MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK VI ČÍSLO 4

O PARABOLICKÝCH A PROJEKTIVNÍCH KLÍNOVÝCH PLOCHÁCH

VÁCLAV HAVEL, PRAHA

Klínové plochy zavedl profesor Fr. Kadeřávek [1], byv k nim přiveden praktickými podněty profesora B. Hacara v souvislosti s betonovými skořepinami. Na popud profesora Kadeřávka jsem věnoval pozornost analytické definici klínových ploch a zavedl jsem pojem plochy Hacarovy [2]; dále jsem odvodil některé speciální vlastnosti klínových ploch parabolických [3]. V této práci podávám další výsledky týkající se parabolických klínových ploch; přitom „stupeň" vytvořujících parabol je reálné číslo, které nemusí být přirozené. Látku jsem rozdělil do čtyř paragrafů: v § 1 jsou odvozeny čtyři základní vlastnosti vyšetřované plochy; v § 2 jsou uvedeny dva synthetické příklady; v § 3 je podáno synthetické zavedení klínových ploch (s projektivním rozšířením pojmu klínové plochy a též s rozšířením některých výsledků z § 1); konečně v § 4 je pojem projektivní plochy ještě dále zobecněn.

§ 1. Plocha o rovnici (1)

Vyšetřujeme reálný souřadnicový euklidovský prostor E_3. Průměty při projekci rovnoběžně se souřadnicovou osou do souřadnicové roviny budeme indexovat x, y, resp. z. Plochu o rovnici $f(x, y, z) = 0$ označíme též symbolem $(f(x, y, z) = 0)$.

Definice 1. *Nechť symboly a_i, b_i, c_i, n $(i = 1, 2, 3)$ jsou reálná čísla, nechť číslo a_2 je nenulové a nechť nad jistou jednorozměrnou oblastí I má funkce $f(x)$ spojitou derivaci, při čemž rovnice $a_2f(x) + b_2x + c_2 = 0$ neplatí pro žádné $x \in I$. Označme symbolem $\varkappa$ plochu o rovnici*

$$z = \frac{a_1f(x) + b_1x + c_1}{(a_2f(x) + b_2x + c_2)^n} \cdot y^n + a_3f(x) + b_3x + c_3. \tag{1}$$

Nechť k je nenulový parametr. Pak označme λ_k válcovou plochu o rovnici

$$y = k(a_2f(x) + b_2x + c_2) \tag{2}$$

a ϱ_k rovinu o rovnici

$$z = (a_1k^n + a_3)\frac{1}{a_2}\left(\frac{y}{k} - b_2x - c_2\right) + (b_1k^n + b_3)x + c_1k^n + c_3. \tag{3}$$

Tvrzení 1. *Plocha $\varkappa$ z definice 1 je speciálním případem explicitní klínové plochy (ve smyslu [2], str. 53, def. 1).*

Důkaz je snadný.

Tvrzení 2. *Pro každé $k \neq 0$ platí $\varrho_k \cap \lambda_k = \varkappa \cap \varrho_k = \varkappa \cap \lambda_k$.*

Důkaz. Eliminací parametru k z rovnic (2), (3) dostaneme rovnici (1). Z rovnic (1), (3) plyne rovnice (2). A konečně z rovnic (1), (2) vyplývá rovnice (3).

Tvrzení 3. *Je-li* $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, *jsou roviny ϱ_k rovnoběžné s přímkou* $p = (y = 0) \cap \left(z = \dfrac{a_3}{a_2} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} x\right)$. *Je-li* $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, *procházejí roviny ϱ_k bodem*

$$B = \left(\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},\ 0,\ \frac{a_3}{a_2}\left[\left(\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right]\right).$$

Důkaz. Položíme-li $y = 0$, lze rovnici (3) přepsat do tvaru

$$z = \frac{k^2}{a_2}\left(- \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right) + \frac{a_3}{a_2}\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right). \qquad (4_k)$$

Je-li $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, roviny o rovnicích (4_k) procházejí zřejmě bodem B, a tedy též roviny ϱ_k procházejí bodem B.

Je-li $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, jsou roviny o rovnicích (4_k) rovnoběžné s přímkou p, a tedy též roviny ϱ_k jsou rovnoběžné s přímkou p.

Tvrzení 4. *Průměty $(\lambda_k)_z$ odpovídají si navzájem v perspektivních afinitách, jejichž osou je osa x a jejichž směr je udán osou y.*

Důkaz plyne okamžitě z rovnice (2).

Tvrzení 5. *Křivka $(\lambda_k)_z$ odpovídá v perspektivní afinitě o směru daném osou y křivce $(y = f(x))_z$; tato křivka je průmětem křivky $(z = f(x))_y$ při promítání rovnoběžném s rovinou $(x = 0)$ do roviny $(z = 0)$, při němž rovina $(y = 0)$ není promítací.*

Důkaz. Tvrzení o křivkách $(y = f(x))_z$, $(z = f(x))_y$ je zřejmé. Křivka $(y = k(a_2 f(x) + b_2 x + c_2))_z$ je součtovou křivkou křivky $(y = ka_2 f(x))_z$ a přímky $(y = kb_2 x + kc_2)_z$, odpovídá tedy v jisté afinitě o směru daném osou y křivce $(y = ka_2 f(x))_z$, a tedy též odpovídá v jisté afinitě o směru daném osou y křivce $(y = f(x)_z)_z$.

Tvrzení je dokázáno. Z něho plyne tento *důsledek*: Nechť v^+ je křivka, která je rovnoběžným průmětem křivky $v = \varkappa \cap (y = 0)$, při čemž průmětnou je rovina $(z = 0)$, rovina $(x = 0)$ je promítací rovinou, kdežto rovina $(y = 0)$ není promítací rovinou. Pak křivka v^+ odpovídá kterékoliv křivce $w_z = (\lambda_k)_z$ v afinitě o směru udaném osou y. [Přitom $w = \varkappa \cap \lambda_k$ je rovinná křivka.]

§ 2. Příklady na plochu $\varkappa$ z definice 1

V daném prostoru E_3 zvolme speciálně souřadnice pravoúhlé. V důsledku tvrzení 4 zvolme dále za křivky v, w paraboly $(n = 2)$. Příslušná plocha $\varkappa$ úzce souvisí s plochami Hacarovými ([2], str. 56, def. 3). Vytvoříme tuto plochu syntheticky: Nechť parabola $v \subset (y = 0)$ má za osu souřadnicovou osu z, nechť rovina ϱ není kolmá k rovině $(z = 0)$ a nechť parabola $w \subset \varrho$ má osu kolmou k ose x.

Nechť dále ξ je rovina rovnoběžná s rovinou $(x = 0)$, položme $V^\xi = \xi \cap v$, $W^\xi = \xi \cap w$. Je-li $V^\xi = W^\xi$, pak definujme $k^\xi = V^\xi$. Jsou-li druhé (resp. třetí) souřadnice bodů $V^\xi \neq W^\xi$ stejné, definujme k^ξ jakožto přímku $V^\xi W^\xi$. Liší-li se od sebe jak druhé, tak i třetí souřadnice bodů $V^\xi W^\xi$, definujme k^ξ jakožto parabolu o ose $\xi \cap (y = 0)$, při čemž V^ξ, W^ξ jsou body této paraboly. Sjednocení $\mathfrak{s}$ všech útvarů k^ξ (při proměnné rovině ξ) obsahuje v sobě speciální plochu $\varkappa$ ve smyslu definice 1. Podle upravených tvrzení 2, 4 obsahuje plocha $\mathfrak{s}$ paraboly w^k, jejichž průměty w_z^k jsou kolmo afinní s parabolou w_z, při čemž osa x je osou afinity. Všecky roviny $\varrho_k \supset w^k$ buďto procházejí jistým bodem B roviny $(y = 0)$, anebo jsou rovnoběžné s jistou přímkou $p \subset (y = 0)$, jak plyne z tvrzení 3.

Dodatek. Nyní proveďme tytéž úvahy jako v předchozím, s výjimkou předpokladu o rovině ϱ. Ten nahraďme předpokladem, že rovina ϱ je kolmá k rovině $(z = 0)$, že však ani nesplývá s rovinou $(y = 0)$, ani není kolmá k ose x; v rovině ϱ zvolme parabolu w, jejíž osa je kolmá k ose x.

Předpokládáme-li, že platí $v \subset (z = Ax^2 + c)$, $w = (z = a(x + b)^2 + c) \cap (y = dx + e)$, kde konstanty A, C, a, b, c, d, e mají svůj zřejmý význam, má vyšetřovaná plocha rovnici

$$(a(x + b)^2 + c - Ax^2C)y^2 = (z - Ax^2 - C)(dx + e)^2. \qquad (5)$$

Z této rovnice snadno odvodíme *tvrzení 6*:

Plocha o rovnici (5) obsahuje v rovinách $\varrho_k = (k(dx + e) = y)$ paraboly s osami kolmými k ose x.

Důkazy pro jejich jednoduchost vynecháváme. Dodatek je tím ukončen.

Provedeme ještě jednu specialisaci plochy $\varkappa$ z definice 1, a to pro $n = -1$: V rovině $(y = 0)$ zvolme křivku $v \subset (z = f(x) + b_3 x + c_3)$; o rovině ϱ předpokládejme, že není kolmá k rovině $(z = 0)$ a zvolme křivku $w \subset \varrho$ tak, že $w \subset (y = a_2 f(x) + b_2 x + c_2)$. Je-li opět ξ rovina rovnoběžná s rovinou $(x = 0)$ a mající s křivkou v neprázdný průnik, položme $V^\xi = \xi \cap v$, $W^\xi = \xi \cap w$. Je-li $V^\xi = W^\xi$, pak definujme $k^\xi = V^\xi$. Jsou-li druhé (resp. třetí) souřadnice bodů $V^\xi \neq W^\xi$ stejné, definujme k^ξ jakožto přímku $V^\xi W^\xi$. Liší-li se od sebe jak druhé, tak i třetí souřadnice bodů V^ξ, W^ξ, definujme k^ξ jakožto rovnoosou hyperbolu o středu V^ξ, asymptotě $\xi \cap (y = 0)$, při čemž bod W^ξ leží na této hyperbole. Sjednocení $\mathfrak{j}$ útvarů k^ξ (při proměnné rovině ξ) obsahuje opět speciální plochu $\varkappa$ z definice 1. Podle upravených tvrzení 2, 4 obsahuje plocha $\mathfrak{f}$ systém křivek w^k, jejichž průměty w^k_z jsou kolmo afinní ke křivce w_z při ose afinity splývající s osou x. Podle tvrzení 3 roviny $\varrho_k \supset w^k$ procházejí buďto společným bodem $B \in (y = 0)$, anebo jsou rovnoběžné s jistou přímkou $p \subset (y = 0)$.

§ 3. Synthetická definice klínových ploch

Vyšetřujme opět souřadnicový prostor E_3 a pro stručnost označme rovinu $(x = 0)$ symbolem ν.

Definice 2. *„Plochou" nazveme jistou plochu α, pro niž libovolné dvě křivky $(\alpha \cap \beta)_x$, $(\alpha \cap \gamma)_x (\beta, \gamma$ jsou roviny rovnoběžné s rovinou $\nu)$ si odpovídají v afinitě, jejíž osa je rovnoběžná s osou y a jejíž směr je udán osou z.*

Realisaci plochy z definice 2 provedeme dvěma způsoby.

1. způsob. Nechť k, v, w jsou křivky s těmito vlastnostmi: $k \subset \nu$, průměty v_{zx}, w_{zx} jsou dva různé body ležící v průmětu k_z; označíme-li ξ rovinu rovnoběžnou s rovinou ν a mající s jednou z křivek v, w neprázdný průnik, jsou oba průniky $V^\xi = \xi \cap v$, $W^\xi = \xi \cap w$ jednobodové a přímka $V^\xi W^\xi$ není rovnoběžná s osou y; průnik $k \cap v$ není prázdný.

Je-li $V^\xi W^\xi \parallel V^\nu W^\nu$, pak definujme $k^\xi \subset \xi$ tak, že k^ξ_x je obrazem křivky k v posunutí daném vektorem $V^\nu V^\xi_x$.

Není-li $V^\xi W^\xi \parallel V^\nu W^\nu$, proložme bodem $P^\xi = V^\xi_x W^\xi_x \cap V^\nu W^\nu$ přímku $o^\xi \parallel y$ a definujme $k^\xi \subset \xi$ tak, že k^ξ_x je obrazem křivky k v afinitě o ose o^ξ a směru daném osou z.

Sjednocení všech k^ξ je plochou ve smyslu definice 3.

2. způsob. Nechť k, v, w jsou křivky s těmito vlastnostmi: $k \subset \nu$; každá přímka, rovnoběžná s některou z os y, z, má s křivkou k buď prázdný, anebo jednobodový průnik; průměty v_z, w_z mají prázdný průnik; $v_{zx} \subset k_z \supset w_{zx}$; označíme-li ξ rovinu rovnoběžnou s rovinou ν a mající s jednou z křivek v, w neprázdný průnik, jsou oba průniky $V^\xi = \xi \cap v$, $W^\xi = \xi \cap w$ jednobodové a $V^\xi W^\xi \not\parallel y$; průnik $k \cap v$ není prázdný. Ke každému bodu V^ξ (resp. W^ξ) přiřaďme bod $N^\xi \in k$ (resp. $M^\xi \in k$) tak, že body V^ξ_x, N^ξ (resp. W^ξ_x, M^ξ) leží na téže rovnoběžce s osou z.

Je-li $V^\xi W^\xi \parallel N^\xi M^\xi$, pak definujme $k^\xi \subset \xi$ tak, že k^ξ_x je obrazem křivky k v posunutí daném vektorem $N^\xi V^\xi$.

Není-li $V^\xi W^\xi \parallel N^\xi M^\xi$, proložme bodem $P^\xi = V^\xi_x W^\xi_x \cap N^\xi M^\xi$ přímku $o^\xi \parallel y$ a definujme $k^\xi \subset \xi$ tak, že k^ξ_x je obrazem křivky k v afinitě o ose o^ξ a směru daném osou z.

Sjednocení všech k^ξ je plochou ve smyslu definice 3.

Poznámka 1. Zmíníme se stručně o souvislosti plochy z definice 2 s implicitními a explicitními plochami klínovými. Plocha z definice 2 je zajisté zvláštním případem implicitní klínové plochy ([2], def. 1, 2 a pozn. 1, 2).

Plocha zavedená podle 2. způsobu je dokonce zvláštním případem explicitní plochy klínové. Specialisace je však nepatrná: na ploše z definice 2 nejsou připuštěny singulární případy průniků $\varkappa \cap \xi$, totiž průniků, které buďto leží na přímce rovnoběžné s osou y, anebo jsou tvořeny soustavou přímek rovnoběžných s osou z.

Definici 2 lze označit jako synthetickou definici klínové plochy. Této definice (a sice podle 2. způsobu) jsme již užili v § 2. Definice 2 má jednu výhodu: lze ji bez obtíží zobecnit projektivně. Takovémuto zobecnění věnujme nyní své další úvahy.

Ve zbývající části článku budeme vyšetřovat reálný projektivní prostor P_3; zvolme v něm nekomplanární body O, X, Y, Z. Průměty z bodu X, resp. Y, resp. Z do roviny $\nu = OYZ$, resp. OXZ, resp. OXY označujme indexem X, resp. Y, resp. Z.

Definice 3. *„Plochou" nazveme plochu $\varkappa \subset P_3$, pro niž každé dvě křivky $(\varkappa \cap \beta)_X$, $(\varkappa \cap \gamma)_X$ $(\beta, \gamma$ jsou roviny jdoucí přímkou $YZ)$ si odpovídají v perspektivní kolineaci o středu Z a o ose jdoucí bodem Y.*

Provedeme opět dvě realisace plochy z definice 3, a to analogicky podle předchozího.

1. způsob. Nechť k, v, w jsou křivky s těmito vlastnostmi: $k \subset \nu$; v_{ZX}, w_{ZX} jsou dva různé body, ležící v k_Z; označíme-li ξ rovinu jdoucí přímkou YZ a mající s jednou z křivek v, w neprázdný průnik, jsou oba průniky $V^\xi = \xi \cap v$, $W^\xi = \xi \cap w$ jednobodové a přímka $V^\xi W^\xi$ neprochází bodem Y; průnik $k \cap v$ není prázdný.

Je-li $V^\xi_X W^\xi_X = V^\nu W^\nu$, pak definujme $k^\xi \subset \xi$ tak, že $k^\xi_X = k$.

Jestliže přímky $V^\xi_X W^\xi_X$, $V^\nu W^\nu$ nesplývají, definujme $k^\xi \subset \xi$ tak, že k^ξ_X je obrazem křivky k v kolineaci o středu Z a ose jdoucí body Y, $P^\xi = V^\xi_X W^\xi_X \cap$ $\cap V^\nu W^\nu$. Sjednocení všech k^ξ je plochou ve smyslu definice 3.

2. způsob. Nechť k, v, w jsou křivky s těmito vlastnostmi: $k \subset \nu$; každá přímka jdoucí bodem Y nebo Z má s křivkou k buď prázdný, anebo jednobodový průnik; $v_Z \cap w_Z = \emptyset$; $v_{ZX} \subset k_Z \supset w_{ZX}$; označíme-li ξ rovinu jdoucí přímkou YZ a mající s jednou z křivek v, w neprázdný průnik, jsou oba průniky $V^\xi = \xi \cap v$, $W^\xi = \xi \cap w$ jednobodové a $V^\xi W^\xi \not\ni Y$; $k \cap v \neq \emptyset$. Ke každému bodu V^ξ (resp. W^ξ) přiřaďme bod $N^\xi \in k$ (resp. $M^\xi \in k$) tak, že body V^ξ_X, N^ξ (resp. W^ξ_X, M^ξ) leží spolu s bodem Z na téže přímce.

Je-li $V^\xi_X W^\xi_X = N^\xi M^\xi$, pak definujme $k^\xi \subset \xi$ tak, že $k^\xi_X = k$.

Nesplývají-li přímky $V^\xi_X W^\xi_X$, $N^\xi M^\xi$, definujme $k^\xi \subset \xi$ tak, že k^ξ_X je obrazem křivky k v kolineaci o středu Z a ose jdoucí body $P^\xi = V^\xi_X W^\xi_X \cap N^\xi M^\xi$, Y.

Sjednocení $\varkappa$ všech k^ξ je plochou ve smyslu definice 3.

Poznámka 2. Předchozí definici lze označit jako synthetickou definici projektivní klínové plochy.

Projektivní rozšíření některých výsledků z § 1

Zaveďme v P_3 homogenní souřadnice tak, že $\nu = (x_1 = 0)$, $OXZ = (x_2 = 0)$, $OXY = (x_3 = 0)$, $XYZ = (x_4 = 0)$. V 2. způsobu realisace zvolme $k \subset (x_3 x_4^n = ax_2^n + bx_4^n)$, $Z \notin k$, n celé, $v \subset (x_2 = 0)$; dále volme křivku w v jisté rovině $\varrho \not\ni XZ$ tak, že w_Z je v kolineaci o středu Y a ose $o \not\ni Y$ obrazem křivky v^+, která je průmětem křivky v do roviny $(x_3 = 0)$ z některého bodu přímky YZ, různého od bodu Z. Označme $\lambda_{\mathfrak{K}}$ kuželovou plochu o vrcholu Z a řídící křivce, která je obrazem křivky w_Z v kolineaci $\mathfrak{K}$ o středu Y a ose OX.

Tvrzení 7. *Křivka $\alpha \cap \lambda_{\mathfrak{K}}$ leží v jisté rovině $\varrho_{\mathfrak{K}}$. Roviny $\varrho_{\mathfrak{K}}$ (při proměnném $\mathfrak{K}$) mají společný bod v rovině OXZ.*

Důkaz plyne z projektivního rozšíření tvrzení 2, 3.

Poznámka 3. Snadno bychom provedli (pro n celé) homogenisaci rovnice (1), a tím bychom odvodili i rovnici pro příslušnou projektivní klínovou plochu. Některé body, získané homogenisací, bylo by ovšem nutno vyloučit, abychom zůstali ve shodě s definicí 3.

Poznamenejme ještě, že celý aparát (definice 2, 3 s jejich realisacemi) jsme neuváděli jen pro rozšíření některých výsledků z § 1, ale vůbec jako *nový theoretický způsob zavedení klínových ploch.*

Přejdeme-li od P_3 k E_3 volbou nevlastní roviny XYZ, dostaneme z definice 3 definici 2. Zvolíme-li však za nevlastní rovinu jinou rovinu než XYZ, dostaneme jakožto afinní (euklidovskou) specialisaci plochy α z definice 3 v *zcela nový typ plochy*, která úzce souvisí se zobecněnou plochou translační [5].

Konečně učiňme ještě jednu theoretickou poznámku: Definici 3 bylo by možno rozšířit pro desarguesovský projektivní prostor a pro obecné bodové množiny (místo křivek). Toto rozšíření nečinilo by potíží, mělo by však patrně jen ryze theoretický význam. Proto od podrobností upouštíme.

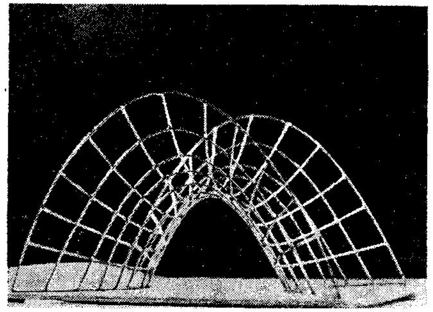
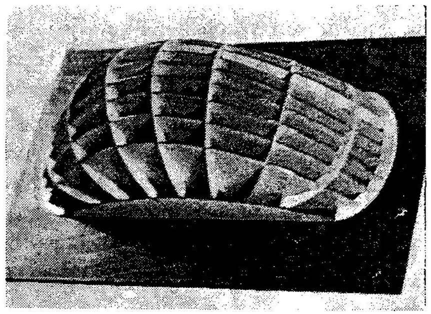
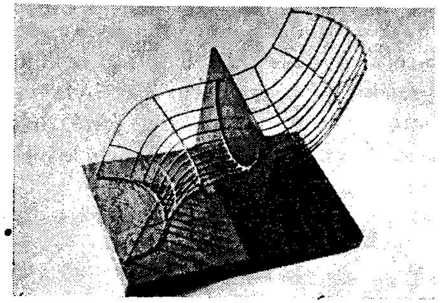
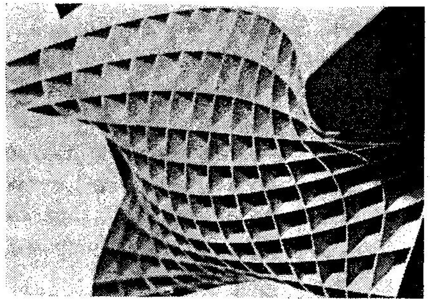
§ 4. Zobecněná klínová plocha

V prostoru P_3 zvolme opět nekomplanární body O, X, Y, Z. Definujme bodové zobrazení τ roviny OXY na sebe tak, aby byly splněny tyto podmínky: zobrazení τ je topologické; v zobrazení τ je každá přímka, jdoucí bodem X, samodružná.

Kuželovou plochu o vrcholu V a řídící křivce r označme stručně Vr. Průmět z bodu Y (resp. Z) do roviny OXZ (resp. OXY) označme indexem Y (resp. Z). Průmět z bodu X do kuželové plochy $\nu = Z(OY)^r$ označme indexem X.

Definice 4. *„Plochou" budeme rozumět plochu $\alpha \subset P_3$, pro niž libovolné dvě křivky $(\alpha \cap \beta)_X$, $(\alpha \cap \gamma)_X$ (β, γ jsou kuželové plochy Zb^r, Zc^r, kde b, c jsou bodem Y jdoucí přímky roviny OXY) odpovídají si v centrální kolineaci o středu Z a osové rovině jdoucí přímkou XY.*

Provedeme opět realisace plochy z definice 4.

1. způsob. Nechť křivky k, v, w mají tyto vlastnosti: $k \subset \nu$; v_{ZX}, w_{ZX} jsou dva různé body, ležící v k_Z. Označíme ξ kuželovou plochu o vrcholu Z a řídící křivce, která je v zobrazení τ obrazem přímky jdoucí bodem Y, a která má aspoň s jednou z křivek v, w neprázdný průnik; pak průniky $V^\xi = \xi \cap v$, $W^\xi = \xi \cap w$ jsou jednobodové a přímka $V_X^\xi W_X^\xi$ neprotíná přímku XY. Průnik $k \cap v$ není prázdný.

Je-li $V_X^\xi W_X^\xi = V^\nu W^\nu$, pak definujme $k^\xi \subset \xi$ tak, že $k_X^\xi = k$.

Není-li $V_X^\xi W_X^\xi = V^\nu W^\nu$, definujme $k^\xi \subset \xi$ tak, že křivka k_X^ξ odpovídá křivce k v kolineaci o středu Z a osové rovině, jdoucí body $X, Y, P^\xi = V_X^\xi W_X^\xi \cap V^\nu W^\nu$.

Sjednocení všech křivek k^ξ je plochou ve smyslu definice 4.

2. způsob. Nechť křivky k, v, w mají tyto vlastnosti: $k \subset \nu$; každá rovina, jdoucí přímkou XZ, resp. XY, má s křivkou k průnik prázdný anebo jednobodový; $v_Z \cap w_Z = \emptyset$; $v_{ZX} \subset k_Z \supset w_{ZX}$; označíme-li ξ kuželovou plochu téhož významu jako v 1. způsobu, jsou oba průniky $V^\xi = \xi \cap v$, $W^\xi = \xi \cap w$ jednobodové a přímka $V_X^\xi W_X^\xi$ neprotíná přímku XY; $k \cap v \neq \emptyset$.

Ke každému bodu V^ξ (resp. W^ξ) přiřaďme bod $N^\xi \in k$ (resp. $M^\xi \in k$) tak, že body V_X^ξ, N^ξ, Z (resp. W_X^ξ, M^ξ, Z) leží na téže přímce.

Je-li $V_X^\xi W_X^\xi = N^\xi M^\xi$, pak definujme $k^\xi \subset \xi$ tak, že $k_X^\xi = k$.

Není-li $V_X^\xi W_X^\xi = N^\xi M^\xi$, definujme $k^\xi \subset \xi$ tak, že k_X^ξ je obrazem křivky k v kolineaci o středu Z a osové rovině jdoucí body $P^\xi = V_X^\xi W_X^\xi \cap N^\xi M^\xi$, X, Y.

Sjednocení všech křivek k_ξ^s je plochou ve smyslu definice 4.

Poznámka 4. Při přechodu od P_3 k E_3 dostaneme afinní (euklidovskou) specialisaci definice 4, která poskytuje opět nový typ plochy v E_3. Definici 4 bylo by opět možno rozšířit pro desarguesovský projektivní prostor a pro obecné bodové množiny (místo křivek); tím se však zabývat nebudeme.

Shrnutí. V první části práce byla studována speciální klínová plocha, která kromě vytvořujícího systému obecných parabol obsahuje další systém rovinných křivek s jednoduchými vlastnostmi, takže těchto dvou systémů křivek lze prakticky použít při vyztužování dané plochy jakožto plochy skořepinové.

Druhá část práce byla věnována synthetické definici klínové plochy a otázkám s tím spojeným. Na rozdíl od definice analytické ([2], def. 1, 2) definici synthetickou bylo možno přenést i do projektivního prostoru. Tak byla zavedena projektivní klínová plocha. Tento poslední pojem byl ještě dále zobecněn (po jisté topologické transformaci), když místo vytvořujících křivek rovinných byly připuštěny též vytvořující křivky prostorové.

Byly učiněny poznámky o možnostech dalšího zobecnění.

LITERATURA

1. Kadeřávek F., O skupinách ploch, které mají společné charakteristické vlastnosti, Čas. pro pěstování matematiky, 75 (1950), 277–282. 2. Havel V., O plochách klínových I, Časopis pro pěstování matematiky, 80 (1955), 51–60. 3. Havel V., O plochách klínových II, Čas. pro pěstování matematiky, 80 (1955), 308–316. 4. Harant F., Havel V., O některých vlastnostech klínových ploch, sborník Geometrie v umění a v technice, SNTL, Praha 1955, 52–67. 5. Havel V., O projektivním pojetí ploch translačních, Čas. pro pěstování matematiky, 81 (1956), 331–336.

Došlo 9. VII. 1955.

ÜBER DIE PARABOLISCHEN UND PROJEKTIVEN KEILFLÄCHEN

VÁCLAV HAVEL

Zusammenfasung

In dem ersten Teil des Beitrages wird eine durch die Gleichung

$$z = \frac{a_1 f(x) + b_1 x + c_1}{(a_2 f(x) + b_2 x + c_2)^n} y^n + a_3 f(x) + b_3 x + c_3$$

charakterisierte Keilfläche untersucht; die reellen Koefizienten a_i, b_i, c_i, der Exponent n und die Funktion $f(x)$ werden dabei durch geeignete Bedingungen gebunden. Die durch die Gleichung $z = k(a_2 f(x) + b_2 x + c_2)$ bestimmte Zylinderflächen (wo $k \neq 0$ ein Parameter ist) schneiden die gegebene Keilfläche in ebenen Kurven durch.

In dem nächsten Teil des Beitrages wird die synthetische Definition der Keilfläche im euklidischen und auch im projektiven Raume ausgeführt. Einige Überlegungen werden dann den Möglichkeiten der weiteren Verallgemeinerung der Keilfläche gewidmet.