METRICKÁ CHARAKTERISACE ZBORCENÉ PLOCHY S FLEKNODÁLNÍ ČAROU NEVLASTNÍ

JAROMÍR ZEZULA, BRNO

Prof. dr Jiří Klapka v článku: Příspěvek k metrické theorii zborcených ploch, Sborník vysoké školy technické v Brně, 1937, určuje podmínky,[1] za kterých přímka

$$\mathfrak{G} = G_1\mathfrak{A}_1 + G_2\mathfrak{A}_2 + G_3\mathfrak{A}_3,$$

kde

$$G_i = g_i + \varepsilon\bar{g}_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

a

$$g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 = 1,$$
$$g_1\bar{g}_1 + g_2\bar{g}_2 + g_3\bar{g}_3 = 0$$

je asymptotickou tečnou zborcené plochy $\mathfrak{A}(t)$ ve tvaru (v pojednání rovnice 9a, b, c, d):

$$\bar{g}_2 = -\frac{\bar{p}}{p}g_2,$$
$$g_3\bar{g}_3 = -g_2\bar{g}_2,$$
$$g_3\bar{g}_3 = \frac{\bar{p}}{p}g_2^2,$$
$$q\bar{p}g_2^2 + (\bar{p}q + p\bar{q})\,g_3^2 - 2p\bar{p}\,g_1g_3 + \frac{1}{p}(p\bar{p}' - p'\bar{p})\,g_2g_3 = 0.$$

Označme $\frac{g_3}{g_2} = r$. Pak asymptotická tečna zborcené plochy $\mathfrak{A}(t)$ v bodě $(r; 0; 0; 1)$, různá od tvořící přímky, má Plückerovy souřadnice:

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= \frac{pq}{2\bar{p}^2}r^2 + \frac{p\bar{p}' - \bar{p}p'}{2p\bar{p}^2}r + \frac{\bar{p}q + p\bar{q}}{2p\bar{p}}; \quad g_2 = \frac{p}{\bar{p}}r; \quad g_3 = 1;\\ \bar{g}_1 &= 0; \quad \bar{g}_2 = -r; \quad \bar{g}_3 = \frac{p}{\bar{p}}r^2. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Mění-li se r při pevném t, vytvoří přímky (1) oskulační hyperboloid, jehož bodová rovnice je

$$qx_2^2 + \frac{\bar{p}q + p\bar{q}}{\bar{p}}x_3^2 - 2px_1x_3 + \frac{p\bar{p}' - \bar{p}p'}{p\bar{p}}x_2x_3 + 2\bar{p}x_2x_4 = 0. \tag{2}$$

[1] V invariantech Blaschkovy theorie (viz Blaschke, *Differentialgeometrie* I, 3. vyd., 1930).

Má-li plocha řídící rovinu, pak $q = 0$ a oskulační hyperboloid je paraboloidem. Vyloučíme-li tento případ, lze uvést rovnici (2) na tvar

$$\frac{\dfrac{x_1^2}{\bar p^2}}{q\varrho_1} + \frac{\dfrac{x_2^2}{\bar p^2}}{q\varrho_2} + \frac{\dfrac{x_3^2}{\bar q^2}}{q\varrho_3} = 1, \tag{3}$$

kde $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ jsou kořeny charakteristické rovnice

$$\varrho^3 - \frac{2\bar p q + p\bar q}{\bar p}\varrho^2 - \left[p^2 + \frac{(p\bar p' - \bar p p')^2}{4p^2\bar p^2} - \frac{q}{\bar p}(\bar p q + p\bar q)\right]\varrho + p^2 q = 0. \tag{4}$$

Označíme-li a, b, c poloosy oskulačního hyperboloidu (jedna z nich má záporný čtverec), pak

$$a^2b^2c^2 = \frac{\bar p^6}{q^3\varrho_1\varrho_2\varrho_3} = -\left(\frac{\bar p^3}{pq^2}\right)^2. \tag{5}$$

Plochy, jejichž invarianty p, $\bar p$, q splňují podmínku $\dfrac{\bar p^3}{pq^2} = \text{konst}$, *mají konstantní součin poloos oskulačních hyperboloidů.*

Přímka $\mathfrak{G}$ je *fleknodální asymptotickou tečnou*, t. j. asymptotickou tečnou se čtyřbodovým stykem s plochou, splňují-li její Plückerovy souřadnice rovnici (11) citovaného pojednání:

$$-3(p\bar p' + \bar p p')\,g_1 g_3 + \left[\frac{p\bar p'' - p''\bar p}{p} - 2p(q\bar q + p\bar p)\right] g_2 g_3 +$$
$$+ (2p'q + pq')\frac{\bar p}{p} g_2^2 + (2\bar p' q + 2p'\bar q + p\bar q' + \bar p q')\, g_3^2 = 0.$$

Dosadíme-li sem Plückerovy souřadnice (1) asymptotické tečny, obdržíme kvadratickou rovnici pro r:

$$A + 2Br + Cr^2 = 0, \tag{6}$$

kde

$$A = p\bar p^2\left[p\bar q\left(\log\frac{pq^2}{\bar p^{3}}\right)' + \bar p q\left(\log\frac{\bar p q^2}{p^3}\right)'\right],$$

$$B = p\bar p(p\bar p'' - \bar p p'') - \frac{3}{2}(p^2\bar p'^2 - \bar p^2 p'^2) - 2p^3\bar p(p\bar p + q\bar q),$$

$$C = p^3\bar p q\left(\log\frac{pq^2}{\bar p^3}\right)'.$$

Rovnice (6) určuje na tvořící přímce zborcené plochy *vzdálenosti dvou fleknodů od centrálního bodu této přímky*. Jestliže $C = 0$, splyne jedna část fleknodální čáry s nevlastní čarou plochy. To nastane vždy, když $q = 0$, t. j. když plocha

$\mathfrak{A}(t)$ má řídící rovinu. Vyloučíme-li tento známý případ, pak — ježto $p\bar p q \neq 0$ — nutná a postačující podmínka pro nevlastní fleknodální čáru je

$$\frac{pq^2}{\bar p^3} = \text{konst}.$$

Srovnáním (5) a (7) vychází věta:

Nevlastní čára zborcené plochy je její fleknodální křivkou tehdy a jen tehdy, je-li součin poloos jejího oskulačního hyperboloidu konstanta různá od nuly.

Došlo 11. VI. 1956.

МЕТРИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА КОСОЙ ПОВЕРХНОСТИ С НЕСОБСТВЕННОЙ ФЛЕКНОДАЛЬНОЙ КРИВОЙ

ЯРОМИР ЗЕЗУЛА

Выводы

В статье доказывается теорема: несобственная кривая косой поверхности является ей флекнодальной кривой тогда и только тогда, когда произведение полуосей ее гиперболоида соприкосновения является постоянной отличной от нуля.

METRISCHE CHARAKTERISATION EINER WINDSCHIEFEN REGELFLÄCHE MIT UNEIGENTLICHER FLEKNODALKURVE

JAROMÍR ZEZULA

Zusammenfassung

Es wurde folgender Satz bewiesen: Die uneigentliche Kurve einer windschiefen Regelfläche ist ihre Fleknodalkurve dann und nur dann, wenn das Produkt der Halbachsen ihres Oskulationshyperboloides konstant ist.