul pružnosti v ťahu E je nezávislý od príslušného rozloženia hmoty a je konštantný), aby frekvencie jej vlastných malých priečnych kmitov tvorili uvedenú postupnosť. Treba nájsť podmienky pre jednoznačnosť riešenia.

Podobná úloha pre dvojrozmerný prípad je úloha 6.

Úloha 6. Nech je daná pružná tenká doska o konštantnej hrúbke h, s ľubovoľným rozložením hmoty. Tvar dosky, ako aj hraničné podmienky dosky sú známe. Nech je okrem toho daná postupnosť kladných čísiel:

$$0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots,$$

ktorá splňuje ešte ďalšie, už spomínané podmienky. Za predpokladu, že elastické vlastnosti materiálu dosky, charakterizované modulom pružnosti v ťahu E a Poissonovou konštantou m, sú nezávislé od rozloženia hmoty a sú konštantné, treba nájsť dosku s takým rozložením hmoty, aby frekvencie jej vlastných malých priečnych kmitov tvorili uvedenú postupnosť. V prípade viacznačnosti riešenia, treba nájsť podmienky zaručujúce jednoznačnosť.

Z tohto krátkeho prehľadu vidno, že existujú jednak obrátené úlohy pre sústavy s konečným stupňom voľnosti, jednak úlohy pre sústavy s nekonečne mnoho stupňami voľnosti. Úlohu patriacu k prvému druhu úloh budeme nazývať *obrátenou Sturmovou úlohou*, kým v druhom prípade budeme hovoriť o *obrátenej Sturm—Liouvillovej úlohe*. Pri tejto úlohe budeme rozlišovať aj rád úlohy, pričom *rád* obrátenej úlohy bude rádom príslušného diferenciálneho operátora. Ako vidno, možno uvažovať jednorozmerné i viacrozmerné obrátené úlohy. Tým však celková klasifikácia obrátených úloh nie je vyčerpaná. Pri každej obrátenej úlohe sme zvlášť zdôrazňovali otázku jednoznačnosti riešenia. Dá sa totiž ľahko ukázať, že všetky takto formulované obrátené úlohy *nie sú jednoznačné*. Prvý na to upozornil N. Levinson [13]. Preto v ďalších prácach sa hľadali nutné, resp. postačujúce podmienky na to, aby úloha bola jednoznačná. Ako sa ukazuje, je možné zaručiť jednoznačnosť riešenia obrátených úloh viacerými spôsobmi, čo má za následok rôzne formulácie tej istej obrátenej úlohy. Medzi prvými, ktorí riešili tieto otázky, treba spomenúť už uvedeného N. Levinsona, ďalej V. A. Marčenka [14], G. Borga [15], L. A. Čudova [17], ako aj už spomínaného M. G. Krejna [5, 6, 11].

Medzi obrátenou Sturmovou úlohou a obrátenou Sturm—Liouvillovou úlohou nie je len formálny rozdiel, ako by sa na prvý pohľad mohlo zdať. Tak vo výsledkoch, ako i v metódach riešenia je zásadný rozdiel. Prvú z nich možno riešiť vcelku algebraicky, kým druhá z nich vyžaduje metódy funkcionálnej analýzy.

Z tohto dôvodu sa budeme zaoberať v prvej časti práce, ako sme už poznamenali, obrátenou Sturmovou úlohou a v druhej časti venujeme pozornosť obrátenej Sturm—Liouvillovej úlohe.

§ 3. Všeobecná formulácia Sturmovej úlohy

Prv než by sme prikročili k matematickej formulácii obrátenej Sturmovej úlohy, uvedieme si nasledujúcu definíciu:

Definícia 3.1. *Mechanický systém budeme nazývať Sturmovým systémom, ak kinetickú a potenciálnu energiu tohto systému možno vyjadriť v tvare*

$$T = \sum_{i=1}^{n} c_i \dot{q}_i^2, \qquad V = \sum_{i=1}^{n} a_i q_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} b_i q_i q_{i+1};$$
$$b_i > 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

t. j. kinetická energia neobsahuje súčiny rôznych zovšeobecnených rýchlostí a potenciálna energia je normálna Jakobiho forma.

Poznámka 1. V definícii 3.1 sa o normálnej Jakobiho forme pre potenciálnu energiu nič viac nepredpokladá. V tejto práci budeme však všade v ďalšom predpokladať, že kvadratická forma pre potenciálnu energiu V je pozitívne definitná.

Poznámka 2. Koeficienty a_i, b_i, c_i z definície 3.1 sú určené jednak vlastnosťami príslušného mechanického systému, jednak voľbou zovšeobecnených súradníc. Odhliadnuc od tejto poslednej skutočnosti sú koeficienty a_i, b_i závislé od formy väzieb v danom systéme, kým koeficienty c_i sú určené veľkosťami hmôt m_i príslušných hmotných bodov. (Medzi c_i a m_i platí totiž systém n lineárnych rovníc.) Čo sa týka koeficientov a_i, b_i je situácia podstatne zložitejšia, pretože sú závislé od väzieb v systéme, a teda koniec koncov sú funkciami polôh jednotlivých hmotných bodov. Táto závislosť môže byť veľmi rôzneho charakteru. V jednoduchých prípadoch môžeme pomerne ľahko určiť zo znalosti a_i, b_i priamo polohu jednotlivých hmotných bodov. V zložitých prípadoch dostávame algebraický, prípadne transcendentný systém rovníc pre neznáme súradnice, určujúce polohu hmotných bodov v systéme. O tomto systéme budeme všade v ďalšom predpokladať, že je riešiteľný. Takto otázku určenia rozloženia hmôt v Sturmovom systéme budeme považovať za rozriešenú, ak budeme poznať koeficienty a_i, b_i, c_i pri danom systéme zovšeobecnených súradníc. Vzhľadom na túto poznámku možno formulovať nasledujúcu úlohu:

Obrátená Sturmova úloha. Daný je istý typ Sturmovho systému (t. j. je známa závislosť koeficientov a_i, b_i, c_i z definície 3.1 od rozloženia hmoty v systéme v určitom systéme zovšeobecnených súradníc). Nech je okrem toho daná postupnosť n kladných čísiel:

$$0 < p_1 < p_2 < \dots < p_{n-1} < p_n.$$

Máme určiť rozloženie hmôt v systéme tak, aby frekvencie vlastných malých kmitov systému boli rovné danej postupnosti kladných čísiel.

Poznámka 3. Skôr ako by sme skúmali bližšie otázky riešiteľnosti a jednoznačnosti riešenia takto formulovanej úlohy, treba uviesť, že doteraz bola v literatúre — pokiaľ je nám známe — jednoduchšia úloha, ktorá predstavuje špeciálny prípad nami formulovanej všeobecnej obrátenej úlohy. Pre spomínaný špeciálny prípad potenciálna energia systému V má tvar:

$$V = \sum_{i=0}^{n} d_i (q_{i+1} - q_i)^2. \qquad (q_0 = q_{n+1} = 0)$$

Ľahko možno ukázať, že skutočne ide o Sturmov systém. Potenciálnu energiu z definície 3.1 možno po malých úpravách písať v tvare

$$V = \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i - b_{i-1})\, q_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} b_i (q_{i+1} - q_i)^2,$$

kde

$$b_0 = b_n = 0.$$

Ak je špeciálne

$$a_i - b_i - b_{i-1} = 0 \qquad (b_0 = b_n = 0)$$

pre $i = 2, 3, \dots, n$-1, dostaneme uvedený tvar potenciálnej energie, pričom je

$$d_0 = a_1 - b_1,$$

$$d_n = a_n - b_{n-1},$$

a

$$d_i = b_i$$

pre $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Typickým prípadom mechanického systému, ktorý má potenciálnu energiu uvedeného tvaru, je pružná niť o n hmotných bodoch. Obrátenú úlohu pre tento špeciálny prípad potenciálnej energie Sturmovho systému budeme nazývať *špeciálnou obrátenou Sturmovou úlohou.* Na základe tejto klasifikácie úloha 1 pre pružnú niť je špeciálnou obrátenou Sturmovou úlohou. V ďalšom sa budeme zaoberať touto úlohou. Prv než by sme prikročili k uvedeniu výsledkov o tejto úlohe, aby sme lepšie osvetlili problematiku, musíme rozobrať *priamu úlohu* pre pružnú niť s n hmotnými bodmi. Potom si zavedieme rad pojmov a odvodíme niekoľko viet, ktoré nám budú užitočné pri obrátenej úlohe. Nakoniec uvedieme riešenie špeciálnej obrátenej Sturmovej úlohy, ktorého autorom je M. G. Krejn. Záverom sa zmienime o niektorých všeobecných vetách, týkajúcich sa špeciálnej obrátenej Sturmovej úlohy.

§ 4. Riešenie priameho problému pre úlohu 1

Definícia 4.1. *Pod niťou budeme všade v ďalšom rozumieť každý jednorozmerný materiálny systém o zanedbateľnej vlastnej hmote.*

Poznámka 1. Matematické vyjadrenie dokonalej ohybnosti nite spočíva v tom, že napätia vznikajúce v niti upevnenej na oboch koncoch sú pri vychýlení nite z rovnovážnej polohy rovnobežné s dotyčnicami k okamžitému profilu nite.

Poznámka 2. Pružnosť nite značí, že napätia v niti možno počítať podľa Hookovho zákona.

Poznámka 3. Uvedené vlastnosti má každé pružné teleso, ktorého dĺžka podstatne prevyšuje ostatné rozmery a je rozťahované značne veľkou silou T, takže možno napätia vznikajúce pri ohybe nite zanedbať voči celkovému ťahu.

V ďalšom budeme vyšetrovať iba priečne kmity nite s n hmotnými bodmi, t. j. budeme predpokladať, že niť kmitá v rovine a jednotlivé elementy nite kmitajú pozdĺž priamok kolmých na rovnovážnu polohu nite. Predpoklad malých kmitov sa prejaví v tom, že budeme zanedbávať všetky vyššie mocniny (počínajúc druhou) relatívneho predĺženia ľubovoľnej časti nite.

Majme teda niť uvedených vlastností, o dĺžke l, rozťahovanú silou T, pričom niť má n hmotných bodov a tieto sú očíslované zľava doprava od 1 až do n. Nech ich hmoty sú $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}, m_n$ a vzdialenosti medzi nimi $l_0, l_1, l_2, \ldots, l_n$, kde $l_0 \geqq 0$ je vzdialenosť prvého hmotného bodu od ľavého konca nite a $l_n \geqq 0$ vzdialenosť od pravého konca nite.

Kmitanie nite závisí aj od spôsobu upevnenia koncov nite. Všimnime si iba tri typy upevnení:

1. Pravý koniec nite je voľný a ľavý upevnený — niť N_1, pravý koniec nite je upevnený, ľavý je voľný — niť N_1'.
2. Oba konce nité sú pevne upevnené — niť N_2.
3. Oba konce nite sú voľné — niť N_3.

V prípade voľných koncov nite, vec možno realizovať tak, že koniec nite opatríme prstencom o zanedbateľnom polomere, ktorý sa voľne kĺže po dokonale hladkej tenkej tyči, kolmej na rovnovážnu polohu nite.

V prvom a treťom prípade je možné pripustiť, že sa hmotné body nachádzajú i na koncoch nite, t. j. $l_0 = 0$, $l_n = 0$, čiže možno uvažovať i taký model sústavy, kde prstenec má konečnú hmotu. Posledný prípad má za následok, že pri riešení vzniknú isté komplikácie, a to najmä v treťom prípade, keď sa niť môže pohybovať v dôsledku vlastnej zotrvačnosti v jednom smere. Treba teda rozlišovať „skutočné" frekvencie od „formálnych" frekvencií kmitov nite. Pozri F. R. Gantmacher a M. G. Krejn [18].

Zvoľme za kladný smer osi Y jeden z kolmých smerov k rovnovážnej polohe nite. Za uvedených predpokladov poloha jednotlivých hmotných bodov je udaná výchylkami $y_1, y_2, \ldots, y_n$ z rovnovážnej polohy.

Pre kinetickú a potenciálnu energiu tohto systému bude platiť:[2]

[2] Potenciálna energia nite s n hmotnými bodmi je rovná

$$V = \sum_{i=0}^{n} T \cdot \Delta l_i,$$

kde Δl_i sú predĺženia jednotlivých úsekov nite pri jej vychýlení z rovnovážnej polohy a potenciálnu energiu systému v rovnovážnej polohe sme položili rovnú nule. Podľa uvedeného predpokladu o malých kmitoch, vyplýva

$$\left[\frac{\Delta l_i}{l_i}\right]^2 \approx 0,$$

t. j.

$$\frac{\Delta l_i}{l_i} = \frac{1}{l_i}\left(\sqrt{l_i^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} - l_i\right)$$

a

$$\left[\frac{\Delta l_i}{l_i}\right]^2 = 2 + \frac{(y_{i+1} - y_i)^2}{l_i^2} - 2\sqrt{1 + \frac{(y_{i+1} - y_i)^2}{l_i^2}} = \frac{(y_{i+1} - y_1)^2}{l_i^2} - \frac{2\Delta l_i}{l_i} = 0$$

a z toho

$$\Delta l_i = \frac{1}{2}\,\frac{(y_{i+1} - y_i)^2}{l_i},$$

čiže

$$V = \frac{T}{2} \sum_{i=0}^{n} \frac{(y_{i+1} - y_i)^2}{l_i},$$

kde

$$y_0 = 0, \quad y_n = 0.$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} m_i \dot{y}_i^2, \qquad V = \frac{T}{2} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{l_i} (y_{i+1} - y_i)^2, \tag{1}$$

kde

$$y_0 = y_{n+1} = 0.$$

Z posledných dvoch vzťahov vidno, že uvažovaný systém je Sturmovým systémom. Kmitanie systému vyjadríme Lagrangeovými rovnicami:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}\right) + \frac{\partial V}{\partial y_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

alebo

$$m_i \ddot{y}_i + T\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{l_{i-1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{l_i}\right) = 0 \tag{2}$$

$$y_0 = y_{n+1} = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Rovnice (2) predstavujú systém lineárnych diferenciálnych rovníc. Riešením tohto systému budú vlastné výchylky hmotných bodov voči rovnovážnej polohe. Riešenie týchto rovníc (2) budeme hľadať v tvare

$$y_i = A_i e^{\lambda t}, \tag{3}$$

$$A_0 = A_{n+1} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

kde A_i a λ sú konštanty. Po dosadení (3) do (2) dostaneme sústavu homogénnych rovníc vzhľadom na konštanty A_i:

$$-\frac{T}{l_{i-1}} A_{i-1} + \left(m_i \lambda^2 + \frac{T}{l_{i-1}} + \frac{T}{l_i}\right) A_i - \frac{T}{l_i} A_{i+1} = 0, \tag{4}$$

$$A_0 = A_{n+1} = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Táto sústava homogénnych rovníc bude mať nenulové riešenie len vtedy, keď determinant sústavy (4) je rovný nule:

$$\begin{vmatrix} m_1\lambda^2 + \frac{T}{l_0} + \frac{T}{l_1}, & -\frac{T}{l_1} & & & \\ -\frac{T}{l_1}, & m_2\lambda^2 + \frac{T}{l_1} + \frac{T}{l_2}, & -\frac{T}{l_2} & & \\ & -\frac{T}{l_2}, & m_3\lambda^2 + \frac{T}{l_2} + \frac{T}{l_3}, & -\frac{T}{l_3} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & -\frac{T}{l_{n-1}}, & m_n\lambda^2 + \frac{T}{l_{n-1}} + \frac{T}{l_n} \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Pritom nevyznačené prvky determinantu sú rovné nule. Determinant (5) predstavuje pre λ^2 rovnicu n-tého stupňa. Ak v rovnici (5) zavedieme miesto λ^2, $-\varkappa$ a rovnicu (5) vydelíme súčinom $m_1 m_2 \ldots m_n$, dostaneme sekulárnu rovnicu normálnej Jakobiho matice. Ako je známe, normálna Jakobiho matica má všetky svoje charakteristické čísla reálne a jednoduché. Pozri [18].

Naviac možno ukázať, že všetky $\varkappa$ (t. j. $-\lambda^2$) budú kladné. Aby sme to dokázali, zaveďme nové neznáme v systéme (4) vzťahom

$$B_{i-1} = -\frac{T}{l_{i-1}}(A_i - A_{i-1}), \ (i = 1, 2, \ldots, n+1) \quad (6)$$

a označme

$$g_{i-1} = \frac{l_{i-1}}{T}, \quad (7)$$

dostaneme tento systém homogénnych rovníc:

$$\begin{aligned}
&g_0B_0 + A_1 &&= 0,\\
&-B_0 + m_1\lambda^2A_1 + B_1 &&= 0,\\
&\qquad -A_1 + g_1B_1 + A_2 &&= 0,\\
&\qquad\qquad -B_1 + m_2\lambda^2A_2 + B_2 &&= 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &&\\
&\qquad\qquad\qquad -B_{n-1} + m_n\lambda^2A_n + B_n &&= 0,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad -A_n + g_nB_n &&= 0,
\end{aligned} \quad (8)$$

ktorý je ekvivalentný systému (4) [s pribraním systému (6)]. Nenulové riešenie tohto systému bude existovať opäť len vtedy, ak bude platiť

$$\begin{vmatrix}
g_0 & 1 & & & & & \\
-1 & m_1\lambda^2 & 1 & & & & \\
 & -1 & g_1 & 1 & & & \\
 & & -1 & m_2\lambda^2 & 1 & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & & -1 & m_n\lambda^2 & 1 \\
 & & & & & -1 & g_n
\end{vmatrix} = 0, \quad (9)$$

kde na prázdnych miestach sú prvky rovné nule. Ak v tomto determinante vymeníme stĺpce za riadky, dostaneme determinant známy z teórie reťazových zlomkov — tzv. kontinuant. Avšak konečný n-členný reťazový zlomok sa rovná nule vtedy, ak jeho n-tý zblížený čitateľ je rovný nule. Preto rovnicu (9) možno písať v tvare

$$g_0 + \frac{1|}{|m_1\lambda^2} + \frac{1|}{|g_1} + \frac{1|}{|m_2\lambda^2} + \frac{1|}{|g_2} + \ldots + \frac{1|}{|m_n\lambda^2} + \frac{1|}{|g_n} = 0. \quad (10)$$

Reťazový zlomok v (9) bude mať n-tý zblížený čitateľ rovný polynómu n-teho stupňa pre λ^2 s kladnými koeficientmi, ako to plynie zo štruktúry tohto zlomku. Preto musia byť všetky λ^2, ak majú byť koreňmi (9), záporné, t. j.:

$$\lambda^2 = -\omega^2, \quad (11)$$

kde ω je reálne.

Rovnica (5) má teda $2n$ korene rýdzo imaginárne pre λ, pričom vždy po dvoch sú komplexne združené. Partikulárne riešenie pre j-tú súradnicu bude predstavovať harmonické kmitanie s frekvenciou ω_k

$$y_{jk} = A_{jk}\,e^{i\omega_k t} + \bar{A}_{jk}\,e^{-i\omega_k t}, \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \quad (12)$$

kde prvý index sa vzťahuje na súradnicu a druhý na frekvenciu. $\bar{A}_{jk}$ je konštanta komplexne združená s A_{jk}. Všeobecné riešenie pre j-tú súradnicu bude superpozíciou n harmonických kmitov o frekvenciách

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}, \omega_n, \quad (13)$$

ktoré sú vlastnými frekvenciami uvažovanej sústavy

$$y_i = \sum_{k=1}^{n}(A_{jk}\,e^{i\omega_k t} + \bar{A}_{jk}\,e^{-i\omega_k t}). \quad (14)$$

Ostáva určiť konštanty A_{jk}, resp. $\bar{A}_{jk}$. Pre každú frekvenciu ω_k dostaneme dosadením do (4) sústavu n rovníc pre hľadané konštanty A_{jk}:

$$\frac{1}{g_{j-1}}A_{j-1,k} + \left(m_j\omega_k^2 - \frac{1}{g_{j-1}} - \frac{1}{g_j}\right)A_{jk} + \frac{1}{g_j}A_{j+1,k} = 0. \quad (15)$$

Vzhľadom na to, že ide o homogénnu sústavu rovníc, je touto sústavou určený pomer všetkých A_{jk} k jednému z nich. Zvoľme za ľubovoľnú konštantu A_{1k}, potom všetky ostatné A_{jk} (pri pevnom k) možno vyjadriť pomocou A_{1k}. Koeficienty úmernosti medzi A_{jk} a A_{1k}

$$\varepsilon_{jk} = \frac{A_{jk}}{A_{1k}} \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \quad (16)$$

nazývame preto *rozdeľovacími koeficientmi amplitúd*. Pozri Strelkov [19]. Po zavedení týchto koeficientov do systému (4) dostaneme sústavu, ktorá plne určí tieto koeficienty, keďže ako sa možno ľahko presvedčiť, determinant tejto sústavy je od nuly rôzny. Výhodnejšie bude tieto koeficienty počítať zo sústavy rovníc (8). Zaveďme preto ešte pomocné koeficienty:

$$\eta_{j-1,k} = \frac{B_{j-1,k}}{A_{1k}}. \quad \begin{matrix}(j = 1, 2, \ldots, n+1)\\ (k = 1, 2, \ldots, n)\end{matrix} \quad (17)$$

Tak dostaneme:

$$\begin{aligned}
&g_0\eta_{0k} &&= -1,\\
&-\eta_{0k} + \eta_{1k} &&= m_1\omega_k^2,\\
&\qquad g_1\eta_{1k} + \varepsilon_{2k} &&= +1,\\
&\qquad\quad -\eta_{1k} - m_2\omega_k^2\varepsilon_{2k} + \eta_{2k} &&= 0,\\
&\qquad\qquad -\varepsilon_{2k} + g_2\eta_{2k} + \varepsilon_{3k} &&= 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &&\\
&\qquad\qquad\qquad -\eta_{n-1,k} - m_n\omega_k^2\varepsilon_{nk} + \eta_{n,k} &&= 0.
\end{aligned} \quad (18)$$

Pritom sme vypustili poslednú rovnicu zo sústavy (8), pretože táto je lineárne závislá od ostatných rovníc. Determinant sústavy (18) je rovný g_0 a pre koeficienty ε_{jk} $(j \neq 1)$ dostaneme:

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{g_0}\begin{vmatrix}
g_0 & & & & & -1 & & \\
-1 & 1 & & & & m_1\omega_k^2 & & \\
 & g_1 & 1 & & & 1 & & \\
 & -1 & -m_2\omega_k^2 & 1\ldots & & 0 & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & -1 & -m_{j-1,k}\omega_k^2, & 1, & 0 & & \\
 & & & -1, & g_{j-1}, & 0 & & \\
 & & & & -1 & 0 & 1 & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & & & 0\ldots & -1, & -m_n\omega_k^2, \;\; 1
\end{vmatrix},$$

alebo ak presunieme $(2j - 1)$-tý stĺpec na miesto druhého stĺpca a vytkneme z neho -1, dostaneme:

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{g_0}\begin{vmatrix}
g_0 & 1 & & & & & & \\
-1 & -m_1\omega_k^2 & 1 & & & & & \\
 & -1 & g_1 & 1 & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & -1 & -m_{j-1}\omega_k^2 & 1 & & \\
 & & & & -1 & g_{j-1} & 0 & \\
 & & & & & -1 & 1 & 0 \\
 & & & & & & g_j & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & & & & -1 & -m_n\omega_k^2 \;\; 1
\end{vmatrix}, (j = 2, \ldots, n)$$

Použitím Laplaceovej vety dostaneme:

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{g_0}\begin{vmatrix}
g_0 & 1 & & & & \\
-1 & -m_1\omega_k^2 & 1 & & & \\
 & -1 & g_1 & 1 & & \\
 & & -1 & -m_2\omega_k^2 & 1 & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & & -1 & g_{j-1}
\end{vmatrix}, (j = 2, 3, \ldots, n) \quad (19)$$

Determinant (19) je opäť kontinuant, a preto možno ε_{jk} počítať ako posledného zblíženého čitateľa reťazca

$$\frac{1}{g_0}\left(g_0 + \frac{1|}{|-m_1\omega_k^2} + \frac{1|}{|g_1} + \frac{1|}{|-m_2\omega_k^2} + \ldots + \frac{1|}{|g_{j-1}}\right). \quad (20)$$
$$(j = 2, 3, \ldots, n)$$

Vzťahmi (19) a (20) sú určené všetky $\varepsilon_{jk} (j = 2, 3, \ldots, n)$ odpovedajúce frekvencii ω_k. Keďže podľa (16) sú ε_{jk} podielmi komplexných čísiel a ε_{jk}, ako to vidno z (20), sú reálne, je to len vtedy možné, keď argumenty všetkých $A_{jk} (j = 1, 2, \ldots, n)$ sú rovnaké.

$$A_{jk} = \frac{1}{2} a_{jk}\, e^{i\varphi_k}, \quad (21)$$

kde $\frac{1}{2} a_{jk}$ je modul a φ_k argument rovnaký pre všetky A_{jk} (k pevné). Použitím rozdeľovacích koeficientov možno posledný vzťah zapísať v tvare

$$A_{jk} = \frac{1}{2} a_{1k}\varepsilon_{jk}\, e^{i\varphi_k}.$$

Partikulárne riešenie (12) možno napísať takto:

$$y_{jk}^* = \frac{1}{2} a_{1k}\varepsilon_{jk}(e^{i(\omega_k t + \varphi_k)} - e^{-i(\omega_k t + \varphi_k)}) \quad (j, k = 1, 2, \ldots, n)$$

alebo

$$y_{jk}^* = a_{1k}\varepsilon_{jk} \cos(\omega_k t + \varphi_k) \quad (22)$$

a všeobecné riešenie je:

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\varepsilon_{jk} \cos(\omega_k t + \varphi_k), \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \quad (23)$$

kde ε_{jk} sú určené rovnicami (19) a (20) a ω_k vzťahom (10). Ostáva určiť konštanty a_{1k} a φ_k pre $k = 1, 2, \ldots, n$. To je presné $2n$ konštánt a tieto možno určiť z $2n$ počiatočných podmienok. Fyzikálna interpretácia nájdeného výsledku je takáto: Vlastné kmity každého hmotného bodu sú zložené z n harmonických kmitov s vlastnými frekvenciami sústavy ω_k, pričom harmonické kmitanie s frekvenciou ω_k sa deje pre každý hmotný bod s rovnakou alebo s opačnou fázou, a ak je daná amplitúda niektorej harmonickej zložky o frekvencii ω_k pre jediný hmotný bod, sú tým určené amplitúdy všetkých harmonických zložiek o rovnakej frekvencii pre všetky ostatné hmotné body.

Treba poznamenať, že obvykle nemusíme poznať absolútne hodnoty amplitúd a počiatočných fáz. Pri vyšetrovaní vlastných kmitov má podstatnú dôležitosť poznanie vlastných frekvencií a rozdeľovacích koeficientov amplitúd. Z tohto dôvodu systémy rovníc (4), a najmä (8), majú zásadný význam. Riešeniu systému (8) sa venovalo veľa pozornosti pre jeho dôležitosť pri riešení mnohých úloh z technickej praxe. V práci K. Klottera [20] je uvedených 28 spôsobov riešenia tohto systému.

Príklad 4.1. Daná je niť o dĺžke $l = 160$ cm, s troma hmotnými bodmi o hmotách $m_1 = 2$g, $m_2 = 1$g, $m_3 = 3$g, pričom je rozťahovaná silou $T = 10$ Mdýn. Vzdialenosti jednotlivých hmotných bodov sú $l_0 = 20$ cm, $l_1 = 40$ cm, $l_2 = 60$ cm, $l_3 = 40$ cm. Niť je upevnená na oboch koncoch. Treba nájsť vlastné frekvencie a maticu rozdeľovacích koeficientov nite.

Frekvenčná rovnica bude znieť:

$$2 + \frac{1|}{|-2\omega^2} + \frac{1|}{|4} + \frac{1|}{|-\omega^2} + \frac{1|}{|6} + \frac{1|}{|-3\omega^2} + \frac{1|}{|4} = 0,$$

pričom vo zvolenej sústave fyzikálnych jednotiek vyjde kruhová frekvencia ω v kHz. Zblížené zlomky reťazového zlomku na ľavej strane rovnice sú:

$$2,\ \frac{-4\omega^2+1}{-2\omega^2},\ \frac{-16\omega^2+6}{-8\omega^2+1},\ \frac{16\omega^4-10\omega^2+1}{8\omega^4-3\omega^2},\ \frac{96\omega^4-76\omega^2+12}{48\omega^4-26\omega^2+1},$$

$$\frac{-288\omega^6+244\omega^4-46\omega^2+1}{-144\omega^6+86\omega^4-6\omega^2},\ \frac{-1152\omega^6+1072\omega^4-260\omega^3+16}{-576\omega^6+392\omega^4-50\omega^2+1}.$$

Pre ω^2 dostávame teda rovnicu:

$$1152\omega^6 - 1072\omega^4 + 260\omega^2 - 16 = 0,$$

ktorá má korene:

$$\omega_{1,2} = \pm 0{,}30798, \qquad \omega_{3,4} = \pm 0{,}50000, \qquad \omega_{5,6} = \pm 0{,}76531,$$

a teda vlastné frekvencie sú:

$$\omega_1 = 307{,}98 \text{ Hz}, \qquad \omega_2 = 500{,}00 \text{ Hz}, \qquad \omega_3 = 765{,}31 \text{ Hz}$$

a vlastné kmitočty:

$$\nu_1 = 49{,}02 \text{ Hz}, \qquad \nu_2 = 79{,}57 \text{ Hz}, \qquad \nu_3 = 121{,}80 \text{ Hz}.$$

Pre rozdeľovacie koeficienty platia vzťahy:

$$\varepsilon_{1k} = 1,$$

$$\varepsilon_{2k} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1|}{|-2\omega_k^2} + \frac{1|}{|4}\right), \qquad (k = 1, 2, 3)$$

$$\varepsilon_{3k} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1|}{|-2\omega_k^2} + \frac{1|}{|4} + \frac{1|}{|-\omega_k^2} + \frac{1|}{|6}\right),$$

čiže:

$$\varepsilon_{1k} = 1, \qquad \varepsilon_{2k} = 3 - 8\omega_k^2, \qquad \varepsilon_{3k} = 48\omega_k^4 - 38\omega_k^2 + 6$$

a matica rozdeľovacích koeficientov je:

$$\begin{Vmatrix} 1, & 1, & 1, \\ 2{,}24 & 1 & -1{,}69 \\ 2{,}83 & -0{,}5 & 0{,}21 \end{Vmatrix}.$$

Výchylky sú teda dané vzťahmi:

$$y_1 = a_{11}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + a_{12}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) + a_{13}\cos(\omega_3 t + \varphi_3).$$
$$y_2 = 2{,}24a_{11}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + a_{12}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) - 1{,}69a_{13}\cos(\omega_3 t + \varphi_3).$$
$$y_3 = 2{,}83a_{11}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - 0{,}50a_{12}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) + 0{,}21a_{13}\cos(\omega_3 t + \varphi_3).$$

Konštanty $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ by sme určili zo šiestich podmienok, počiatočných výchyliek a rýchlosti všetkých troch hmotných bodov.

§ 5. Zavedenie pojmov poddajnosti a tuhosti.

Uvedenému spôsobu riešenia rovníc (8) možno dať veľmi názornú fyzikálnu interpretáciu zavedením niektorých jednoduchých pojmov, charakterizujúcich štruktúru kmitavého systému. Tieto pojmy boli výhodne použité aj pri riešení obrátenej úlohy M. G. Krejnom. Zavedieme si nasledujúce pojmy: tuhosť a poddajnosť k-teho úseku nite, dynamickú tuhosť izolovaného hmotného bodu, dynamickú tuhosť viazaného hmotného bodu a dynamickú tuhosť a poddajnosť nite. Poznamenajme, že tieto pojmy nie sú v literatúre dostatočne presne definované.

Definícia 5.1. *Tuhosťou k-teho úseku nite c_k budeme nazývať podiel:*

$$c_k = \frac{T}{l_k},$$

kde l_k je dĺžka tohto úseku a T je sila rozťahujúca niť.

Poznámka 1. Fyzikálny význam tuhosti k-teho úseku nite dostaneme nasledujúcim spôsobom. Uvažujme úsek nite o pôvodnej dĺžke l_{k0}. Za pôsobenia sily T sa predĺži tento úsek o dĺžku $\triangle l_k = l_k - l_{k0}$. Podľa Hookovho zákona platí $T =$ konšt $\triangle l_k$. Vzhľadom na to, že o sile T sme predpokladali, že je natoľko veľká, aby platilo $l_k \gg l_{k0}$, je za uvedeného priblíženia konštanta úmernosti rovná $\frac{T}{l_k}$, t. j. tuhosti k-tého úseku nite; čím kratší je úsek nite, pri danej konštantnej sile T, tým je „tuhší".

Poznámka 2. Poddajnosťou k-tého úseku nite g_k budeme rozumieť prevrátenú hodnotu tuhosti:

$$g_k = \frac{l_k}{T}.$$

Fyzikálny význam poddajnosti je opäť názorný: čím dlhší je úsek nite, pri konštantnej sile T, tým viac sa niť predĺži — niť je „poddajnejšia".

Definícia 5.2. *Dynamickou tuhosťou izolovaného hmotného bodu h, ktorý koná harmonický pohyb po priamke, voláme záporne vzatý podiel z veľkosti zotrvačnej sily hmotného bodu R a výchylky tohto bodu:*

$$h = -\frac{R}{y}.$$

Poznámka. Fyzikálny význam tohto pojmu je nasledovný: Harmonický pohyb o kruhovej frekvencii ω, je daný rovnicou

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0,$$

čiže platí

$$h = +\frac{m\ddot{y}}{y} = -m\omega^2.$$

Zároveň platí

$$h = -\frac{R}{y} = \frac{F}{y} = -\frac{F_0}{y_0},$$

kde F je veľkosť vonkajšej, harmonicky sa s časom meniacej sily, F_0 jej amplitúda a y_0 amplitúda výchylky. Z poslednej rovnice vyplýva

$$y_0 = -\frac{F_0}{h},$$

amplitúda výchylky je úmerná amplitúde vonkajšej sily; z toho plynie, že čím väčšia bude dynamická tuhosť izolovaného hmotného bodu, tým menšia bude amplitúda jeho výchylky pri danom F_0. Z predchádzajúceho vzťahu vyplýva aj to, že pri veľmi veľkej frekvencii vonkajšej sily sila o konečnej amplitúde vyvolá len nepatrnú výchylku.

Definícia 5.3. *Uvažujme niť s n hmotnými bodmi, ľubovoľným spôsobom na oboch koncoch upevnenú. Nech na k-tý hmotný bod pôsobí harmonická sila $F = F_0 \sin \omega t$. Vtedy dynamickou tuhosťou H_k viazaného k-tého hmotného bodu budeme volať podiel medzi veľkosťou súčtu zložiek všetkých síl, vzniknutých v dôsledku pôsobenia harmonickej sily (t. j. zotrvačných a väzbových) a pôsobiacich na k-tý hmotný bod, ku výchylke tohto k-tého hmotného bodu.*

Veta 5.1. *V prípade nite N_2 (na oboch koncoch upevnenej) platí pre $H_k^{(2)}$ vzťah*

$$H_k^{(2)} = \frac{\alpha_k}{\beta_k} + h_k + \frac{\gamma_k}{\delta_k},$$

kde h_k je dynamická tuhosť izolovaného k-tého hmotného bodu a $\frac{\beta_k}{\alpha_k}$, $\frac{\delta_k}{\gamma_k}$ sú tieto reťazové zlomky:

$$\frac{\beta_k}{\alpha_k} = g_{k-1} + \frac{1|}{|h_{k-1}} + \frac{1|}{|g_{k-2}} + \ldots + \frac{1|}{|h_1} + \frac{1|}{|g_0}.$$

$$\frac{\delta_k}{\gamma_k} = g_k + \frac{1|}{|h_{k+1}} + \frac{1|}{|g_{k+1}} + \ldots + \frac{1|}{|h_n} + \frac{1|}{|g_n}.$$

Poznámka. Pojmy dynamickej tuhosti izolovaného hmotného bodu a dynamickej tuhosti viazaného hmotného bodu sú dva zásadne rozdielne pojmy a ani v prípade, že sa niť skladá z jediného hmotného bodu, nie je dynamická tuhosť tohto viazaného hmotného bodu rovná dynamickej tuhosti izolovaného hmotného bodu. V prípade nite upevnenej na oboch koncoch totiž platí:

$$H_1^{(2)} = \frac{1}{g_0} + h_1 + \frac{1}{g_1},$$

kde h_1 je dynamická tuhosť izolovaného hmotného bodu a g_0, g_1 sú poddajnosti jednotlivých úsekov nite.

Dôkaz. Podľa definície platí pre dynamickú tuhosť k-tého viazaného hmotného bodu vzťah:

$$Q_k = -H_k^{(2)} y_k,$$

kde Q_k je súčet zotrvačnej sily R_k a y zložiek väzbových síl Y_k, Y_{k-1} oboch susedných úsekov nite; y_k výchylka k-tého hmotného bodu nite. Pre Q_k teda platí:

$$Q_k = R_k - Y_k + Y_{k-1}.$$

Vzhľadom na to, že k-tý hmotný bod bude konať harmonický pohyb s frekvenciou ω, ktorého rovnica znie

$$\ddot{y}_k + \omega^2 y_k = 0,$$

dostaneme:

$$h_j y_j + c_{j-1}(y_j - y_{j-1}) - c_j(y_{j+1} - y_j) = -Q_k \delta_{jk}, \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (24)$$

kde

$$y_0 = 0, \qquad y_{n+1} = 0$$

a

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k. \end{cases}$$

Zavedením nových neznámych vzťahmi:

$$g_{j-1} Y_{j-1} = y_{j-1} - y_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n, n + 1)$$

dostaneme systém rovníc úplne podobný systému (8) s tým rozdielom, že tentoraz nebude systém homogénny. Pre k-tú súradnicu dostaneme:

$$y_k = \frac{D_k}{D_2},$$

kde D_2 je determinant z rovnice (9), stačí iba v ňom zameniť $m_j\lambda^2$ dynamickou tuhosťou izolovaného j-teho hmotného bodu h_j. Pre determinant D_k platí:

$$D_k = \begin{vmatrix} g_0 & 1 & & & & & & 0 & & & \\ -1 & h_1 & 1 & & & & & 0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & -1 & g_{k-2} & 1 & & & 0 & & & \\ & & & -1 & h_{k-1} & 1 & & 0 & & & \\ & & & & -1 & g_{k-1} & & 0 & & & \\ & & & & & -1 & & -Q_k & 1 & & \\ & & & & & & & 0 & g_k & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & 0 & & -1 & g_n \end{vmatrix}. \tag{25a}$$

Rozvedením tohto determinantu podľa $2k$-tého stĺpca a použitím Laplaceovej vety dostaneme:

$$D_k = -\beta_k\delta_k Q_k,$$

kde β_k a δ_k sú rovné:

$$\beta_k = \begin{vmatrix} g_0 & 1 & & & \\ -1 & h_1 & 1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & -1 & h_{k-1} & 1 \\ & & & -1 & g_{k-1} \end{vmatrix} \qquad \delta_k = \begin{vmatrix} g_k & 1 & & & \\ -1 & h_{k+1} & 1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & -1 & h_n & 1 \\ & & & -1 & g_n \end{vmatrix}. \tag{25}$$

Medzi Q_k a y_k platí:

$$Q_k = -\frac{D_2}{\beta_k\delta_k}y_k,$$

čiže

$$H_k^{(2)} = \frac{D_2}{\beta_k\delta_k}. \tag{26}$$

Rozviňme ešte determinant D_2 podľa prvkov $2k$-tého riadku a použime opäť na jednotlivé subdeterminanty Laplaceovu vetu, dostaneme:

$$D_2 = \beta_k\gamma_k + h_k\beta_k\delta_k + \alpha_k\delta_k, \tag{27}$$

kde

$$\alpha_k = \begin{vmatrix} g_0 & 1 & & \\ -1 & h_1 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & -1 & h_{k-1} \end{vmatrix} \qquad \gamma_k = \begin{vmatrix} h_{k+1} & 1 & & \\ -1 & g_{k+1} & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & -1 & g_n \end{vmatrix} \tag{28}$$

Po dosadení a menších úpravách dostaneme:

$$H_k^{(2)} = \frac{\alpha_k}{\beta_k} + h_k + \frac{\gamma_k}{\delta_k}.$$

Všetky determinanty $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k$ sú kontinuanty a naviac β_k a α_k sú n-tým zblíženým čitateľom a menovateľom toho istého reťazového zlomku:

$$\frac{\beta_k}{\alpha_k} = g_{k-1} + \frac{1|}{|h_{k-1}} + \frac{1|}{|g_{k-2}} + \ldots + \frac{1|}{|h_1} + \frac{1|}{|g_0}$$

a podobne δ_k a γ_k spĺňujú vzťah:

$$\frac{\delta_k}{\gamma_k} = g_k + \frac{1|}{|h_{k+1}} + \frac{1|}{|g_{k+1}} + \frac{1|}{|h_{k+2}} + \ldots + \frac{1|}{|h_n} + \frac{1|}{|g_n}.$$

Úhrnom sme dostali pre dynamickú tuhosť viazaného k-tého hmotného bodu:

$$H_k^{(2)} = h_k + \left(\frac{1|}{|g_{k-1}} + \frac{1|}{|h_{k-1}} + \ldots + \frac{1|}{|g_0}\right) + \left(\frac{1|}{|g_k} + \frac{1|}{|h_{k+1}} + \ldots + \frac{1|}{|g_n}\right). \tag{29}$$

Poznámka. Aj v tomto prípade platí ako v prípade jediného izolovaného hmotného bodu:

$$A_k = \frac{F_0}{|H_k^{(2)}|},$$

kde A_k je amplitúda výchylky k-tého hmotného bodu a F_0 amplitúda vonkajšej harmonickej sily.

Veta 5.2. V prípade nite o n hmotných bodoch, na jednom konci upevnenej a na druhom konci voľne pohyblivej, pre dynamickú tuhosť viazaného k-tého hmotného bodu $H_k^{(1)}$ platí:

$$H_k^{(1)} = h_k + \left(\frac{1|}{|g_{k-1}} + \frac{1|}{|h_{k-1}} + \ldots + \frac{1|}{|g_0}\right) + \left(\frac{1|}{|g_k} + \frac{1|}{|h_{k+1}} + \ldots + \frac{1|}{|g_{n-1}} + \frac{1|}{|h_n}\right),$$

pre niť N_1,

$$H_k^{(1')} = h_k + \left(\frac{1|}{|g_{k-1}} + \frac{1|}{|h_{k-1}} + \ldots + \frac{1|}{|g_1} + \frac{1|}{|h_1}\right) + \left(\frac{1|}{|g_k} + \frac{1|}{|h_{k+1}} + \ldots + \frac{1|}{|g_n}\right)$$

pre niť N_1'.

Dôkaz. Dokážeme napr. prvý z uvedených vzťahov pre niť N_1. Dôkaz druhého vzťahu je úplne podobný. Majme teda niť N_1. Analogickými úvahami ako pri dôkaze vety 5.1 dostaneme nasledujúci systém rovníc:

$$\begin{aligned} -Y_{j-1} + h_j y_j + Y_j &= -Q_k\delta_{jk}, \quad (j = 1, \ldots, n) \\ -y_{i-1} + g_{i-1}Y_{i-1} + y_i &= 0, \quad (i = 1, \ldots, n+1) \end{aligned} \tag{30}$$

kde

$$y_0 = 0 \qquad y_{n+1} = y_n,$$

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{pre } j = k \\ 0 & \text{pre } j \neq k. \end{cases}$$

Riešením tohto systému pre y_k dostaneme:

$$y_k = -\frac{D_k}{D_1} Q_k,$$

kde pre D_k a D_1 platí:

$$D_k = \beta_k \delta'_k,$$
$$D_1 = \beta_k \gamma'_k + h_k \beta_k \delta'_k + \alpha_k \delta'_k,$$

pričom kontinuanty γ'_k, δ'_k sú rovné:

$$\gamma'_k = \begin{vmatrix} h_{k+1} & 1 & & & \\ -1 & g_{k+1} & 1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & -1 & g_{n-1} & 1 \\ & & & -1 & h_n \end{vmatrix}, \qquad \delta'_k = \begin{vmatrix} g_k & 1 & & & \\ -1 & h_{k+1} & 1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & -1 & g_{n-1} & 1 \\ & & & -1 & h_n \end{vmatrix}.$$

a kontinuanty α_k, β_k sú dané vzťahmi (25), (28).

Úhrnom sme dostali pre Q_k:

$$Q_k = -\left(\frac{\alpha_k}{\beta_k} + h_k + \frac{\gamma'_k}{\delta'_k}\right) y_k$$

a dynamická tuhosť $H_k^{(1)}$ viazaného k-tého hmotného bodu je v tomto prípade:

$$H_k^{(1)} = h_k + \left(\frac{1|}{|g_k} + \frac{1|}{|h_{k+1}} + \ldots + \frac{1|}{|g_{n-1}} + \frac{1|}{|h_n}\right) + \left(\frac{1|}{|g_{k-1}} + \frac{1|}{|h_{k-1}} + \ldots + \frac{1|}{|g_0}\right).$$

Druhá časť vety pre niť N_1 sa dá dokázať úplne podobne.

Poznámka. Ako vidno zo vzťahu pre dynamickú tuhosť $H_k^{(1)}$ nite N_1 nevystupuje v ňom člen obsahujúci g_n. Fyzikálne vysvetlenie tejto skutočnosti je veľmi jednoduché: úsek nite l_n zostáva stále sám k sebe rovnobežný — kolmý na smer kmitania nite, v dôsledku čoho nemá nijakého vplyvu na kmitanie nite.

Veta 5.3. *V prípade nite s n hmotnými bodmi, na oboch koncoch voľnej pre dynamickú tuhosť viazaného k-tého hmotného bodu $H_k^{(3)}$ platí:*

$$H_k^{(3)} = h_k + \left(\frac{1|}{|g_{k-1}} + \frac{1|}{|h_{k-1}} + \frac{1|}{|g_{k-2}} \ldots + \frac{1|}{|g_1} + \frac{1|}{|h_1}\right) + \\ + \left(\frac{1|}{|g_k} + \ldots + \frac{1|}{|g_{n-1}} + \frac{1|}{|h_n}\right).$$

Dôkaz. Z úvah analogických ako pri dôkaze lemmy 6.1 dostaneme pre amplitúdy výchyliek jednotlivých hmotných bodov tento systém rovníc:

$$-Y_{j-1} + h_j y_j + Y_j = -Q_k \delta_{jk}, \qquad (j = 1, \ldots, n)$$
$$-y_{j-1} + g_{j-1} Y_{j-1} + y_j = 0, \quad (j = 1, \ldots, n, n+1) \quad (30a)$$

pričom

$$y_0 = y_1, \qquad y_n = y_{n+1}$$

a

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{pre } j = k \\ 0 & \phantom{\text{pre }} j \neq k. \end{cases}$$

Riešením tohto systému dostaneme

$$y_k = -\frac{D_k}{D_3} Q_k,$$

kde pre D_3 a D_k platí:

$$D_k = \beta'_k \delta'_k,$$
$$D_3 = \beta'_k \gamma'_k + h_k \beta'_k \delta'_k + \alpha'_k \delta'_k.$$

Kontinuanty α'_k, β'_k sú dané determinantmi:

$$\alpha'_k = \begin{vmatrix} h_1 & 1 & & & \\ -1 & g_1 & 1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & -1 & g_{k-2} & 1 \\ & & & -1 & h_{k-1} \end{vmatrix} \qquad \beta'_k = \begin{vmatrix} h_1 & 1 & & & \\ -1 & g_1 & 1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & -1 & h_{k-1} & 1 \\ & & & -1 & g_{k-1} \end{vmatrix}.$$

Pre Q_k teda platí:

$$Q_k = -\left(\frac{\alpha'_k}{\beta'_k} + h_k + \frac{\gamma'_k}{\delta'_k}\right) y_k$$

a pre dynamickú tuhosť viazaného k-tého hmotného bodu $H_k^{(3)}$ dostaneme v prípade N_3:

$$H_k^{(3)} = h_k + \left(\frac{1|}{|g_{k-1}} + \frac{1|}{|h_{k-1}} + \ldots + \frac{1|}{|g_1} + \frac{1|}{|h_1}\right) + \left(\frac{1|}{|g_k} + \ldots + \frac{1|}{|g_{n-1}} + \frac{1|}{|h_n}\right).$$

Zavedieme teraz ďalšie pojmy.

Definícia 5.4. *Majme niť s n hmotnými bodmi. Dynamickou tuhosťou nite N_1 budeme volať veličinu:*

$$H_1^{(1)} = \frac{1|}{|g_n} + \frac{1|}{|h_n} + \frac{1|}{|g_{n-1}} + \frac{1|}{|h_{n-1}} + \ldots + \frac{1|}{|h_1} + \frac{1|}{|g_0}.$$

Dynamickou tuhosťou nite N'_1 budeme nazývať veličinu:

$$H^{(1')} = \frac{1|}{|g_0} + \frac{1|}{|h_1} + \frac{1|}{|g_1} + \frac{1|}{|h_2} + \ldots + \frac{1|}{|h_n} + \frac{1|}{|g_n}.$$

Poznámka 1. Prevrátenú hodnotu $H^{(1)}$, resp. $H^{(1')}$ budeme nazývať dynamickou poddajnosťou nite N_1, resp. N'_1, a značiť:

$$G^{(1)} = \frac{1}{H^{(1)}}, \qquad G^{(1')} = \frac{1}{H^{(1')}}. \tag{31}$$

Z definície (4) vyplývajú pre $G^{(1)}$ a $G^{(1')}$ nasledujúce vzťahy:

$$G^{(1)} = g_n + \frac{1|}{|h_n} + \frac{1|}{|g_{n-1}} + \ldots + \frac{1|}{|h_1} + \frac{1|}{|g_0},$$

$$G^{(1')} = g_0 + \frac{1|}{|h_1} + \frac{1|}{|g_1} + \ldots + \frac{1|}{|h_n} + \frac{1|}{|g_n}.$$

Definícia 5.5. *Majme niť N_3 s n hmotnými bodmi. Dynamickou tuhosťou nite N_3 vzhľadom na ľavý koniec nite budeme rozumieť reťazec:*

$$H_{-}^{(3)} = \frac{1|}{|g_0} + \frac{1|}{|h_1} + \ldots + \frac{1|}{|g_{n-1}} + \frac{1|}{|h_n}$$

a dynamickou tuhosťou nite N_3 vzhľadom na pravý koniec nite budeme volať reťazec:

$$H_{+}^{(3)} = \frac{1|}{|g_n} + \frac{1|}{|h_n} + \ldots + \frac{1|}{|g_1} + \frac{1|}{|h_1}.$$

Poznámka 2. Prevrátene hodnoty dynamickej tuhosti nite N_3, $H_{-}^{(3)}$, $H_{+}^{(3)}$ budeme nazývať dynamickými podajnosťami nite N_3 a značiť:

$$G_{-}^{(3)} = \frac{1}{H_{-}^{(3)}}, \qquad G_{+}^{(3)} = \frac{1}{H_{+}^{(3)}}. \tag{31a}$$

Z definície 5.5 vyplývajú pre takto zavedené veličiny reťazce:

$$G_{-}^{(3)} = g_0 + \frac{1|}{|h_1} + \frac{1|}{|g_1} + \ldots + \frac{1|}{|g_{n-1}} + \frac{1|}{|h_n};$$

$$G_{+}^{(3)} = g_n + \frac{1|}{|h_n} + \frac{1|}{|g_{n-1}} + \ldots + \frac{1|}{|g_1} + \frac{1|}{|h_1}.$$

Poznámka 3. *Fyzikálny význam* všetkých uvedených *pojmov* si ozrejmime nasledujúcou úvahou. Majme niť o $(n+1)$ hmotných bodoch, ktorá má aspoň jeden koniec voľný, pričom na tomto konci je umiestený jeden z hmotných bodov. Počítajme dynamickú tuhosť viazaného hmotného bodu, ktorý je na tomto voľnom konci. Napr. pre niť N_1' podľa lemmy 6.2 dostaneme:

$$H_0^{(1')} = h_0 + \frac{1|}{|g_0} + \frac{1|}{|h_1} + \ldots + \frac{1|}{|h_n} + \frac{1|}{|g_n}.$$

Za predpokladu, že hmota tohto nultého hmotného bodu je zanedbateľne malá, dostaneme:

$$\lim_{h_0 \to 0} H_0^{(1')} = H^{(1')}. \tag{32}$$

Úplne podobne by sme mohli odvodiť analogické vzťahy pre niť N_1 a N_3. Napr. v prípade nite N_1 dostaneme vzťah:

$$\lim_{h_{n+1} \to 0} H_{n+1}^{(1)} = H^{(1)},$$

ktorý hovorí, že $H^{(1)}$ dostaneme tak, keď zoberieme niť N_1 o $(n+1)$ hmotných bodoch a utvoríme $H_{n+1}^{(1)}$, za predpokladu, že $(n+1)$-vý hmotný bod je na voľnom konci, a necháme jeho hmotu m_{n+1} blížiť sa k nule. Podobne pre niť N_3 by sme dostali:

$$\lim_{h_{n+1} \to 0} H_{n+1}^{(3)} = H_{+}^{(3)}, \qquad \lim_{h_0 \to 0} H_0^{(3)} = H_{-}^{(3)}. \tag{32a}$$

Na základe týchto vzťahov môžeme teraz jednoducho interpretovať tieto dynamické tuhosti nití tak, že nepredstavujú nič iného, ako vplyv pôsobenia celej nite na kmitanie voľného konca, spôsobované vonkajšou harmonickou silou. Napr. ak na ľavý voľný koniec nite N_1' bude pôsobiť harmonická sila o amplitúde F_0, pričom ľavý koniec nesie zanedbateľne malú hmotu, bude medzi amplitúdou výchylky ľavého konca a amplitúdou sily F_0 platiť vzťah:

$$A_0 = \frac{F_0}{H^{(1')}},$$

čím väčšia bude dynamická tuhosť nite $H^{(1')}$, tým menšia bude výchylka voľného konca nite N_1' pri danej konštantnej amplitúde sily. Podobne možno fyzikálne interpretovať aj ostatné zavedené veličiny.

Pomocou zavedených pojmov možno dať názornú fyzikálnu interpretáciu vlastných kmitov nite. Uvažujme nite N_1, N_1', N_2, N_3. Pre frekvenčné rovnice vlastných kmitov dostaneme zo systémov (24), (30) a (30a) vzťahy:

$$D_1 = 0, \quad \text{pre } N_1 \text{ a } N_1', \qquad D_2 = 0 \quad \text{pre } N_2, \qquad D_3 = 0 \quad \text{pre } N_3.$$

Z definície dynamickej tuhosti viazaného k-tého hmotného bodu, resp. z dôkazov viet 5.1, 5.2, 5.3 vyplýva, že pre všetky tri typy nití v prípade vlastných kmitov platí:

$$H_k^{(i)} = 0 \qquad (i = 1, 1', 2, 3) \tag{33}$$

pre k ľubovoľné. Tým sme dokázali vetu 5.4.

Veta 5.4. *Nech je daná ktorákoľvek z nití N_1, N_1', N_2, N_3. Dynamická tuhosť viazaného k-tého hmotného bodu v prípade vlastných kmitov príslušnej nite je pre každé k rovná nule.*

Z poznámky 3 na základe vety 5.4 vyplýva táto veta:

Veta 5.5. *V prípade vlastných kmitov nite N_i $(i = 1, 1', 3)$ je dynamická tuhosť nite $H^{(i)}$ rovná nule. Pre $i = 3$ je špeciálne:*

$$H_{+}^{(3)} = H_{-}^{(3)} = 0. \tag{34}$$

Dôkaz vety plynie zo vzťahov (32) a (32a) a vety 5.4.

Poznámka 4. Pre prípad vlastných kmitov nite N_i $(i = 1, 1', 3)$ dynamická poddajnosť nite $G^{(i)}$ rastie nad každé medze.

Poznámka 5. Vzniká, prirodzene, otázka, prečo sa v posledných vetách nehovorilo o dynamickej poddajnosti, resp. tuhosti nite N_2. K tomu treba poznamenať len toľko, že sa tieto pojmy, ako vidieť z poznámky 3, zaviedli len pre nite, ktoré mali aspoň jeden voľný koniec, čo v prípade nite N_2 nie je možné. Na druhej strane možno ukázať, že tieto pojmy zavedené pre niť N_1, resp. N_1' do istej miery charakterizujú i chovanie nite N_2, s tým istým rozložením hmoty. Majme totiž niť N_2 a uvoľnime jeden jej koniec, nech je to napr. pravý — takže z nej dostaneme niť N_1 s rovnakým rozložením hmoty. Vyšetrujme teraz vlastné kmity nite N_2. Podľa vety 5.4 platí pre ne:

$$H_k^{(2)} = 0. \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Položme $k = n$, dostaneme:

$$\frac{1}{g_n} + h_n + \frac{1|}{|g_{n-1}} + \frac{1|}{|h_{n-1}} + \ldots + \frac{1|}{|h_1} + \frac{1|}{|g_0} = 0.$$

Po jednoduchých úpravách dostaneme:

$$-g_n = \frac{1|}{|h_n} + \frac{1|}{|g_{n-1}} + \ldots + \frac{1|}{|h_1} + \frac{1|}{|g_0},$$

čiže:

$$g_n + \frac{1|}{|h_n} + \frac{1|}{|g_{n-1}} + \ldots + \frac{1|}{|g_1} + \frac{1|}{|h_1} + \frac{1|}{|g_0} = 0.$$

Tým sme dokázali vetu 5.6.

Veta 5.6. *Pre vlastné kmity nite N_2 platia vzťahy:*

$$G^{(1)} = 0, \qquad G^{(1')} = 0, \tag{35}$$

kde $G^{(1)}$ a $G^{(1')}$ sú dynamické poddajnosti nití N_1 a N_1', ktoré majú rovnaké rozloženie hmôt ako N_2, ale majú jeden koniec voľný.

Dôsledok. V prípade vlastných kmitov nite N_2 na základe definícií 4 a 5 bude platiť, že $H^{(1)}$, resp. $H^{(1')}$ bude rásť nad každé medze.

Podobnú vlastnosť ako vyslovenú vo vete 5.6 možno nájsť i medzi niťou N_1, resp. N_1' a niťou N_3. Uvažujme vlastné kmity nite N_1'.

Na základe vety 5.4 platí:

$$H_k^{(1')} = 0$$

pre k ľubovoľné. Ak položíme $k = n$, bude platiť:

$$\frac{1}{g_n} + h_n + \frac{1|}{|g_{n-1}} + \frac{1|}{|h_{n-1}} + \ldots + \frac{1|}{|g_1} + \frac{1|}{|h_1} = 0.$$

Podobnými úvahami, ako pri dôkaze predchádzajúcej vety dostaneme:

$$g_n + \frac{1|}{|h_n} + \frac{1|}{|g_{n-1}} + \ldots + \frac{1|}{|h_2} + \frac{1|}{|g_1} + \frac{1|}{|h_1} = 0,$$

čiže

$$G_+^{(3)} = 0,$$

čo možno formulovať vetou 5.7.

Veta 5.7. *Pre vlastné kmity nite N_1, resp. N_1' platia vzťahy:*

$$G_-^{(3)} = 0, \quad \text{resp.} \quad G_+^{(3)} = 0, \tag{36}$$

kde $G_-^{(3)}$ a $G_+^{(3)}$ sú dynamické poddajnosti nite, ktorú dostaneme z N_1, resp. N_1' tým, že aj jej pevný koniec uvoľníme.

Všimnime si teraz *fyzikálny význam* uvedených *viet*. Fyzikálny význam anulovania dynamickej tuhosti ľubovoľného viazaného hmotného bodu nite pre prípad vlastných kmitov je ten, že reakcia nitę na pôsobenie vonkajšej sily v ľubovoľnom bode nite je rovná nule, a teda stačí nechať pôsobiť na ktorýkoľvek hmotný bod nite ľubovoľne malú vonkajšiu harmonickú silu o frekvencii rovnej vlastnej frekvencii nite, aby sa hmotné body rozkmitali s neohraničene rastúcou amplitúdou. V prípade dynamickej tuhosti nite je situácia rovnaká, iba s tým rozdielom, že ľubovoľne malá harmonická sila pôsobí na voľnom konci.

Fyzikálny význam dvoch posledných viet je voči predchádzajúcim vetám trocha odlišný — vyjadruje totiž inú vlastnosť vlastných kmitov. Uvažujme napr. niť N_2. Na základe vety E platí pre ňu:

$$G^{(1')} = 0,$$

kde N_1' má rovnaké rozloženie hmôt ako N_2. Ak si ešte všimneme vzorce pre rozdeľovacie koeficienty, tak vidno, že okrem konštanty g_0 predstavujú tieto párne zblížené čitatele reťazca pre $G^{(1')}$. V prípade kmitania nite N_2 s frekvenciou ω udaním amplitúdy harmonickej zložky o tejto frekvencii pre jediný hmotný bod sú plne určené amplitúdy kmitov o tej istej frekvencii pre všetky ostatné hmotné body. Toto rozdelenie, charakterizované rozdeľovacími koeficientmi, určuje tvar okamžitého profilu nite pri kmitaní — „formu kmitania nite“. V prípade vlastných kmitov nite „forma kmitania“ bola určená maticou rozdeľovacích koeficientov. Veta 5.6 tak nehovorí nič iného, ako že niť pri vlastných kmitoch je schopná zachovať si „formu vlastných kmitov“, nezávisle od veľkosti pôsobiacich vonkajších síl — nech by boli tieto sily akokoľvek veľké. Pri frekvencii rovnej vlastnej frekvencii nite, nie sú schopné zmeniť „formu kmitania nite“, určenú maticou rozdeľovacích koeficientov, resp. reťazcom pre $G^{(1')}$.

Záverom uveďme, že zavedené pojmy pre niť možno všeobecne zaviesť pre systém n hmotných bodov s lineárnymi väzbami. Pritom treba poznamenať, že tieto pojmy nedávajú len názorný význam o fyzikálnych vlastnostiach systému, ale umožňujú aj výhodné i prakticky dôležité riešenie celého radu technických úloh. Pozri V. P. Terskich [21, 22, 23, 24].

§ 6. Riešenie špeciálnej obrátenej Sturmovej úlohy — obrátenej úlohy 1.

V tomto paragrafe sa budeme zaoberať riešením úlohy 1. V prvom rade sa budeme zaoberať podrobne otázkou jednoznačnosti riešenia.

Predovšetkým treba poznamenať, že úloha 1 v uvedenej formulácii nedáva jednoznačné riešenie.

Už v prípade jediného p_1 úloha nie je jednoznačná. Pre niť N_2 majúcu jediný hmotný bod m_1 z vety 5.6 vyplýva:

$$g_0 + \frac{1}{|h_1|} + \frac{1}{|g_1|} = 0$$

čiže

$$h_1 = -\left(\frac{1}{g_0} + \frac{1}{g_1}\right).$$

Ak ešte uvážime, že platí

$$h_1 = -m_1 p_1^2 \qquad g_0 = \frac{l_0}{T}, \qquad g_1 = \frac{l_1}{T};$$

dostaneme po jednoduchej úprave

$$m_1 l_0 l_1 = \frac{Tl}{p_1^2},$$

kde pre l_0, l_1 platí ešte ďalšia podmienka:

$$l_0 + l_1 = l.$$

Z týchto dvoch rovníc pre neznáme m_1, l_0, l_1 vyplýva, že existuje nekonečne mnoho trojíc hodnôt m_1, l_0, l_1, ktoré vyhovujú obom posledným rovniciam. Pre zvolené l_0, odpovedajúce hodnoty m_1 a l_1, sú:

$$l_1 = l - l_0,$$

$$m_1 = \frac{Tl}{p_1^2} \cdot \frac{1}{l_0(l - l_0)}.$$

Dokonca, aj v prípade, že je daná celková hmota $M = m_1$, existujú dve riešenia $l_0 = a$, $l_1 = l - a$, a $l_0' = l - a$, $l_1' = a$.

Podobne je to aj v prípade dvoch čísiel p_1 a p_2. Pre neznáme m_1, m_2, l_0, l_1, l_2 dostaneme tieto tri rovnice:

$$l_0 + l_1 + l_2 = l,$$

$$g_0 + \frac{1}{|-m_1 p_1^2|} + \frac{1}{|g_1|} + \frac{1}{|-m_2 p_1^2|} + \frac{1}{|g_2|} = 0,$$

$$g_0 + \frac{1}{|-m_1 p_2^2|} + \frac{1}{|g_1|} + \frac{1}{|-m_2 p_2^2|} + \frac{1}{|g_2|} = 0.$$

Z týchto rovníc po dosadení za g_i $(i = 0, 1, 2)$ a po jednoduchých úpravách dostaneme:

$$l_0 + l_1 + l_2 = l,$$

$$l_0 l_1 l_2 m_1 m_2 = \frac{lT^2}{p_1^2 p_2^2},$$

$$m_1 l_0 (l_0 + l_1) + m_2 l_2 (l_0 + l_1) = \frac{lT}{p_1^2 p_2^2} (p_1^2 + p_2^2).$$

Z týchto rovníc je okamžite vidno, že opäť existuje nekonečne mnoho riešení. Ak si zvolíme hodnoty pre l_0 a l_1, dostaneme pre zvyšujúce veličiny rovnice:

$$l_2 = l - l_1 - l_0$$

$$m_1 m_2 = \frac{lT^2}{l_0 l_1 (l - l_0 - l_1)} \cdot \frac{1}{p_1^2 p_2^2},$$

$$l_0(l - l_0)\, m_1 + (l - l_1 - l_0)(l_0 + l_1)\, m_2 = \frac{lT}{p_1^2 p_2^2} (p_1^2 + p_2^2),$$

pričom opäť pre každé l_0 a l_1 dostávame jediné l_2 a dve rôzne dvojice hodnôt pre m_1 a m_2.

Príklad 6.1. Nech je daná niť o dĺžke $l = 100$ cm, rozťahovaná silou $T = 10$ Mdýn. Nech sú okrem toho dané čísla:

$$p_1 = 200, \qquad p_2 = 300.$$

Treba nájsť veľkosť oboch hmotných bodov m_1 a m_2, ak $l_0 = 10$ cm, $l_1 = 50$ cm, aby uvedené čísla predstavovali vlastné frekvencie nite v Hz.

Riešenie: Platí:

$$l_2 = 40,$$

$$m_1 m_2 = \frac{1250}{9},$$

a pre m_1 a m_2:

$$9m_1 + 24m_2 = \frac{3250}{9}.$$

Dostaneme dve dvojice hodnôt:

$$m_1' = 25{,}73 \text{ g}, \qquad m_2' = 5{,}40 \text{ g},$$
$$m_1'' = 14{,}40 \text{ g}, \qquad m_2'' = 9{,}65 \text{ g}.$$

Vo všeobecnosti z n hodnôt pre $p_1, p_2, \ldots, p_n$ dostaneme n algebraických rovníc pre $(2n + 1)$ neznámych, $l_0, l_1, \ldots, l_m, m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}, m_n$ pričom medzi vzdialenosťami $l_0, l_1, l_2, \ldots, l_n$ platí ešte jedna rovnica, totiž, že ich súčet musí byť rovný l. Pomocou eliminácie dospejeme nakoniec vždy k jedinej algebraickej rovnici, obsahujúcej vo všeobecnosti $(n + 1)$ neznámych, pričom sa dá zrejme čakať, že táto rovnica má nekonečne mnoho riešení.

Ostáva teda jediná možnosť, ako zaručiť jednoznačnosť, a to pripojiť ešte ďalších n rovníc pre neznáme $l_0, l_1, \ldots, l_n, m_1, \ldots, m_n$. Toto, pravda, možno vykonať *najrôznejším spôsobom*. I tak ostáva otvorenou otázka, či dostaneme jediné riešenie alebo ich bude viac. Z uvedených príkladov totiž vyplýva, že aj keď sme udali ďalšie podmienky — pre $n = 1$, veľkosť hmotného bodu m_1, pre $n = 2$, hodnoty l_0 a l_1 — aj vtedy sme dostali viac riešení. Pre $n = 1$ sme dostali v podstate to „isté“ riešenie, pretože druhé riešenie bol iba zrkadlový obraz prvého: fyzikálne išlo vždy o tú istú niť. V druhom prípade — $n = 2$ —

sme dostali nielen matematicky, ale i fyzikálne dve rôzne nite, ktoré riešili danú úlohu.[3]

Jedna z možností, ako dostať iba jediné riešenie, je táto. Nech je daná ďalšia postupnosť čísiel: $0 < q_1 < q_2 < \ldots < q_n$. Úlohu budeme riešiť s tou dodatkovou podmienkou, že budeme žiadať, aby frekvencie vlastných kmitov nite, ktorá má to isté rozloženie hmôt ako pôvodná niť, ale má o jeden voľný koniec viac, resp. menej, boli rovné číslam q_i $(i = 1, \ldots, n)$. Napr. pre niť N_2 budeme žiadať, aby frekvencie vlastných kmitov nite N_1, resp. N_1' s tým istým rozložením hmôt, boli rovné číslam postupnosti $\{q_i\}$ a v prípade nite N_1, resp. N_1' naopak. Podobne to bude medzi niťou N_1, resp. N_1', a niťou N_3. Uvedeným spôsobom riešil úlohu M. G. Krejn [18]. Pravda, toto nie je jediná možnosť zaručenie jednoznačnosti riešenia úlohy.

Pre úlohu 1 v jej pôvodnej formulácii, napriek tomu, že nedáva jednoznačné riešenie, možno dokázať rad viet. Pretože obsah týchto viet i metóda ich dokazovania spočíva na výsledkoch úlohy 1 (ktorú doplníme tak, že sa stane jednoznačnou), budeme sa v prvom rade zaoberať touto úlohou.

Úloha 1a. Nech je daná niť z úlohy 1. Pre túto niť nech je daná postupnosť $2n$ kladných čísiel:

$$0 < q_1 < p_1 < q_2 < \ldots < q_n < p_n.$$

Treba nájsť veľkosť jednotlivých hmotných bodov, ako aj ich rozloženia tak, aby frekvencie vlastných malých priečnych kmitov nite v prípade N_2 (oba konce nite upevnené) boli $p_1, p_2, \ldots, p_n$ a v prípade N_1 (ľavý koniec pevný, pravý voľný) $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Poznámka. Vzniká, prirodzene, otázka, či uvedené rozloženie čísiel p_i a q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ je jedine možné, aby úloha mala zmysel. Možno ukázať, že vskutku je to jediné rozloženie čísiel, pri ktorom úloha má riešenie. Dôkaz tohto tvrdenia vyplynie z nasledujúceho.

Pri riešení úlohy 1a s výhodou použijeme pojem „kladná dvojica mnohočlenov", zavedený Stieltjesom pri vyšetrovaní fukcionálnych reťazových zlomkov.

Definícia 6.1. *Dva mnohočleny rovnakého stupňa* $n \geqq 0$

$$A(\lambda) = A_0\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + \ldots + A_{n-1}\lambda + A_n;$$
$$B(\lambda) = B_0\lambda^n + B_1\lambda^{n-1} + \ldots + B_{n-1}\lambda + B_n,$$

dané v určitom poradí, tvoria kladnú dvojicu $\{A(\lambda), B(\lambda)\}$ *stupňa* n, *ak ich možno vyjadriť v tvare*

$$A(\lambda) = A_0 \prod_{i=1}^{n} (\lambda + \lambda_i), \qquad B(\lambda) = B_0 \prod_{i=1}^{n} (\lambda + \mu_i),$$

[3] Ak predpíšeme hodnoty $l_0, l_1, l_2, \ldots, l_n$ ostáva n rovníc pre n neznámych $m_1, m_2, \ldots, m_n$. V tomto prípade sa dá čakať, že bude „všeobecne" konečný počet riešení. Matematický bezchybný rozbor všetkých možností zdá sa však komplikovaný.

kde

$$0 < \mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \lambda_2 < \ldots < \mu_n < \lambda_n, \tag{37}$$

a pritom

$$A_0 > 0, \quad B_0 > 0.$$

Poznámka 1. Z definície vyplýva, že mnohočleny $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ kladnej dvojice majú všetky koeficienty kladné a korene týchto mnohočlenov sú jednoduché a záporné, pričom sa striedajú v naznačenom poradí.

Poznámka 2. Pojem kladnej dvojice n-tého stupňa možno rozšíriť i na prípad $n = 0$. V tomto prípade kladná dvojica značí, že čísla A_0, B_0 sú kladné.

Pre takto definovaný pojem platí nasledujúca lemma, pochádzajúca od Stieltjesa.

Lemma 6.1. Pre *každú kladnú dvojicu* $\{A(\lambda), B(\lambda)\}$ *stupňa* $n \geqq 1$ *existuje jeden a len jeden rozvoj podielu* $\dfrac{A(\lambda)}{B(\lambda)}$ *v konečný reťazec tvaru:*

$$\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)} = a_n + \frac{1\,|}{|\,b_n\lambda} + \frac{1\,|}{|\,a_{n-1}} + \frac{1\,|}{|\,b_{n-1}\lambda} + \frac{1\,|}{|\,a_{n-2}} + \ldots + \frac{1\,|}{|\,b_1\lambda} + \frac{1\,|}{|\,a_0}$$

a v tomto rozvoji sú vždy $a_0 > 0$,

$$a_i > 0, \quad b_i > 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dôkaz tejto vety pozri Gantmacher—Krejn [18].

Stieltjes dokázal i obrátenú vetu.

Lemma 6.2. *Nech* $a_i > 0$, $b_i > 0$, $a_0 > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *sú prvky konečného reťazca*

$$a_n + \frac{1\,|}{|\,b_n\lambda} + \frac{1\,|}{|\,a_{n-1}} + \frac{1\,|}{|\,b_{n-1}\lambda} + \ldots + \frac{1\,|}{|\,b_1\lambda} + \frac{1\,|}{|\,a_0};$$

vtedy čitateľ a menovateľ posledného zblíženého zlomku $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ *tvoria kladnú dvojicu mnohočlenov n-tého stupňa.*

Dôkaz: Nech je daný reťazec

$$\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)} = a_n + \frac{1\,|}{|\,b_n\lambda} + \frac{1\,|}{|\,a_{n-1}} + \ldots + \frac{1\,|}{|\,b_1\lambda} + \frac{1\,|}{|\,a_0}, \tag{38}$$

kde $a_i > 0$, $b_i > 0$, $a_0 > 0$ $(i = 1, 2, \ldots n)$. Máme dokázať, že mnohočleny $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, tvoria kladnú dvojicu mnohočlenov n-tého stupňa. Miesto toho, aby sme počítali mnohočleny $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ z reťazca (38), bude výhodné najprv vykonať transformáciu tohto reťazca a potom určiť $A(\lambda)$, $B(\lambda)$. Urobme z (38) kontrakciu, t. j. zostrojme reťazec, ktorý bude mať zblížené zlomky rovné párnym zblíženým zlomkom reťazca (38); dostaneme (pozri [25]):

$$\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)} = a_n + \frac{a_{n-1}\,|}{|\,a_{n-1}b_n\lambda + 1} - \frac{a_{n-2}\,|}{|\,a_{n-1}a_{n-2}b_{n-1}\lambda + a_{n-1} + a_{n-2}} - \frac{a_{n-1}a_{n-3}\,|}{|\,a_{n-2}a_{n-3}b_{n-2}\lambda + a_{n-2} + a_{n-3}} - \ldots - \frac{a_2a_0\,|}{|\,a_1a_0\lambda b_1 + a_1 + a_0}. \tag{39}$$

Posledný vzťah prepíšeme ešte tak, že nájdeme reťazec, ktorý je ekvivalentný k reťazcu (39) [t. j. reťazec, ktorý bude mať rovnaký súčet ako reťazec (39)]:

$$\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)} = a_n + \frac{a_{n-1}\,|}{|\,a_{n-1}b_n\lambda + 1} - \frac{\dfrac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\Big|}{\Big|\dfrac{a_{n-1}a_{n-2}b_{n-1}\lambda + a_{n-1} + a_{n-2}}{a_{n-1}}} -$$

$$- \frac{\dfrac{a_{n-3}}{a_{n-2}}\Big|}{\Big|\dfrac{a_{n-2}a_{n-3}b_{n-2}\lambda + a_{n-2} + a_{n-3}}{a_{n-2}}} - \dots - \frac{\dfrac{a_0}{a_1}\Big|}{\Big|\dfrac{a_1a_0b_1\lambda + a_1 + a_0}{a_0}}. \tag{40}$$

Vyjadrime teraz $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ ako kontinuanty reťazca (40); použitím známej vlastnosti kontinuantov, totiž ich invariantnosti voči preklopeniu okolo vedľajšej diagonály, po menších úpravách dostaneme:

$$A(\lambda) = A_0 \begin{vmatrix} \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1}\right)\frac{1}{b_1} + \lambda & -\frac{1}{a_1b_2} & & & \\ -\frac{1}{a_1b_1} & \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)\frac{1}{b_2} + \lambda & -\frac{1}{a_2b_3} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & -\frac{1}{a_{n-2}b_{n-2}} & \left(\frac{1}{a_{n-2}} + \frac{1}{a_{n-1}}\right)\frac{1}{b_{n-1}} + \lambda & -\frac{1}{a_{n-1}b_n} \\ & & -\frac{1}{a_{n-1}b_{n-1}} & \left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n}\right)\frac{1}{b_n} + \lambda \end{vmatrix}.$$

$$\tag{41}$$

$$B(\lambda) = B_0 \begin{vmatrix} \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1}\right)\frac{1}{b_1} + \lambda & -\frac{1}{a_1b_2} & & \\ -\frac{1}{a_1b_1} & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & -\frac{1}{a_{n-1}b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}b_n} + \lambda \end{vmatrix},$$

kde $A_0 = a_nB_0 = a_0\prod_{i=1}^{n} a_ib_i > 0$, pretože $a_i > 0$, $b_i > 0$ pre všetky i sú kladné. Z toho plynie i to, že $B_0 > 0$.

Poznamenajme, že sa determinanty líšia iba posledným prvkom v hlavnej diagonále. Pretože A_0, B_0 sú kladné, stačí dokázať pre to, aby $A(\lambda)$ a $B(\lambda)$

tvorili kladnú dvojicu mnohočlenov n-tého stupňa, že $A(\lambda)$ a $B(\lambda)$ majú n jednoduchých záporných koreňov, ktoré vyhovujú vzťahom

$$-\alpha_n < -\beta_n < -\alpha_{n-1} < -\beta_{n-1} < \dots < -\alpha_1 < -\beta_1 < 0, \tag{42}$$

kde

$$A(\alpha_i) = 0 \qquad B(\beta_i) = 0. \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Zaveďme do vzťahov (41) novú premennú ζ vzťahom $\zeta = -\lambda$. Potom možno vyšetrovanie koreňov polynómov $A(\zeta)$, $B(\zeta)$ previesť na určenie koreňov charakteristických rovníc normálnych Jacobiho matíc. O týchto, ako je známe, platí, že ich korene sú reálne a jednoduché. Naviac z pôvodného reťazca (38) vyplýva, že $A(\lambda)$, a $B(\lambda)$ sú mnohočleny s kladnými koeficientmi, t. j. môžu mať za reálne korene iba záporné čísla.

Pre korene mnohočlenov $A(\zeta)$, $B(\zeta)$ teda platí:

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n,$$
$$0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{n-1} < \beta_n.$$

Ostáva dokázať vzťah (42). Rozviňme oba determinanty z (41) podľa prvkov posledného stĺpca. Dostaneme:

$$D_n(\zeta) = \left[\left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n}\right)\frac{1}{b_n} - \zeta\right]D_{n-1}(\zeta) - \frac{1}{a_{n-1}^2b_nb_{n-1}}D_{n-2}(\zeta),$$

$$D_n'(\zeta) = \left[\left(\frac{1}{a_{n-1}b_n}\right) - \zeta\right]D_{n-1}'(\zeta) - \frac{1}{a_{n-1}^2b_nb_{n-1}}D_{n-2}(\zeta),$$

kde $D_j = |\alpha_{ik} - \zeta\delta_{ik}|$, $D_j' = |\beta_{ik} - \zeta\delta_{ik}|$; $(j = 1, \dots, n)$ sú charakteristické mnohočleny príslušných normálnych Jacobiho matíc. Pre $j < n$ platí

$$D_j = D_j',$$

a preto odčítaním oboch rovníc dostaneme:

$$D_n(\zeta) - D_n'(\zeta) = \frac{1}{a_nb_n}D_{n-1}(\zeta). \tag{43}$$

Pre $\zeta = \alpha_i$ a $\zeta = \alpha_{i+1}$ $(i = 1, \dots, n-1)$ je v (43) prvý člen rovný nule a pravá strana je od nuly rôzna a má pre tieto hodnoty rôzne znamienka, keďže v intervale (α_i, α_{i+1}) leží jeden a len jeden koreň $D_{n-1}(\zeta)$ (pozri [18]). Z toho plynie, že i $D_n'(\zeta)$ má v tomto intervale aspoň jeden koreň, pre ktorý platí:

$$\alpha_i < \beta_k < \alpha_{i+1}.$$

Z tých istých dôvodov $(D_{n-1}' = D_{n-1})$ platí, že v intervale (β_i, β_{i+1}) leží aspoň jeden koreň $D_n(\zeta)$:

$$\beta_i < \alpha_k < \beta_{i+1}.$$

Ukážme, že pre korene β_k platí:

$$\beta_k < \varkappa_n, \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

t. j. $D'_n(\zeta)$ nemá v intervale $< \varkappa_n, \infty)$ koreň. Na základe známej vety [18] je $D_{n-1}(\zeta)$ v tomto intervale od nuly rôzne a toho istého znamienka. Pretože platí, že pri prechode ζ cez koreň rovnice $D_n(\zeta) = 0$ súčin $D_n D_{n-1}$ mení znamienko z + na −, vyplýva z toho, že i $D_n(\zeta)$ je v tomto intervale opačného znamienka ako $D_{n-1}(\zeta)$. Z (43) plynie, že $D'_n(\zeta)$ je v tomto intervale vždy od nuly rôzne, a teda $\beta_k < \varkappa_n$ $(k = 1, \ldots, n)$. Spojením všetkých troch nerovností dostaneme:

$$0 < \beta_1 < \varkappa_1 < \beta_2 < \varkappa_2 < \ldots < \beta_n < \varkappa_n,$$

čo bolo treba dokázať.

Pomocou práve dokázanej vety ľahko ukážeme, že úloha 1a má len vtedy zmysel, ak čísla p_i a q_i $(i = 1, \ldots, n)$ spĺňujú nerovnosť

$$0 < q_1 < p_1 < \ldots < p_n.$$

Uvažujme niť N_2. Z vety 5.6 vyplýva, že pre frekvencie nite N_2 platí frekvenčná rovnica, ktorú zapíšeme v tvare

$$G^{(1)} = \frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)} = 0, \tag{44}$$

kde $\lambda = -\omega^2$, a $G^{(1)}(\lambda)$ je dynamická poddajnosť nite N_1. Frekvencie nite N_2 musia teda spĺňovať rovnicu

$$P(\lambda) = 0.$$

Uvažujme teraz niť N_1. Z vety 5.5 dostaneme, že frekvencie nite N_1 vyhovujú rovnici:

$$H^{(1)} = 0.$$

Na základe vzťahu (31) pre $H^{(1)}$ platí:

$$H^{(1)} = \frac{1}{G^{(1)}} = \frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)} = 0,$$

kde opäť $\lambda = -\omega^2$ a frekvencie nite N_1 vyhovujú teda rovnici

$$Q(\lambda) = 0. \tag{45}$$

Použitím lemmy 6.2 na reťazec pre $G^{(1)}$ dostaneme, že $P(\lambda)$ a $Q(\lambda)$ tvoria kladnú dvojicu, a teda pre frekvencie $\{\omega_i\}_1^n$ nite N_2 a frekvencie $\{\varkappa_i\}_1^n$ nite N_1 platí:

$$0 < \varkappa_1^2 < \omega_1^2 < \varkappa_2^2 < \ldots < \varkappa_n^2 < \omega_n^2,$$

t. j.

$$0 < \varkappa_1 < \omega_1 < \varkappa_2 < \ldots < \varkappa_n < \omega_n.$$

Ak teda čísla $\{p_i\}_1^n$, $\{q_i\}_1^n$ majú byť frekvenciami nití N_2, N_1, musia nutne spĺňovať posledný vzťah, čiže:

$$0 < q_1 < p_1 < \ldots < q_n < p_n.$$

V opačnom prípade neexistuje taká niť N, ktorá by mala v prípade N_1 a N_2 uvedené postupnosti za frekvencie. Úloha 1a v prípade iného rozdelenia $\{p_i\}_1^n$, $\{q_i\}_1^n$, nemôže byť riešiteľná.

Prikročme teraz k *riešeniu vlastnej úlohy*. Úlohu 1a rozriešime, ak určíme hmoty m_k a dĺžky úsekov nite l_k na základe čísiel p_i a q_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Miesto toho, aby sme hľadali tieto veličiny bude výhodné počítať s dynamickou tuhosťou izolovaných hmotných bodov h_k a poddajnosťou jednotlivých úsekov nite g_k, pre ktoré platia vzťahy:

$$h_k = -m_k\omega^2, \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

$$g_i = \frac{l_i}{T}, \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

kde ω je kruhová frekvencia a T sila rozťahujúca niť. Zadaním hmôt m_k a dĺžok l_i je jednoznačne určená dynamická poddajnosť $G^{(1)}$ nite N_1, a naopak, udaním $G^{(1)}$ ako racionálnej lomenej funkcie premennej $\lambda = -\omega^2$ sú podľa lemmy 6.1 jednoznačne určené hmoty m_k, ako aj dĺžky l_k $(k = 1, \ldots, n)$, keďže čitateľ i menovateľ tejto racionálne lomenej funkcie nutne vždy tvoria kladnú dvojicu mnohočlenov n-tého stupňa. Úloha teda prešla na určenie $G^{(1)}$ z čísiel p_i a q_i; $(i = 1, \ldots, n)$. Pri riešení tejto úlohy podstatne použijeme oboch práve uvedených okolností, totiž že

$$\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)} = G^{(1)}(\lambda) = 0,$$

kde $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$ tvoria kladnú dvojicu mnohočlenov n-tého stupňa.

Z daných postupností zostrojme kladnú dvojicu mnohočlenov $A(\lambda)$, $B(\lambda)$:

$$A(\lambda) = A_0 \prod_{i=1}^{n} (\lambda + p_i^2), \qquad B(\lambda) = B_0 \prod_{i=1}^{n} (\lambda + q_i^2),$$

pričom A_0, B_0 sú ľubovoľné zvolené konštanty. V ďalšom ukážeme, že táto ľubovoľnosť nevedie, ako by sa na prvý pohľad mohlo zdať, k nejednoznačnosti riešenia úlohy. Keďže čísla p_i majú byť frekvenciami nite N_2 a čísla q nite N_1 $(i = 1, \ldots, n)$, musí nutne platiť

$$\varrho \frac{A(\lambda)}{B(\lambda)} = \frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)},$$

kde ϱ je istý kladný, zatiaľ neurčený faktor. Tento určíme z podmienky, že súčet čísiel l_i $(i = 0, \ldots, n)$ je rovný l. Podľa lemmy 6.1 možno jednoznačne rozvinúť $\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)}$ v reťazec:

$$\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)} = a_n + \frac{1|}{|b_n\lambda} + \ldots + \frac{1|}{|b_1\lambda} + \frac{1|}{|a_0}.$$

V prípade, že ide o podiel $\varrho\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)}$, dostaneme podľa známej vety o reťazcoch [25] na základe posledného reťazca rozvoj:

$$\varrho\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)} = \varrho a_n + \frac{1|}{\left|\frac{b_n}{\varrho}\lambda\right.} + \frac{1|}{|\varrho a_{n-1}} + \ldots + \frac{1|}{\left|\frac{b_1}{\varrho}\lambda\right.} + \frac{1|}{|\varrho a_0}.$$

Vzhľadom na to, že dva reťazce sú vtedy a len vtedy rovné, keď majú všetky prvky rovnaké, platí:

$$\begin{aligned} m_k &= \frac{b_k}{\varrho}, && (k = 1, 2, \ldots, n) \\ l_i &= \varrho T a_i && (i = 0, 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{46}$$

Činiteľ ϱ je jednoznačne určený podmienkou

$$\sum_{i=0}^{n} l_i = l,$$

kde l je celková dĺžka nite. Dosadením za l_i z (46) dostaneme:

$$\varrho = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} a_i} \cdot \frac{l}{T}$$

a riešenie úlohy 1a bude mať tvar

$$l_i = \frac{a_i}{\sum_{k=0}^{n} a_k} \cdot l, \qquad (i = 0, 1, \ldots, n) \tag{47}$$

$$m_i = \frac{T}{l} b_i \sum_{k=0}^{n} a_k. \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{48}$$

Treba sa ešte vyrovnať s otázkou, či skutočne možno voliť ľubovoľné A_0, B_0 bez toho, že by sa narušila jednoznačnosť riešenia úlohy. Majme teda dve kladné dvojice mnohočlenov:

$$A^{(1)}(\lambda) = A_0^{(1)} \prod_{i=1}^{n} (\lambda + p_i^2), \qquad B^{(1)}(\lambda) = B_0^{(1)} \prod_{i=1}^{n} (\lambda + q_i^2),$$

$$A^{(2)}(\lambda) = A_0^{(2)} \prod_{i=1}^{n} (\lambda + p_i^2), \qquad B^{(2)}(\lambda) = B_0^{(2)} \prod_{i=1}^{n} (\lambda + q_i^2).$$

Nech pre prvú kladnú dvojicu je riešenie úlohy 1a dané vzťahmi (47), (48). Ukážeme, že i druhá kladná dvojica dáva to isté riešenie. Platí totiž:

$$\varrho\frac{A^{(1)}(\lambda)}{B^{(1)}(\lambda)} = \varrho\frac{A_0^{(1)} \cdot B_0^{(2)}}{B_0^{(1)} \cdot A_0^{(2)}} \cdot \frac{A^{(2)}(\lambda)}{B^{(2)}(\lambda)} = \varrho'\frac{A^{(2)}(\lambda)}{B^{(2)}(\lambda)}, \tag{49}$$

kde ϱ' je rovné:

$$\varrho' = \frac{A_0^{(1)} B_0^{(2)}}{A_0^{(2)} B_0^{(1)}} \varrho.$$

Na základe lemmy 6.1 oba podiely $\varrho\frac{A^{(1)}(\lambda)}{B^{(1)}(\lambda)}$ a $\varrho'\frac{A^{(2)}(\lambda)}{B^{(2)}(\lambda)}$ možno jednoznačne rozvinúť do reťazcov tvaru (38). Z rovnosti (49) však vyplýva:

$$\begin{aligned} \varrho a_i^{(1)} &= \varrho' a_i^{(2)}, && (i = 0, 1, \ldots, n) \\ \frac{b_k^{(1)}}{\varrho} &= \frac{b_k^{(2)}}{\varrho'}. && (k = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

Na základe vzťahov (46) dostaneme, že druhá dvojica dáva to isté riešenie.

Vzhľadom na to, že konštanty A_0, B_0 možno voliť ľubovoľne, pokusme sa ich voliť tak, aby riešenie (47), (48) malo formálne najjednoduchší tvar. Pretože rozvoj (38) pre $\lambda = 0$ poskytuje vzťah

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{A_n}{B_n};$$

kde A_n, B_n sú absolútne členy mnohočlenov $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, bude výhodné voliť A_0, B_0 tak, aby

$$A_n = B_n = 1.$$

Na to stačí voliť A_0, B_0 nasledovne:

$$A_0 = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i^2}, \qquad B_0 = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i^2},$$

a teda mnohočleny pre $A(\lambda)$ a $B(\lambda)$ budú mať tvar

$$A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{\lambda}{p_i^2}\right), \qquad B(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{\lambda}{q_i^2}\right). \tag{50}$$

Dokázali sme úhrnom vetu 6.1.

Veta 6.1. *Existuje jedno a len jedno riešenie úlohy 1a, ktoré nájdeme takto: Zostrojíme na základe postupnosti* $\{p_i\}_1^n$, $\{q_i\}_1^n$ *kladnú dvojicu mnohočlenov (50) a nájdeme rozvoj* $\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)}$ *do reťazca* (38). *Potom hľadané riešenie znie:*

$$\begin{aligned} l_i &= a_i l, && (i = 0, 1, \ldots, n) \\ m_i &= b_i \frac{T}{l}, && (i = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

kde a_i b_i *sú prvky reťazca* (38).

Úplne podobne možno riešiť aj nasledujúcu úlohu:

Úloha 1b. Daná je niť z úlohy 1. Pre túto niť je daná postupnosť $2n$ kladných čísiel:

$$0 = q_1 < p_1 < q_2 < p_2 < \ldots < q_n < p_n.$$

Treba nájsť veľkosť jednotlivých hmotných bodov, ako aj ich rozloženie tak, aby frekvencie vlastných malých priečnych kmitov nite v prípade N_1' (ľavý koniec voľný, pravý upevnený) boli $p_1, p_2, \ldots, p_n$ a v prípade N_3 (oba konce voľné) boli $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Pritom predpokladáme, že jeden z hmotných bodov je umiestený na ľavom konci.

Poznámka. Oproti predošlej úlohe líši sa táto úloha jednak tým, že $l_0 = 0$, jednak tým, že $q_1 = 0$. Čo sa týka vzťahu $q_1 = 0$, treba poznamenať, že ak úloha má mať zmysel, postupnosť musí nutne začínať nulou.

Ak totiž napíšeme rovnice pre amplitúdy výchyliek jednotlivých hmotných bodov y_i dostaneme:

$$-Y_{i-1} + h_i y_i + Y_i = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

kde veličiny Y_k, $(k = 1, \ldots, n)$ splňujú vzťahy:

$$-y_{i-1} + g_i Y_i + y_i = 0,$$
$$Y_0 = 0; \qquad Y_n = 0.$$

Pritom h_i sú dynamické tuhosti izolovaných hmotných bodov a g_i poddajnosti jednotlivých úsekov nite. Pre

$$Y_1 = Y_2 = \ldots = Y_n = 0, \qquad \text{čiže} \qquad y_1 = y_2 = y_3 = \ldots = y_n \neq 0,$$

dostaneme z týchto rovníc

$$h_i = 0, \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

a teda

$$\omega_1 = 0.$$

Fyzikálne možno vysvetliť uvedenú okolnosť tým, že na oboch koncoch voľná niť je nestabilná. Ak totiž napíšeme vzťahy pre kinetickú a potenciálnu energiu tejto nite, dostaneme:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{y}_i^2, \qquad V = \frac{T}{2}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(y_{i+2} - y_i)^2}{l_i}.$$

Z posledných vzťahov ihneď vyplýva, že systém je nestabilný, lebo kvadratická forma pre potenciálnu energiu V nie je kladná, ale iba nezáporná. Premenných je n a štvorcov vo výraze pre V iba $(n-1)$ a $V = 0$ aj pri $y_1 = y_2 = \ldots = y_n \neq 0$. Priama fyzikálna interpretácia nulovej frekvencie spočíva v tom, že na oboch koncoch voľná niť sa môže pohybovať ako celok v dôsledku vlastnej zotrvačnosti v jednom smere.

K druhému predpokladu $l_0 = 0$ treba uviesť zatiaľ len toľko, že je to postačujúci predpoklad pre jednoznačnosť riešenia úlohy. V ďalšom ukážeme, že možno uvážiť i prípad $l_0 \neq 0$, avšak aj v tomto prípade musí byť l_0 vopred dané.

Práve tak, ako sme pri riešení úlohy 1a užili pojem „kladná dvojica mnohočlenov n-tého stupňa", použijeme pri riešení úlohy 1b pojem „nezáporná dvojica mnohočlenov n-tého stupňa".

Definícia 6.2. *Dva mnohočleny rovnakého stupňa $n > 0$.*

$$A(\lambda) = A_0\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + \ldots + A_{n-1}\lambda + A_n;$$
$$B(\lambda) = B_0\lambda^n + B_1\lambda^{n-1} + \ldots + B_{n-1}\lambda,$$

dané v tomto poradí, tvoria nezápornú dvojicu $\{A(\lambda), B(\lambda)\}$ stupňa n, ak ich možno vyjadriť v tvare

$$A(\lambda) = A_0\prod_{i=1}^{n}(\lambda + \lambda_i), \qquad B(\lambda) = B_0\prod_{i=1}^{n}(\lambda + \mu_i),$$

kde

$$0 = \mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n < \lambda_n$$

a pritom

$$A_0 > 0, \qquad B_0 > 0.$$

Poznámka 1. Z definície 6.2 opäť vyplýva, že mnohočleny $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ nezápornej dvojice majú vždy všetky koeficienty kladné, okrem B_n, ktorý je rovný nule. Opäť všetky korene týchto mnohočlenov s výnimkou jediného μ_1 sú jednoduché a záporné, pričom sa striedajú podľa uvedenej nerovnosti.

Poznámka 2. Pojem nezápornej dvojice n-tého stupňa možno rozšíriť i na prípad $n = 0$. Vtedy $A(\lambda) = A_0$, $B(\lambda) = 0$.

Práve tak ako bola dokázaná veta 6.1 možno dokázať lemmu 6.3.

Lemma 6.3. *Pre každú nezápornú dvojicu $\{A(\lambda), B(\lambda)\}$ stupňa n existuje jeden a len jeden rozvoj podielu $\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)}$ v konečný reťazec tvaru*

$$\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)} = a_n + \frac{1|}{|b_n\lambda} + \frac{1|}{|a_{n-1}} + \frac{1|}{|b_{n-1}\lambda} + \ldots + \frac{1|}{|b_1\lambda}.$$

Dôkaz tejto vety sa opiera o lemmu 6.4.

Lemma 6.4. *Nezápornej dvojici stupňa n $(n \geq 1)$ odpovedajú jediné konštanty* a, b *také, že*

$$\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)} = a + \cfrac{1}{b\lambda + \cfrac{B^{(1)}(\lambda)}{A^{(1)}(\lambda)}},$$

kde $A^{(1)}(\lambda)$ a $B^{(1)}(\lambda)$ *sú mnohočleny stupňa menšieho ako n, pričom je vždy $a > 0$, $b > 0$ a mnohočleny $A^{(1)}(\lambda)$, $B^{(1)}(\lambda)$ pri vhodnom normovaní tvoria tiež nezápornú dvojicu mnohočlenov $(n-1)$ prvého stupňa.*

Dôkaz lemmy je podobný ako pri lemme 6.1.

Vzhľadom na lemmu 6.3 platí i obrátená lemma 6.5.

Lemma 6.5. *Nech $a_i > 0$, $b_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sú prvky konečného reťazca*

$$a_n + \frac{1|}{|b_n\lambda} + \frac{1|}{|a_{n-1}} + \frac{1|}{|b_{n-1}\lambda} + \ldots + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|b_1\lambda}. \tag{51}$$

Potom čitateľ i menovateľ posledného zlomku $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ tvoria nezápornú dvojicu mnohočlenov n-tého stupňa.

Dôkaz lemmy 6.5 je analogický dôkazu lemmy 6.2, okrem malých formálnych odchýlok.

Na základe týchto lemm možno teraz ukázať, že úloha 1b môže mať riešenie iba vtedy, ak čísla p_i, q_i vyhovujú nerovnosti:

$$0 = q_1 < p_1 < q_2 < p_2 < \ldots < q_n < p_n.$$

Frekvencie nite N_1', ako to vyplýva z vety 5.7, vyhovujú rovnici:

$$G_{-}^{(3)} = \frac{R(\lambda)}{S(\lambda)} = 0,$$

kde $G_{\mp}^{(3)}$ je dynamická poddajnosť nite N_3 vzhľadom na pravý koniec a $\lambda = -\omega^2$. Pre frekvencie nite N_3 dostaneme z vety 5.5 rovnicu:

$$H_{\mp}^{(3)} = \frac{1}{G_{\mp}^{(3)}} = 0.$$

Zo vzťahu pre $G_{\mp}^{(3)}$ — (31a) a z lemmy 6.5 vyplýva, že $R(\lambda)$, $S(\lambda)$ tvoria nezápornú dvojicu mnohočlenov n-tého stupňa. Z definície nezápornej dvojice vyplýva, že záporne vzaté korene týchto mnohočlenov splňujú nerovnosť

$$0 \leq \mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n < \lambda_n.$$

Vzhľadom na to, že korene rovnice $R(\varkappa) = 0$, sú rovné štvorcom frekvencií nite N_1': $-\varkappa_i = \lambda_i = p_i^2$, $(i = 1, \ldots, n)$ a korene rovnice $S(\omega) = 0$ sú rovné štvorcom frekvencií nite N_3: $-\omega_i = \mu_i = +q_i^2$, $(i = 1, \ldots, n)$ platí táto nerovnosť:

$$0 = q_1^2 < p_1^2 < q_2^2 < \ldots < q_n^2 < p_n^2,$$

z toho

$$0 = q_1 < p_1 < q_2 < \ldots < q_n < p_n,$$

čo bolo treba dokázať.

Po týchto prípravných úvahách prikročme k *riešeniu vlastnej úlohy*. Pri riešení budeme postupovať tak ako v predošlom prípade, totiž miesto m_k a l_i $(k = 1, \ldots, n)$; $(i = 0, 1, \ldots, n)$ budeme hľadať veličiny h_k a g_i. Týmito veličinami je jednoznačne určená dynamická poddajnosť nite $G_{\mp}^{(3)}$. Naopak,

z $G_{\mp}^{(3)}(\lambda)$ ako racionálne lomenej funkcie premennej $\lambda = -\omega^2$ možno jednoznačne určiť všetky m_k a l_k okrem l_0, keďže toto vôbec nevystupuje v rozvoji pre $G_{\mp}^{(3)}(\lambda)$.

Poznámka. Mohlo by sa zdať, že sa táto nejednoznačnosť v určení l_0 zapríčinila uvedenou metódou riešenia. Avšak z frekvenčných rovníc pre nite N_1', N_3 vyplýva, že tieto sú nezávislé od g_0, resp. od l_0, t. j. keď l_0 je ľubovoľné kladné číslo, frekvencie nití sa nezmenia. Pri vlastných kmitoch nití N_2' a N_3 úsek l_0 a v prípade nite N_3 i úsek l_n budú stále rovnobežné so svojou rovnovážnou polohou a kolmé na smer kmitania nite, čo sa prejaví v tom, že frekvencie vlastných kmitov od nich nezávisia. Aby úloha 1b ostala jednoznačná treba hodnotu l_0 udať vopred.

Pri riešení danej úlohy pôjde o to, ako určiť $G_{\mp}^{(3)}$ z čísiel p_i, q_i $(i = 1, \ldots, n)$. Dynamickú poddajnosť nite $G_{\mp}^{(3)}$ určíme, ak určíme mnohočleny $R(\lambda)$, a $S(\lambda)$.

Tieto mnohočleny okrem multiplikatívnej konštanty sú rovné mnohočlenom:

$$C(\lambda) = C_0 \prod_{j=1}^{n} (\lambda + p_j^2), \qquad D(\lambda) = D_0 \prod_{j=1}^{n} (\lambda + q_j^2). \tag{52}$$

$$(C_0, D_0 > 0).$$

Tieto mnohočleny tvoria nezápornú dvojicu, a preto existuje jediný rozvoj $\frac{C(\lambda)}{D(\lambda)}$ do reťazca.

$$\frac{C(\lambda)}{D(\lambda)} = c_n + \frac{1|}{|d_n\lambda} + \frac{1|}{|c_{n-1}} + \ldots + \frac{1|}{|c_1} + \frac{1|}{|d_1\lambda}, \tag{53}$$

pričom

$$G_{\mp}^{(3)}(\lambda) = \mu \frac{C(\lambda)}{D(\lambda)},$$

kde $\mu > 0$. Ostáva určiť konštantu μ. Túto určíme z podmienky, že súčet úsekov nite je dané číslo totiž dĺžka nite:

$$\sum_{i=1}^{n} l_i = l. \tag{54}$$

Pre rozvoj reťazca $\mu \frac{C(\lambda)}{D(\lambda)}$ dostaneme práve tak ako pri riešení úlohy 1a rozvoj:

$$\mu \frac{C(\lambda)}{D(\lambda)} = \mu c_n + \frac{1|}{\left|\frac{d_n}{\mu}\lambda\right.} + \frac{1|}{|\mu c_{n-1}} + \ldots + \frac{1|}{|\mu c_1} + \frac{1|}{\left|\frac{d_1}{\mu}\lambda\right.}.$$

Pretože reťazec pre $G_{\mp}^{(3)}$ a posledný reťazec musia si byť identicky rovné, dostaneme:

$$g_i = \mu c_i, \qquad m_i = \frac{d_i}{\mu}.$$

Dosadením do podmienky (54) dostaneme:

$$\mu = \frac{l}{T\sum_{i=1}^{n} c_i}$$

a hľadané riešenie je:

$$l_i = \frac{c_i}{\sum_{k=1}^{n} c_k} l, \qquad m_i = \frac{l}{T} d_i \sum_{k=1}^{n} c_k; \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (55)$$

Ostáva ešte otázka, ako je to s voľbou konštánt C_0 a D_0. Práve tak ako v predošlej úlohe možno síce voliť konštanty C_0 a D_0 ľubovoľne, čo, pravda, má za následok zmenu faktora μ. Avšak nech už volíme C_0 a D_0 akokoľvek, výrazy μc_i a $\frac{d_i}{\mu}$ zostávajú bezo zmeny. Tým sme dokázali vetu 6.2.

Veta 6.2. *Existuje vždy jediné riešenie úlohy* 1b, *ktoré nájdeme ak zostrojíme na základe postupnosti* $\{p_i\}_1^n$, $\{q\}_1^n$ *nezápornú dvojicu mnohočlenov a nájdeme jej rozvoj do reťazca* (53). *Vtedy hľadané riešenie:* (52)

$$l_i = \frac{c_i}{\sum_{k=1}^{n} c_k} l, \qquad m_i = \frac{l}{T} d_i \sum_{k=1}^{n} c_k, \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

kde c_i a d_i *sú prvky reťazca* (54).

Poznámka. Tomuto riešeniu by bolo možné dať jednoduchší tvar, ak by miesto celkovej dĺžky nite l bol daný súčet všetkých hmotných bodov nite:

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Pre mnohočleny $C(\lambda)$, $D(\lambda)$ by sme dostali analogické vzorce ako pri úlohe 1a pre $A(\lambda)$, $B(\lambda)$.

Na záver uveďme si numerický príklad na riešenie úlohy 1a.

Príklad 6.3. Daná je niť o dĺžke $l = 100$ cm a rozťahovaná silou 10 Mdýn. Daná je postupnosť kladných čísiel

$$0 < \frac{1}{8} < \frac{1}{7} < \frac{1}{6} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1.$$

Treba nájsť veľkosť jednotlivých hmotných bodov, ako aj ich rozloženie na niti tak, aby frekvencie vlastných malých priečnych kmitov v prípade oboch upevnených koncov boli:

$$p_1 = \frac{1}{7}\,\text{kHz} \doteq 142{,}8\,\text{Hz}, \qquad p_2 = \frac{1}{5}\,\text{kHz} = 200{,}0\,\text{Hz},$$

$$p_3 = \frac{1}{3}\,\text{kHz} = 333{,}3\,\text{Hz}, \qquad p_4 = 1\,\text{kHz} = 1000\,\text{Hz}$$

a v prípade ľavého pevného konca a pravého voľného:

$$q_1 = \frac{1}{8}\,\text{kHz} = 125{,}0\,\text{Hz}, \qquad q_2 = \frac{1}{6}\,\text{kHz} = 166{,}6\,\text{Hz},$$

$$q_3 = \frac{1}{4}\,\text{kHz} = 250{,}0\,\text{Hz}, \qquad q_4 = \frac{1}{2}\,\text{kHz} = 500\,\text{Hz}.$$

Predovšetkým zostrojíme mnohočleny $A(\lambda)$ a $B(\lambda)$:

$$A(\lambda) = \prod_1^4 \left(1 + \frac{\lambda}{p_i^2}\right) = 1 + 84\lambda + 1974\lambda^2 + 12916\lambda^3 + 11\,025\lambda^4,$$

$$B(\lambda) = \prod_1^4 \left(1 + \frac{\lambda}{q_i^2}\right) = 1 + 120\lambda + 4368\lambda^2 + 52\,480\lambda^3 + 147\,456\lambda^4.$$

Rozvinutím podielu $\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)}$ do reťazca tvaru (38) dostaneme:

$$\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)} = 0{,}075 + \frac{1|}{|16{,}398\lambda} + \frac{1|}{|0{,}353} + \frac{1|}{|47{,}204\lambda} + \frac{1|}{|0{,}402} +$$

$$+ \frac{1|}{|198{,}825\lambda} + \frac{1|}{|0{,}153} + \frac{1|}{|2589{,}929\lambda} + \frac{1|}{|0{,}017}.$$

Z tohto reťazca dostaneme pomocou vzťahov z vety 6.1 hľadané veličiny l_i $(i = 0, \ldots, 4)$ a m_k $(k = 1, \ldots, 4)$

$l_0 = 7{,}5$ cm, $l_1 = 35{,}3$ cm, $l_2 = 40{,}2$ cm, $l_3 = 15{,}3$ cm, $l_4 = 1{,}7$ cm,
$m_1 \doteq 1{,}64$ g, $m_2 \doteq 4{,}72$ g, $m_3 = 19{,}88$ g, $m_4 = 258{,}99$ g.

§ 7. Ďalšie všeobecné výsledky

V predošlom paragrafe pri riešení obrátenej úlohy 1 sme ukázali, že vo svojej pôvodnej formulácii nie je jednoznačná. Napriek tomu možno dokázať rad viet i pre túto úlohu. V ďalšom stručne načrtneme výsledky, ktoré dosiahol v tomto smere M. G. Krejn.

Z riešenia jednoznačnej obrátenej úlohy 1a, resp. 1b vyplýva, že veľkosti hmotných bodov nite m_k sú funkciami oboch postupností čísiel p_i a q_i $(i = 1, \ldots, n)$. V dôsledku toho bude platiť to isté aj o súčte všetkých hmotných bodov nite — t. j. o celkovej hmote nite M:

$$M = M(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n).$$

Ale ak je daná niektorá z postupností $\{p_i\}_1^n$, resp. $\{q_i\}_1^n$, z nerovnosti

$$0 \leq q_1 < p_1 < q_2 < \ldots < q_n < p_n$$

vyplýva, že čísla druhej postupnosti sú zadaním prvej zhora i zdola ohraničené a opačne. Napr. pri danej postupnosti $\{p_i\}_1^n$, jednak čísla q_i môžu nadobúdať hodnoty z intervalov $p_{i-1} < q_i < p_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, kde $p_0 = 0$, jednak celková hmota M nite je funkciou iba čísiel q_i. Vzniká, prirodzene, otázka, ako sa bude chovať M ako funkcia čísiel q_i. Pri vyšetrovaní tejto otázky sa práve M. G. Krejnovi podarilo dokázať rad viet, kde okrem iného našiel dolnú hranicu pre celkovú hmotu nite M pre prípad nite N_1', N_2, N_3, ak je predpísaná postupnosť frekvencií jej vlastných kmitov. V ďalšom sa preto obmedzíme iba na uvedenie príslušných viet bez dôkazov, odkazujúc na spomenutú prácu [11]. Prv však než by sme uviedli tieto vety, uveďme ešte nasledujúce pomocné vety:

Lemma 7.1. *Celková hmota M nite o n hmotných bodoch je daná vzťahom:*

$$M = -\frac{T}{l}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q_i^4 Q'(-q_i^2)P(-q_i^2)},$$

kde

$$Q'(-q_i^2) = \left[\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\lambda}\right]_{\lambda=-q_i^2},$$

pričom $P(\lambda)$ a $Q(\lambda)$ je kladná dvojica mnohočlenov — n-tý zblížený čitateľ a menovateľ dynamickej poddajnosti $G^{(1')}$.

Z tejto lemmy možno ľahko dokázať nasledujúcu lemmu:

Lemma 7.2. *Celková hmota M nite o n hmotných bodoch je rovná*

$$M = \frac{T}{l}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i^4 P'(-p_i^2)Q(-q_i^2)} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q_i^2}\right),$$

kde

$$P'(-p_i^2) = \left[\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\lambda}\right]_{\lambda=-p_i^2}$$

a význam jednotlivých veličín je rovnaký ako v lemme 7.1.

Na základe týchto vzťahov pre celkovú hmotu M nite možno vykonať vyšetrovanie M ako funkcie parametrov p_i, resp. q_i, $(i = 1, \ldots, n)$. Po príslušných úvahách dostaneme vetu:

Veta 7.1. *Nech $q_1 < q_2 < \ldots < q_n$ je ľubovoľná postupnosť kladných čísiel, vtedy číslo*

$$M_m^{(1)} = \frac{T}{l}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q_i^3\,|Q'(-q_i^2)|}\right\}^2,$$

kde $Q(\lambda)$ je mnohočlen

$$Q(\lambda) = \frac{l}{T}\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{\lambda}{q_k^2}\right)$$

dáva najmenšiu možnú hodnotu pre celkovú hmotu všetkých nití N_1', ktoré majú frekvencie vlastných kmitov rovné postupnosti čísiel $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Pritom existuje jediná taká niť, ktorá má uvedené spektrum frekvencií a má celkovú hmotu M rovnú M_m. Táto niť je určená dynamickou poddajnosťou $G^{(1')}(\lambda)$:

$$G^{(1')}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{M_m^{(1)}}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q_i\,|Q'(-q_i^2)|\,(\lambda + q_i^2)}.$$

Pre túto niť je $l_0 = 0$.

Z vety 7.1 vyplýva, že dolná hranica celkovej hmoty nite N_1' je funkcia frekvencií vlastných kmitov $q_1, q_2, \ldots, q_n$:

$$M_m^{(1)} = f_n^2(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n),$$

kde

$$0 < q_1 < q_2 < \ldots < q_n$$

a

$$f_n(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q_i^3\,|Q'(-q_i^2)|}, \qquad Q(\lambda) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{\lambda}{q_k^2}\right).$$

Možno ľahko dokázať nasledujúcu lemmu:

Lemma 7.3. *Pri pevnom $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ je funkcia f_n s rastúcim q_n stále klesajúca, pričom platí:*

$$\lim_{q_n\to\infty} f_n(q_1, q_2, \ldots, q_n) = f_{n-1}(q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}).$$

Z tejto pomocnej vety vyplýva nasledujúca veta:

Veta 7.2. *Pre ľubovoľnú niť N_1' o n hmotných bodoch, ktorá má celkovú hmotu M a frekvencie $q_1, q_2, \ldots, q_n$, platí:*

$$f_1(q_1) < f_2(q_1, q_2) < \ldots < f_n(q_1, q_2, \ldots, q_n) \leqq \sqrt{M}.$$

Dôsledok. Z poslednej vety vyplýva, že ak je daných prvých k frekvencií a celková hmota nite, možno nájsť dolnú hranicu pre $(k + 1)$-vú frekvenciu, ktorá bude funkciou celkovej hmoty M a prvých k frekvencií. Napr. pre prvú frekvenciu platí:

$$q_1 \geqq \sqrt{\frac{1}{M}}.$$

Podobným spôsobom možno na základe vzťahu pre celkovú hmotu M z lemmy 7.2 dokázať pre niť N_2 nasledujúce vety:

Veta 7.3. *Nech $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ je ľubovoľná postupnosť kladných čísiel. Potom číslo*

$$M_m^{(2)} = 4\frac{T}{l}\sum_{i=1}^{[\frac{1}{2}(n+1)]}\frac{1}{p_{2i-1}^4\,|P'(p_{2i-1})|},$$

kde
$$P(\lambda) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{\lambda}{p_i^2}\right)$$
je najmenšia možná hodnota pre celkovú hmotu M všetkých nití N_2, ktoré majú frekvencie vlastných kmitov rovné číslam p_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Spomedzi všetkých nití N_2, ktoré majú frekvencie vlastných kmitov rovné číslam p_i, $(i = 1, \ldots, n)$, existuje iba jediná, ktorá má symetricky rozloženú hmotu vzhľadom na stred nite. Táto a len táto niť má celkovú hmotu M rovnú $M_m^{(2)}$.

Vo vete 7.3 sa o niti, pre ktorú $M = M_m^{(2)}$, nič bližšieho nehovorí o rozložení a veľkosti hmotných bodov, okrem toho, že tieto veličiny sú rozložené symetricky vzhľadom na stred nite. Pre jednoznačné určenie nite je nevyhnutné poznať tieto veličiny. O tom hovorí veta:

Veta 7.4. *Nech N_2 je niť o celkovej hmote $M_m^{(2)}$, pričom frekvencie jej vlastných kmitov sú $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Vtedy dynamická tuhosť nite N_1' o rovnakej hmote a s rovnakým rozložením hmotných bodov je:*
$$\check{H}^{(1')}(\lambda) = \frac{T}{l} + \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{\frac{T}{l}}}{p_i^2 \cdot |P'(-p_i^2)|\,(\lambda + p_i^2)}\,.$$

Na základe výsledkov z § 6 možno pomerne jednoducho určiť polohu l_k a veľkosť m_k jednotlivých hmotných bodov na niti. Posledné veličiny — polohu a veľkosť hmotných bodov — možno určiť i trochu ináč a jednoduchšie. Budeme pritom vychádzať z tej skutočnosti, že niť N_2 o minimálnej hmote $M_m^{(2)}$ je symetrická. Ako možno ľahko ukázať, z dôvodov symetrie bude niť pri harmonickom kmitaní o frekvencii p_{2k-1}, $(k = 1, \ldots, [\frac{1}{2}(n + 1)]$ mať v strede nite kmitňu a pri harmonickom kmitaní o frekvencii p_{2k}, $(k = 1, \ldots, n)$ bude mať v strede uzol. Z toho vyplýva, že ak by sme niť rozrezali v polovici a uvažovali napr. pravú polovicu s ľavým koncom voľne pohyblivým, budú v prípade nepárneho počtu hmotných bodov frekvencie vlastných kmitov tejto polovice $p_1, p_3, \ldots$, v prípade párneho počtu hmotných bodov budú to čísla $p_2, p_4, \ldots$. Pritom v prvom prípade bude na ľavom konci hmotný bod o hmote rovnej polovičke hmoty, ktorá pôvodne ležala v strede nite. Z uvedeného vyplýva nasledujúca veta:

Veta 7.5. *Pre dynamickú poddajnosť $G^{(1')}$ nite rovnej polovici pôvodnej nite N_2 o celkovej hmote $M_m^{(2)}$ platia tieto vzťahy:*
$$G^{(1')} = \frac{T}{2l} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{v}\left(1 + \frac{\lambda}{p_{2k}^2}\right)}{\prod_{k=1}^{v}\left(1 + \frac{\lambda}{p_{2k-1}^2}\right)} \quad \text{pre} \quad n = 2v,$$
$$G^{(1')} = \frac{T}{2l} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{v-1}\left(1 + \frac{\lambda}{p_{2k}^2}\right)}{\prod_{k=1}^{v}\left(1 + \frac{\lambda}{p_{2k-1}^2}\right)} \quad \text{pre} \quad n = 2v - 1.$$

Poznámka. Určenie veličín m_k a l_k z týchto vzťahov je oveľa jednoduchšie, keďže príslušné reťazce sú o polovicu kratšie.

Podobne ako v prípade nite N_1 možno dokázať túto lemmu:

Lemma 7.4. *Pri pevnom $p_1, \ldots, p_{n-1}$ je funkcia g_n:*
$$g_n^2(p_1, p_2, \ldots, p_n) = M_m^{(2)}$$
s rastúcim p_n stále klesajúca, pričom platí:
$$\lim_{p_n \to \infty} g_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) = g_{n-1}(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}).$$

Z toho plynie veta 7.6.

Veta 7.6. *Pre ľubovoľnú niť N_2 o n hmotných bodoch a celkovej hmote M, pričom frekvencie vlastných kmitov sú rovné p_i $(i = 1, \ldots, n)$, platí:*
$$g_1(p_1) < g_2(p_1, p_2) < \ldots < g_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) \leqq M.$$

Pre prvú frekvenciu p_1 dostaneme z tejto vety odhad
$$p_1 \geqq \sqrt{\frac{2}{M}}$$
a pre druhú frekvenciu
$$p_2 \geqq p_1^2 \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{p_1^2 M - 4}}\,.$$

Posledné nerovnosti veľmi úzko súvisia s nerovnosťami N. E. Žukovského, ktoré odvodil pri hľadaní podmienok ohraničenosti riešení diferenciálnej rovnice
$$\frac{d^2y}{dx^2} + py = 0.$$

Pozri [26]. Porovnaním viet 7.2 a 7.6 možno odvodiť celý rad zaujímavých vzťahov, z ktorých uveďme aspoň jeden:

Veta 7.7. *Pre funkcie f_v a g_v, $(v = 1, 2, \ldots)$ v prípade nite N_2 s vlastnými frekvenciami $p_1, p_2, \ldots, p_n$ platí:*
$$f_v^2(p_1, p_3, \ldots, p_{2v-1}) \leqq \frac{1}{4}\, g_{2v}(p_1, p_2, \ldots, p_{2v-1}). \quad (v = 1, 2, \ldots)$$

Záverom treba ešte poznamenať, že pre niť N_3 možno odvodiť analogickú vetu ako vety 7.1 a 7.3 pre N_1' a N_2. Je to veta 7.8.

Veta 7.8. *Nech $r_1 < r_2 < \ldots < r_{n-1}$ je ľubovoľná postupnosť kladných čísiel, vtedy veličina*
$$M_m^{(3)} = 4\frac{T}{l} \sum_{i=1}^{[\frac{1}{2}n]} \frac{1}{r_{2i-1}^4\,|R'(-r_{2i-1}^2)|}\,,$$
kde
$$R(\lambda) = \prod_{i=1}^{n-1}\left(1 + \frac{\lambda}{r_i^2}\right)$$

je dolnou hranicou celkových hmôt M všetkých nití N_3, ktoré majú frekvencie vlastných kmitov rovné číslam $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$. Spomedzi týchto nití existuje iba jediná niť taká, ktorá má symetrické rozloženie hmoty (čo do veľkosti i čo do polohy) vzhľadom na stred nite, pričom na oboch koncoch nite ležia hmotné body. Táto a len táto niť má hmotu rovnú $M^{(3)}_m$.

LITERATÚRA

1. Ambarcumjan V. A., Über eine Frage der Eigenwerttheorie, Zeitschrift f. Physik 53 (1929), 690—695. 2. Ince E. L., Periodic solutions of a linear differential equation of the second order with periodic coefficients, Proceedings Cambridge *23* (1926), 44—46. 3. Markovič Ž., Sur les solutions de l'équation différentielle linéaire du second order á coefficient périodique, Proc. London Math. Soc. (2) 31 (1930), 417—438. 4. Mothwurf W., Über Saiten mit nur harmonischen Obertönen, Monatshefte f. Math. *40* (1933), 93—96. 5. Krejn M. G., Rešenije obratnoj zadači Šturma—Luvilla, DAN SSSR *76* (1951), 21—24. 6. Krejn M. G., Opredelenije plotnosti neodnorodnoj struny, DAN SSSR *76* (1951), 315—318. 7. Krejn M. G., Ob obratnych zadačach dľa neodnorodnoj struny, DAN SSSR *82* (1952), 669—672. 8. Krejn M. G., Ob odnom obobščenii issledovanij Stiľtjesa, DAN SSSR *87* (1952), 881—884. 9. Krejn M. G., Analog neravenstv Čebyševa—Markova v odnomernoj krajevoj zadače, DAN SSSR *87* (1953), 5—8. 10. Krejn M. G., O perechodnoj funkcii odnomernoj krajevoj zadači vtorogo poriadka, DAN SSSR *88* (1953), 405—408. 11. Krejn M. G., O nekotorych novych zadačach teorii kolebanij Sturmovych sistem, Prikladnaja matematika i mechanika Tom XVI, 1952, 555—568. 12. Courant R., Hilbert D., Methoden der mathematischen Physik, Berlin 1931. 13. Levinson N., The inverse Sturm—Liouville problem, Math. Tidsskr. B. (1949), 25—30. 14. Marčenko V. A., Nekotoryje voprosy teorii differenciaľnogo operatora vtorogo poriadka, DAN SSSR *72* (1950), 457—460. 15. Borg G., Eine Umkehrung der Sturm—Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte, Acta Mathematica *78* (1946), 1—96. 16. Borg G., Inverse problems in theory of characteristic values of differential systems, C. R. Dixiéme Congrés Math. Scandinaves, 1946, Copenhagen (1947), 172—180. 17. Čudov L. A., Obratnaja zadača Šturma—Luvilľa, Matematičeskij sbornik *25* (67), (1949), 451—456. 18. Gantmacher F. R., Krejn M. G., Oscilľacionnyje matricy i jadra i malyje kolebanija mechaničeskich sistem, Gos. Izdat. Tech.-theoret. lit., Moskva—Leningrad, 1950. 19. Strelkov S. P., Úvod do theorie kmitů (str. 270 a nasl.), Praha 1953. (Preklad z ruštiny.) 20. Klotter K., Analyse der verschiedenen Verfahren zur Berechnung der Torsioneigenschwingungen von Maschinenwellen, Ing. Archiv, 1949. 21. Terskich V. P., K rasčetu krutiľnych kolebanij, „Vestnik inženerov i technikov" 1930/12, 1931/7, 1934/7. 22. Terskich V. P., Krutiľnyje kolebanija silovych ustanovok, Sudpromgiz, Moskva 1940. 23. Terskich V. P., Rasčety krutiľnych kolebanij, spravočnoje posobije, Tom I, II, III, Mašgiz. Moskva 1953, 1954. 24. Terskich V. P., Metod cepnych drobej I, II, Sudpromgiz, Moskva 1955. 25. Perron O., Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig 1929. 26. Žukovskij N. E., Uslovija konečnosti integralov uravnenija $\frac{d^2y}{dx^2} + py = 0$, Sobr. sočinenij, 1948. T. *1*, 246—253.

Došlo 1. VI. 1956.