MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, VI, 3 — 1956

COMPTONOV JAV V *M*-HLADINE VODÍKOVÉHO ATÓMU

JÁN FISCHER, JÁN WEISS
Katedra fyziky Prírodovedeckej fakulty UK v Bratislave

Podrobné teórie tzv. neperiodických atomárnych dejov, ku ktorým okrem Comptonovho javu patrí napr. fotoefekt a zrazy, vznikli až po objavení kvantovej mechaniky. Prvé hrubé výsledky v teórii Comptonovho javu na voľnom elektróne dosiahli sa, pravda, už metódami klasickej fyziky na podklade fotónovej teórie žiarenia.

Kvantovo-mechanická teória Comptonovho javu na *viazanom* elektróne (vo vodíkovom atóme), najmä odvodenie rozdeľovacej funkcie pre smerové rozdelenie Comptonových (odrazových) elektrónov, pochádza od G. Wentzla [1] a opiera sa o Diracovu kvantovo-mechanickú teóriu žiarenia.

V ďalšom nadviažeme na práce G. Wentzla, resp. jedného z autorov [2].

§ 1. Podľa Diraca [3] uzatvárame elektromagnetické pole našej röntgenovej vlny do veľkej kocky objemu $V = l^3$. Potom budú zložky vlnového vektora stojatých vĺn $\vec{k}_s\left(|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$ „kvantované", t. j. budú tvoriť postupnosť diskrétnych hodnôt:

$$k_{sx} = \frac{2\pi}{l} s_1; \quad k_{sy} = \frac{2\pi}{l} s_2; \quad k_{sz} = \frac{2\pi}{l} s_3 (s_1, s_2, s_3 = 1, 2, 3 \ldots).$$

Trojica hodnôt s_1, s_2, s_3 však ešte neurčuje polarizáciu vlny. Preto patria ku každej trojici čísel s_1, s_2, s_3 dve na seba kolmé, ale ináč nezávislé zložky elektromagnetických kmitov.

Na základe formálnej analógie výrazov pre energiu žiarivého poľa a systému harmonických oscilátorov možno podľa Diraca elektromagnetické pole nahradiť sústavou harmonických (nespriahnutých) oscilátorov, vymieňajúcich si energiu s korpuskulárnou sústavou atómu. Počet oscilátorov je daný počtom stojatých vĺn dutinového žiarenia. Ich (kruhová) frekvencia je $\omega_s = c(\vec{k}_s)$ a energia $\varepsilon_s = N_s \cdot \hbar\omega_s$. $N_s = 0, 1, 2, \ldots$ sú kvantové čísla poľa. Úhrnná energia poľa je $\sum_s N_s \cdot \hbar\omega_s$. Pre oscilátory platí známe výberové pravidlo: $\Delta N_r = \pm 1$ a $\Delta N_s = 0$ pre všetky $s \neq r$.

§ 2. V práci použijeme tieto symboly (sú usporiadané v abecednom poriadku):

$a_{nl}, a_{\varkappa l}$ v čase pomaly premenné pravdepodobnostné amplitúdy diskrétneho stavu, resp. stavu so spojitou (kladnou) energiou elektrónu

$\alpha = \frac{me^2}{\hbar^2}$ prevrátená hodnota Bohrovho prvého vodíkového polomeru

c rýchlosť svetla

e náboj elektrónu

$\vec{e}_{r_1}, \vec{e}_{r_2}$ jednotkový vektor vo smere elektrického vektora primárnej, resp. rozptýlenej vlny

$\varepsilon_{n_1 l_1, \varkappa l_2}$ element poruchovej matice [bez konšt. faktora, definovaný rov. (5, 4)]

$\Phi(N_1, N_2, \ldots)$ vlnová funkcia systému „oscilátorov" reprezentujúcich elektromagnetické pole

$g = \frac{N_{r_1}\hbar\omega_1}{V}$ hustota energie primárnej vlny

$\Gamma(1 + |\mu_0| + 2in)$ gama funkcia komplexnej premennej

$\hat{H}^i$ operátor interakčnej energie poľa a elektrónu

$\vec{k}_{r_1}, \vec{k}_{r_2}$ vlnový vektor primárnej a rozptýlenej vlny $\Delta\vec{k} = \vec{k}_{r_2} - \vec{k}_{r_1}$

$\varkappa$ spojitý parameter energie $W_\varkappa = \frac{\hbar^2\varkappa^2}{2m}$

$\varkappa_0 = \frac{Z\alpha}{2n_0}$ (z práce [2])

m hmota elektrónu

m spojitý kvantový parameter v parabolických súradniciach

μ_0 magnetické kvantové číslo elektrónu

$n = \frac{Z\alpha}{2\varkappa}$ (z práce [2]).

$n_0 = n_1 + n_2 + \mu_0 + 1$ hlavné kvantové číslo

n_1, n_2 parabolické kvantové čísla

N_s kvantové číslo elektromagnetického poľa

$N_{n_1 n_2 \mu_0}$ normovacia konštanta vlnovej funkcie diskrétneho stavu vodíkového atómu v parabolických súradniciach

$$N_{n_1 n_2 \mu_0} = \left(\frac{2(Z\alpha)^{2|\mu_0|+3}}{\pi n_0^{2|\mu_0|+4}} \cdot \frac{n_1!\, n_2!}{[(|\mu_0| + n_1)!\,(|\mu_0| + n_2)!]^3} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ pre } \mu_0 \neq 0$$

$$N_{n_1 n_2 0} = \frac{(Z\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}} n_0^2 n_1!\, n_2!} \quad \text{pre } \mu_0 = 0$$

N úhrnná pravdepodobnosť Comptonovho javu (5, 1), (5,2)

ω_{r_1}, ω_{r_2} kruhová frekvencia primárnej a rozptýlenej röntgenovej vlny

$$\Delta\omega = \frac{1}{\hbar}(W_\varkappa - W_{n_1}) - (\omega_{r_1} - \omega_{r_2})$$

$p = \dfrac{|\Delta \vec{k}|}{4\varkappa_0}$ (z práce [2]; tam označené ω)

$\Psi_{nl} = u_{nl} e^{\frac{i}{\hbar} W_n t}$ charakteristická funkcia vodíkového atómu v diskrétnom stacionárnom stave

$\Psi_{\varkappa l} = u_{\varkappa l} e^{\frac{i}{\hbar} W_\varkappa t}$ charakteristická funkcia vodíkového atómu v stave so spojitou (kladnou) energiou elektrónu

$\Psi_{n_1 n_2 \mu_0}$ vlnová funkcia Comptonovho elektrónu v parabolických súradniciach

$\vec{r}$ polohový vektor elektrónu

r, ϑ, φ sférické súradnice s polárnou osou vo smere vektora $\Delta\vec{k} = \vec{k}_{r_2} - \vec{k}_{r_1}$

ϱ pomocná veličina bez fyzikálneho významu; jej hodnota je $\varrho = \dfrac{1}{2}$

s, t pomocné veličiny pre definíciu Laguerrových polynómov:

$$L^{\mu_0}_{\mu_0+n_1}(\xi) = (-1)^{\mu_0} \cdot \left[\frac{\partial^{\mu_0+n_1}}{\partial t^{\mu_0+n_1}} \left(\frac{t^{\mu_0} e^{-\frac{\xi t}{1-t}}}{(1-t)^{\mu_0+1}} \right) \right]_{t=0}$$

a analogický výraz so „s“ pre $L^{\mu_0}_{\mu_0+n_2}(\eta)$

t čas (sec)

$U_{n_1 l_1, \varkappa l_2}$ element poruchovej matice (4,5)

$\vec{v}$ rýchlosť Comptonovho elektrónu

$V = l^3$ objem ohraničeného elektromagnetického poľa röntgenovej vlny

$W_{n_1} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\left(\dfrac{Z\alpha}{3}\right)^2$ energia elektrónu v M-hladine

$W_\varkappa = \dfrac{\hbar^2 \varkappa^2}{2m}$ energia elektrónu v spojitom spektre

$$z_1 = -\frac{2\varkappa_0}{\varkappa}\left[p + i\left(\varrho + \frac{t}{1-t}\right)\right] \quad \text{(z práce [2])}$$

$$z_2 = -\frac{2\varkappa_0}{\varkappa}\left[-p + i\left(\varrho + \frac{s}{1-s}\right)\right] \quad \text{(z práce [2])}$$

ξ, η, φ parabolické súradnice

$$x = \frac{1}{2}(\xi - \eta); \quad y = \sqrt{\xi\eta}\cos\varphi; \quad z = \sqrt{\xi\eta}\sin\varphi.$$

§ 3. Budeme skúmať sústavu pozostávajúcu z popísaného elektromagnetického poľa a jedného atómu s jedným elektrónom v rôznych stavoch M-hladiny. Budeme ďalej predpokladať:

a) že energia na atóm dopadajúceho fotónu $\hbar\omega$ je malá oproti relativistickej energii elektrónu:

$$\hbar\omega \ll mc^2, \qquad (mc^2 = 0{,}51 \text{ MeV}),$$

t. j. vlnová dĺžka dopadajúceho žiarenia je veľká oproti Comptonovej vlnovej dĺžke $\Lambda = \dfrac{h}{mc} = 0{,}024$ Å;

b) kinetická energia Comptonových (odrazových) elektrónov je veľká oproti ich väzbovej energii v atóme

$$\left(W = \frac{Rhc}{9} = 1{,}5 \text{ eV}, \text{ resp. } \frac{Rhc}{9} Z^2 = 1{,}5\, Z^2 \text{ eV} \right).$$

Energia našej zloženej sústavy skladá sa z energie atomárneho elektrónu nerušeného elektromagnetickým poľom H^a, z energie elektromagnetického poľa H^p a z interakčnej energie poľa s atómom H^i:

$$H = H^a + H^p + H^i.$$

Interakčnú energiu H^i považujeme za poruchu.

Charakteristickú funkciu nerušenej zloženej sústavy píšeme ako súčin charakteristickej funkcie sústavy oscilátorov reprezentujúcich elektromagnetické pole a charakteristickej funkcie vodíkového atómu

$$\Psi_{nl} = u_{nl}\, e^{\frac{i}{\hbar} W_n t} \quad \text{pre diskrétne stavy elektrónu,}$$

$$\Psi_{\varkappa l} = u_{\varkappa l}\, e^{\frac{i}{\hbar} W_\varkappa t} \quad \text{pre spojité spektrum.} \tag{3,1}$$

Pritom spojitý parameter energie $\varkappa$ súvisí s energiou elektrónu podľa vzťahu

$$\varkappa^2 = \frac{2m W_\varkappa}{\hbar^2}. \tag{3,2}$$

Charakteristické funkcie vodíkového atómu Ψ_{nl}, $\Psi_{\varkappa l}$ splňujú Schrödingerovu rovnicu v tomto tvare:

$$-i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \widehat{H}^a\Psi. \tag{3,3}$$

Charakteristickú funkciu systému oscilátorov označíme $\Phi(N_1, N_2, \ldots)$.

Vlnovú funkciu atomárneho elektrónu v elektromagnetickom poli röntgenovej vlny (rušená sústava) Ψ hľadáme podľa Diraca v podobe rozvoja podľa charakteristických funkcií sústavy nerušenej

$$\Psi = \sum_n \sum_l \sum_{N_1, N_2, \ldots} a_{nl}(N_1, N_2, \ldots)\, u_{nl}\Phi(N_1, N_2 \ldots)\, e^{i\left(\frac{W_n}{\hbar} + \sum_s N_s\omega_s\right)t} +$$
$$+ \int d\varkappa \sum_l \sum_{N_1, N_2, \ldots} a_{\varkappa l}(N_1, N_2 \ldots)\, u_{\varkappa l}\Phi(N_1, N_2 \ldots)\, e^{i\left(\frac{W_\varkappa}{\hbar} + \sum_s N_s\omega_s\right)t}. \tag{3,4}$$

Podľa Diracovej poruchovej teórie dostaneme pre rozvojové koeficienty a_{nl}, resp. $a_{\varkappa l}$ (v čase pomaly sa meniace pravdepodobnostné amplitúdy) známym spôsobom diferenciálne rovnice

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t} a_{n(\varkappa)l}(N_1, N_2, \ldots) =$$
$$= \sum_{n'} \sum_{l'} \sum_{N_1', N_2', \ldots} a_{n'l'}(N_1', N_2', \ldots)\, U_{n'l', n(\varkappa)l}(N_1, N_2, \ldots; N_1', N_2', \ldots)\,.$$
$$. e^{i\left[\frac{W_{n'} - W_{n(\varkappa)}}{\hbar} + \sum_s (N_s' - N_s)\omega_s\right]t} +$$
$$+ \int d\varkappa' \sum_{l'} \sum_{N_1', N_2', \ldots} a_{\varkappa' l'}(N_1', N_2', \ldots)\, U_{\varkappa' l', n(\varkappa)l}(N_1, N_2, \ldots; N_1', N_2', \ldots)\,.$$
$$. e^{i\left[\frac{W_{\varkappa'} - W_{n(\varkappa)}}{\hbar} + \sum_s (N_s' - N_s)\omega_s\right]t} \tag{3,5}$$

$U_{n'(\varkappa')l', n(\varkappa)l}$ je element poruchovej matice.

Príslušný operátor energie vzájomného pôsobenia elektromagnetického poľa a atomárneho elektrónu $\widehat{H}^i$ („porucha") má tvar [4] (§ 27)

$$\widehat{H}^i = -\frac{e}{mc}(\widehat{\vec{A}}\widehat{\vec{p}}) + \frac{i\hbar e}{2mc}\widehat{\vec{A}} + \frac{e^2}{2mc^2}\widehat{\vec{A}}^2, \tag{3,6}$$

kde $\vec{A}$ je vektorpotenciál elektromagnetického poľa vlny,

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}, \qquad \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\vec{A}}{dt},$$

($\vec{E}$, $\vec{H}$ je vektor intenzity elektrického, resp. magnetického poľa),

$$\vec{p} = m\dot{\vec{r}} + \frac{e}{c}\vec{A}$$

($\vec{p}$ je kinetický impulz a $\vec{r}$ je tu polohový vektor elektrónu).

Pretože pre každé $\vec{A}$ platí

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{rot}(\vec{A} + \operatorname{grad} F),$$

možno voliť funkciu F, resp. $\vec{A}$ tak, aby $\operatorname{div}\vec{A} = 0$. Potom sa $\widehat{H}^i$ redukuje na dva členy

$$\widehat{H}^i = -\frac{e}{mc}(\widehat{\vec{A}}\widehat{\vec{p}}) + \frac{e^2}{m^2c^2}\widehat{\vec{A}}^2. \tag{3,7}$$

§ 4. Podľa výberového pravidla pre harmonický oscilátor ide pri elementárnom Comptonovom jave o nasledujúcu zmenu celkovej sústavy:

Jeden fotón r_1-ho oscilátora zanikne: $N_{r_1}' = N_{r_1} - 1$;
jeden fotón r_2-ho oscilátora vznikne: $N_{r_2}' = N_{r_2} + 1$
a všetky ostatné $N_s \neq N_{r_1}, N_{r_2}$ sa nemenia: $N_s' = N_s$ (pre $s \neq r_1, r_2$), pričom $\omega_{r_1} > \omega_{r_2}$. Súčasne atomárny elektrón prejde z diskrétneho atomárneho stavu s energiou W_n do stavu so spojitým spektrom energie $W_\varkappa$, čo je spojené s emisiou elektrónov z atómu.

Počiatočný stav sústavy je daný týmito hodnotami amplitúd a:

$$a_{n_1l_1}(0,0, \ldots 0, N_{r_1}, 0) = 1. \tag{4,1}$$

Všetky ostatné pravdepodobnostné amplitúdy $a = 0$.

Pravdepodobnosť, že po uplynutí t sekúnd od okamžiku „zapojenia" poruchy $\widehat{H}^i$ sústava sa bude nachádzať v opísanom stave, t. j., že nastane elementárny Comptonov jav, je daná štvorcom absolútnej hodnoty amplitúdy

$$a_{\varkappa l_2}(0, 0, \ldots \underset{(r_2)}{1}, \ldots N_{r_1} - 1, 0, \ldots). \tag{4,2}$$

Túto pravdepodobnosť vypočítame v *prvom priblížení* podľa Diraca z rovnice (3,5), keď v nej na pravej strane podľa (4,1) za $a_{n_1l_1}(0,0 \ldots N_{r_1} \ldots)$ budeme písať 1 a za všetky ostatné amplitúdy $a = 0$, t. j. hodnoty *nultého priblíženia*. Analogicky treba pokračovať pri vypočítavaní vyšších aproximácií.

Dostaneme tak

$$a_{\varkappa l_2} = U_{n_1l_1, \varkappa l_2}\frac{e^{i\Delta\omega t} - 1}{W_\varkappa - W_{n_1} - \hbar(\omega_{r_1} - \omega_{r_2})}, \tag{4,3}$$

kde

$$\Delta\omega = \frac{1}{\hbar}(W_\varkappa - W_{n_1}) - (\omega_{r_1} - \omega_{r_2}). \tag{4,4}$$

Maticový element poruchovej energie $U_{n_1l_1, \varkappa l_2}(N_1, N_2, \ldots; N_1', N_2', \ldots)$ má podľa Diraca [3][1] tento tvar:

[1] [3] Rovnice (17,8), resp. (17,12). — Opačné znamienko v exponente e-funkcie vy-

$$U_{n_1l_1,\varkappa l_2}(N_1, N_2, \ldots; N_1', N_2', \ldots) =$$
$$= \frac{2\pi e^2}{m}(\vec{e}_1\vec{e}_2)\left(\frac{\hbar N_{r_1}}{V\omega_{r_1}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\hbar(N_{r_2}+1)}{V\omega_{r_2}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \int u^*_{\varkappa l_2}\, e^{i(\vec{k}_{r_2}-\vec{k}_{r_1}).\vec{r}}\, u_{n_1l_1}\, d\tau. \tag{4,5}$$

$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ sú jednotkové vektory vo smere elektrického vektora pôvodnej a rozptýlenej röntgenovej vlny; $N_{r_2} = 1$. Maticový element $U_{n_1l_1,\varkappa l_2}$ pochádza od druhej časti poruchovej energie (3,7), od člena $\frac{e^2}{2mc^2}\hat{\vec{A}}^2$. Prvý člen interakčnej energie $-\frac{e}{mc}(\hat{\vec{A}}\cdot\hat{\vec{p}})$ nedáva, ako vieme, pri výpočte maticového elementu $U_{n_1l_1,\varkappa l_2}$ v prvom priblížení príspevok. Menovateľ $W_\varkappa - W_{n_1} - \hbar(\omega_{r_1} - \omega_{r_2})$ v „rezonancii" vyjadruje zachovanie energie pri Comptonovom jave. V tomto prípade preberá odrazový elektrón celý rozdiel energií fotónov $W_\varkappa - W_{n_1} = \hbar(\omega_{r_1} - \omega_{r_2})$.

§ 5. Úhrnná pravdepodobnosť Comptonovho javu, t. j. počet za čas t z vodíkového atómu v stave W_{n_1} emitovaných odrazových elektrónov, je daná výrazom

$$N = \sum_{l_2}\int d\varkappa |a_{\varkappa l_2}|^2. \tag{5,1}$$

Keď sa zaujímame aj o smerové rozdelenie týchto elektrónov, vyjadríme tento počet s Wentzlom [1][2] v tvare

$$N = \int d\tau \left|\sum_{l_2}\int d\varkappa a_{\varkappa l_2} u_{\varkappa l_2}\right|^2, \tag{5,2}$$

kde za $a_{\varkappa l_2}$ dosadíme podľa rov. (4,3), (4,4) a (4,5) a $u_{\varkappa l_2}$ je charakteristická funkcia spojitého spektra atómu vodíka. V prvom rade pôjde o výpočet výrazu

$$\sum_{l_2} \varepsilon_{n_1l_1,\varkappa l_2}(\vec{\Delta k})\, u_{\varkappa l_2}, \tag{5,3}$$

kde $\vec{\Delta k} = \vec{k}_{r_2} - \vec{k}_{r_1}$ a

$$\varepsilon_{n_1l_1,\varkappa l_2} = \int d\tau\, e^{i(\vec{r}.\vec{\Delta k})} u_{n_1l_1} u^*_{\varkappa l_2}. \tag{5,4}$$

Keď problém napíšeme v polárnych súradniciach a polárnu os položíme do smeru vektora $\vec{\Delta k}$, potom integrand v (5,4) bude závisieť od súradnice ϑ aj exponenciálne, práve prostredníctvom retardačného faktora $e^{i(\vec{r}.\vec{\Delta k})}$. Preto pre kvantové číslo l_2 nedostaneme výberové pravidlo a súčet podľa l_2 bude nekonečný a spravidla ťažko spočítateľný. Túto ťažkosť možno podľa Wentzla [1][3] obísť tak, že sa problém rieši v parabolických súradniciach ξ, η, φ, ktoré definujeme:

$$x = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad y = (\xi\eta)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi, \quad z = (\xi\eta)^{\frac{1}{2}}\sin\varphi,$$
$$r = \frac{1}{2}(\xi + \eta); \quad d\tau = \frac{1}{4}(\xi + \eta)\, d\xi\, d\eta\, d\varphi.$$

Použitie parabolických súradníc má tú výhodu, že stavy elektrónu v spojitom spektre nie sú určené spojitým parametrom energie $\varkappa$ a diskrétnym kvantovým číslom l_2, ale *dvoma spojitými* parametrami $\varkappa$, m.[4] (Magnetické kvantové číslo μ_0 je v obidvoch prípadoch totožné.) Následkom toho nekonečný súčet podľa kvantového čísla l_2 (5,3) prejde v nekonečný integrál podľa spojitého parametra m, ktorý možno jednoduchšie vyčísliť.

§ 6. Obrátime sa teraz k vlastnému výpočtu vlnových funkcií z rôznych elektrónových stavov M-hladiny emitovaných Comptonových elektrónov a z týchto funkcií odvodíme rozdeľovaciu funkciu odrazových elektrónov podľa rôznych smerov emisie z atómu.

Pre náš výpočet použijeme všeobecné vzorce, odvodené jedným z autorov v inej práci. Vlnová funkcia Ψ Comptonovho elektrónu, emitovaného zo stavu n_1, n_2, μ_0 vo veľkej vzdialenosti od atómu, má tvar [2][5] (n_1, n_2, parabolické kvantové čísla diskrétneho stavu; μ_0 magnetické kvantové číslo: $n_1 + n_2 + \mu_0 + 1 = n_0$ hlavné kvantové číslo)

$$\Psi = -\frac{e^{\frac{\pi i}{2}(1-|\mu_0|)} \cdot N_{n_1n_2\mu_0} \cdot \Gamma(1 + |\mu_0| + 2in)\, e^{\pi n} e^{-i\varkappa r}(|\mu_0| + n_1)!\,(|\mu_0| + n_2)!\, \sin|\mu_0|\vartheta \, {}^{\cos}_{\sin}\mu_0\varphi}{8\pi\varkappa_0 r^{1+2in}} \cdot$$
$$\cdot \left\{\frac{\partial}{\partial\varrho}\sum_{\gamma=0}^{n_1}\sum_{\delta=0}^{n_2}\frac{1}{\gamma!\,\delta!}\binom{|\mu_0| + n_1 - \gamma}{|\mu_0|}\binom{|\mu_0| + n_2 - \delta}{|\mu_0|}\right.$$
$$\left.\frac{\partial^{\gamma+\delta}}{\partial t^\gamma \partial s^\delta} \cdot \frac{\left[\left(z_1 + \frac{1}{2}\right)\left(z_2 + \frac{1}{2}\right)\right]^{2in}}{\left[\varkappa(1 + \cos\vartheta)\left(z_1 - \frac{1}{2}\right)\left(z_2 + \frac{1}{2}\right) + \varkappa(1 - \cos\vartheta)\left(z_1 + \frac{1}{2}\right)\left(z_2 - \frac{1}{2}\right)\right]^{1+\mu_0+2in}}\right\}_{\substack{\varrho=\frac{1}{2}\\ t=s=0}} . \tag{6,1}$$

Pritom píšeme $\cos\mu_0\varphi$ pre $\mu_0 \geqq 0$ a $\sin\mu_0\varphi$ pre $\mu_0 < 0$. $N_{n_1n_2\mu_0}$ sú normovacie konštanty počiatočného stavu, $\Gamma(1 + |\mu_0| + 2in)$ je gama funkcia komplexného argumentu.

---

[2] [1], § 7, str. 352.

[3] [1], § 11.

plýva z toho, že kvôli zhode s inou prácou jedného z autorov použili sme Schrödingerovu rovnicu v tvare $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$, t. j. v tvare $-i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$, namiesto $+i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$.

[4] Parameter „m" v ďalších výrazoch nevystupuje spoločne s hmotou elektrónu, ktorú sme označili rovnakým písmenom.

[5] [2], str. 503, rov. (21).

V zmysle zjednodušujúcich predpokladov, vyslovených v § 3, vzorec (6,1) čiastočne zjednodušíme. Číslo n vo vzorci znamená podiel $n = \frac{Z\alpha}{2\varkappa}$, kde $\frac{\hbar^2}{2m}(Z\alpha)^2$ je väzbová energia elektrónu v K-hladine a $\frac{\hbar^2}{2m}\varkappa^2$ je kinetická energia Comptonových elektrónov. Podľa predpokladu je $\frac{Z\alpha}{2\varkappa} = n \ll 1$. Zanedbáme $2in$ popri 1. Ako na analogickom výraze ukázal Wentzel [1][6] možno výrazy $\left[\left(z_1 + \frac{1}{2}\right)\left(z_2 + \frac{1}{2}\right)\right]^{2in}$ v (6,1) pred vykonaním naznačených diferenciácií pre $n \ll 1$ položiť rovné 1. Zlomok vo veľkej zátvorke výrazu (6,1) sa potom zjednoduší na

$$\frac{1}{\left[\varkappa(1+\cos\vartheta)\left(z_1 - \frac{1}{2}\right)\left(z_2 + \frac{1}{2}\right) + \varkappa(1-\cos\vartheta)\left(z_1 + \frac{1}{2}\right)\left(z_2 - \frac{1}{2}\right)\right]^{1+\mu_0}}.$$

Pretože neberieme zreteľ na spin elektrónu, máme v M-hladine vodíkového atómu deväť počiatočných stavov. Budeme mať nasledujúce kombinácie parabolických kvantových čísel n_1, n_2, μ_0 počiatočného stavu, pričom pre M-hladinu bude $n_1 + n_2 + \mu_0 + 1 = n_0 = 3$: 200, 020, 110, 101^+, 101^-, 011^+, 011^-, 002^+, 002^-.

V súlade s tým dostaneme pre Comptonov elektrón deväť vlnových funkcií, ktoré označíme Ψ_{200}, Ψ_{020}, Ψ_{110}, Ψ_{101}, Ψ'_{101}, Ψ_{011}, Ψ'_{011}, Ψ_{002}, Ψ'_{002}. Vo vzorci (6,1) vykonáme naznačené diferenciácie podľa ϱ, t a s, pričom podľa § 2 platí

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{2i\varkappa_0}{\varkappa}\cdot\frac{1}{(1-t)^2}\frac{\partial}{\partial z_1}; \qquad \frac{\partial}{\partial s} = -\frac{2i\varkappa_0}{\varkappa}\frac{1}{(1-s)^2}\frac{\partial}{\partial z_2};$$

$$\frac{\partial}{\partial\varrho} = -\frac{2i\varkappa_0}{\varkappa}\left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}\right). \qquad (6,2)$$

Keď potom za čísla z_1 a z_2 a $N_{n_1 n_2 \mu_0}$ dosadíme podľa § 2 príslušné hodnoty, dostaneme pre funkcie $\Psi_{n_1 n_2 \mu_0}$:

$$\Psi_{200} = -\frac{2i(Z\alpha)^{\frac{5}{2}}\varkappa}{9\pi^{\frac{3}{2}}\left(\varkappa^2 + |\vec{\Delta k}|^2 + \frac{Z^2\alpha^2}{9} + 2\varkappa|\vec{\Delta k}|\cos\vartheta\right)^4}\cdot\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\cdot$$
$$\cdot\left\{\varkappa^4 + |\vec{\Delta k}|^4 + 2\varkappa^2|\vec{\Delta k}|^2 - 2\frac{Z^2\alpha^2}{9}\left(\varkappa^2 + 3|\vec{\Delta k}|^2 - \frac{Z^2\alpha^2}{18}\right) + 4\varkappa|\vec{\Delta k}|\left(\varkappa^2 + |\vec{\Delta k}|^2 - \frac{Z^2\alpha^2}{3}\right)\cos\vartheta + 4\varkappa^2\left(|\vec{\Delta k}|^2 - \frac{Z^2\alpha^2}{9}\right)\cos^2\vartheta - 4i\frac{Z\alpha}{3}\left[|\vec{\Delta k}|\left(\varkappa^2 + |\vec{\Delta k}|^2 - \frac{Z^2\alpha^2}{9}\right) + \varkappa\left(\varkappa^2 + 3|\vec{\Delta k}|^2 - \frac{Z^2\alpha^2}{9}\right)\cos\vartheta + 2\varkappa^2|\vec{\Delta k}|\cos^2\vartheta\right]\right\};$$

[6] [1] — Pozri poznámku pod čiarou na str. 362 citovanej práce.

$$\Psi_{020} = -\frac{2i(Z\alpha)^{\frac{5}{2}}\varkappa}{9\pi^{\frac{3}{2}}\left(\varkappa^2 + |\vec{\Delta k}|^2 + \frac{Z^2\alpha^2}{9} + 2\varkappa|\vec{\Delta k}|\cos\vartheta\right)^4}\cdot\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\cdot$$
$$\cdot\left\{\varkappa^4 + |\vec{\Delta k}|^4 + 2\varkappa^2|\vec{\Delta k}|^2 - 2\frac{Z^2\alpha^2}{9}\left(\varkappa^2 + 3|\vec{\Delta k}|^2 - \frac{Z^2\alpha^2}{18}\right) + 4\varkappa|\vec{\Delta k}|\left(\varkappa^2 + |\vec{\Delta k}|^2 - \frac{Z^2\alpha^2}{3}\right)\cos\vartheta + 4\varkappa^2\left(|\Delta k|^2 - \frac{Z^2\alpha^2}{9}\right)\cos^2\vartheta + 4i\frac{Z\alpha}{3}\left[|\vec{\Delta k}|\left(\varkappa^2 + |\vec{\Delta k}|^2 - \frac{Z^2\alpha^2}{9}\right) + \varkappa\left(\varkappa^2 + 3|\vec{\Delta k}|^2 - \frac{Z^2\alpha^2}{9}\right)\cos\vartheta + 2\varkappa^2|\vec{\Delta k}|\cos^2\vartheta\right]\right\};$$

$$\Psi_{110} = -\frac{2i(Z\alpha)^{\frac{5}{2}}\varkappa}{9\pi^{\frac{3}{2}}\left(\varkappa^2 + |\vec{\Delta k}|^2 + \frac{Z^2\alpha^2}{9} + 2\varkappa|\vec{\Delta k}|\cos\vartheta\right)^4}\cdot\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\cdot$$
$$\cdot\left\{\varkappa^4 + |\vec{\Delta k}|^4 + 2\varkappa^2|\vec{\Delta k}|^2 + 2\frac{Z^2\alpha^2}{9}\left(-3\varkappa^2 + |\vec{\Delta k}|^2 + \frac{Z^2\alpha^2}{18}\right) + 4\varkappa|\vec{\Delta k}|\left(\varkappa^2 + |\vec{\Delta k}|^2 + \frac{Z^2\alpha^2}{9}\right)\cos\vartheta + 4\varkappa^2\left(|\Delta k|^2 + 2\frac{Z^2\alpha^2}{9}\right)\cos^2\vartheta\right\};$$

$$\Psi_{101} = \frac{8(Z\alpha)^{\frac{7}{2}}\varkappa^2}{27\pi^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\sin\vartheta\sin\varphi}{\left(\varkappa^2 + |\vec{\Delta k}|^2 + \frac{Z^2\alpha^2}{9} + 2\varkappa|\vec{\Delta k}|\cos\vartheta\right)^4}\cdot\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\cdot$$
$$\cdot\left\{\varkappa^2 + |\vec{\Delta k}|^2 - \frac{Z^2\alpha^2}{9} + 2\varkappa|\vec{\Delta k}|\cos\vartheta - 2i\frac{Z\alpha}{3}(|\vec{\Delta k}| + \varkappa\cos\vartheta)\right\};$$

$$\Psi'_{101} = \frac{8(Z\alpha)^{\frac{7}{2}}\varkappa^2}{27\pi^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\sin\vartheta\sin\varphi}{\left(\varkappa^2 + |\vec{\Delta k}|^2 + \frac{Z^2\alpha^2}{9} + 2\varkappa|\vec{\Delta k}|\cos\vartheta\right)^4}\cdot\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\cdot$$
$$\cdot\left\{\varkappa^2 + |\vec{\Delta k}|^2 - \frac{Z^2\alpha^2}{9} + 2\varkappa|\vec{\Delta k}|\cos\vartheta - 2i\frac{Z\alpha}{3}(|\vec{\Delta k}| + \varkappa\cos\vartheta)\right\};$$

$$\Psi_{011} = \frac{8(Z\alpha)^{\frac{7}{2}}\varkappa^2}{27\pi^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\sin\vartheta\cos\varphi}{\left(\varkappa^2 + |\vec{\Delta k}|^2 + \frac{Z^2\alpha^2}{9} + 2\varkappa|\vec{\Delta k}|\cos\vartheta\right)^4}\cdot\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\cdot$$
$$\cdot\left\{\varkappa^2 + |\vec{\Delta k}|^2 - \frac{Z^2\alpha^2}{9} + 2\varkappa|\vec{\Delta k}|\cos\vartheta + 2i\frac{Z\alpha}{3}(|\vec{\Delta k}| + \varkappa\cos\vartheta)\right\};$$

$$\Psi'_{011} = \frac{8(Z\alpha)^{\frac{7}{2}}\varkappa^2}{27\pi^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\sin\vartheta\sin\varphi}{\left(\varkappa^2 + |\vec{\Delta k}|^2 + \frac{Z^2\alpha^2}{9} + 2\varkappa|\vec{\Delta k}|\cos\vartheta\right)^4}\cdot\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\cdot$$
$$\cdot\left\{\varkappa^2 + |\vec{\Delta k}|^2 - \frac{Z^2\alpha^2}{9} + 2\varkappa|\vec{\Delta k}|\cos\vartheta + 2i\frac{Z\alpha}{3}(|\vec{\Delta k}| + \varkappa\cos\vartheta)\right\};$$

$$\Psi_{002} = \frac{8i\sqrt{2}(Z\alpha)^{\frac{9}{2}}\varkappa^3}{81\pi^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\sin^2\vartheta\cos 2\varphi}{\left(\varkappa^2 + |\vec{\Delta k}|^2 + \frac{Z^2\alpha^2}{9} + 2\varkappa|\vec{\Delta k}|\cos\vartheta\right)^4} \cdot \frac{e^{-i\varkappa r}}{r};$$

$$\Psi'_{002} = \frac{8i\sqrt{2}(Z\alpha)^{\frac{9}{2}}\varkappa^3}{81\pi^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\sin^2\vartheta\sin 2\varphi}{\left(\varkappa^2 + |\vec{\Delta k}|^2 + \frac{Z^2\alpha^2}{9} + 2\varkappa|\vec{\Delta k}|\cos\vartheta\right)^4} \cdot \frac{e^{-i\varkappa r}}{r}. \quad (6,3)$$

§ 7. Aby sme vypočítali funkciu smerového rozdelenia Comptonových elektrónov z M-hladiny vodíka podobného atómu, vytvoríme súčet súčinov všetkých vlnových funkcií $\Psi_{n_1n_2\mu_0}$ so svojimi komplexne združenými hodnotami

$$J(\vartheta,\varphi) = \Psi_{200}\Psi^*_{200} + \Psi_{020}\Psi_{020} + \Psi_{110}\Psi^*_{110} + \Psi_{101}\Psi^*_{101} + \Psi'_{101}\Psi'^*_{101} + \Psi_{011}\Psi^*_{011} + \Psi'_{011} + \Psi'^*_{011} + \Psi_{002}\Psi^*_{002} + \Psi'_{002}\Psi'^*_{002}. \quad (7,1)$$

$$J(\vartheta,\varphi) = \frac{4\varkappa^2(Z\alpha)^5}{27\pi^3} \cdot \frac{1}{\left(\varkappa^2 + |\vec{\Delta k}|^2 + \frac{Z^2\alpha^2}{9} + 2\varkappa|\vec{\Delta k}|\cos\vartheta\right)^8} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot$$
$$\cdot\Big\{(\varkappa^2 + |\vec{\Delta k}|^2)^4 + \frac{4}{9}Z^2\alpha^2(\varkappa^2 + |\vec{\Delta k}|^2)^3 + \frac{2}{27}Z^4\alpha^4(\varkappa^2 + |\vec{\Delta k}|^2)^2 +$$
$$+ \frac{4}{729}Z^6\alpha^6\left(\varkappa^2 + |\vec{\Delta k}|^2 + \frac{Z^2\alpha^2}{36}\right) + 8\varkappa|\vec{\Delta k}|\Big[(\varkappa^2 + |\vec{\Delta k}|^2)^3 +$$
$$+ \frac{Z^2\alpha^2}{3}(\varkappa^2 + |\vec{\Delta k}|^2)^2 + \frac{Z^4\alpha^4}{243}\left(\varkappa^2 + 9|\vec{\Delta k}|^2 + \frac{Z^2\alpha^2}{3}\right)\Big]\cos\vartheta +$$
$$+ 24\varkappa^2|\vec{\Delta k}|^2\Big[(\varkappa^2 + |\vec{\Delta k}|^2)^2 + \frac{2}{9}Z^2\alpha^2\left(\varkappa^2 + |\vec{\Delta k}|^2 + \frac{Z^2\alpha^2}{18}\right)\Big]\cos^2\vartheta +$$
$$+ 32\varkappa^3|\vec{\Delta k}|\Big[|\vec{\Delta k}|^2(\varkappa^2 + |\vec{\Delta k}|^2) + \frac{Z^2\alpha^2}{27}\left(3|\vec{\Delta k}|^2 + \frac{2}{9}Z^2\alpha^2\right)\Big]\cos^3\vartheta +$$
$$+ 16\varkappa^4|\vec{\Delta k}|^4\cos^4\vartheta\Big\}. \quad (7,2)$$

§ 8. Zjednodušenia, ktoré vyplývajú z predpokladu, vysloveného v § 3:

$$\frac{Z^2\alpha^2}{9} \ll \varkappa^2 \text{ a } \hbar\omega \ll mc^2$$

sme ešte dôsledne nevykonali. Vo výsledku (7,2) vystupujú veličiny $\varkappa^2$ a $\left(\frac{Z\alpha}{3}\right)^2$, resp. ich mocniny vedľa seba. Okrem toho v pomere veličín $|\vec{\Delta k}|^2$ a $\varkappa^2$ a ich mocnín skrývajú sa ešte relativistické členy. Vykonáme preto nasledujúcu úpravu:

Podľa definície je $\hbar\varkappa$ hybnosťou odrazového elektrónu a $\hbar(\omega_{r_1} - \omega_{r_2})$ je jeho energiou $W_\varkappa\left[\text{pričom sme kládli väzbovú energiu } \left(\frac{Z\alpha}{3}\right)^2 \ll \varkappa^2\right]$.

$$\hbar\varkappa = mv \quad (8,1)$$

$$\hbar(\omega_{r_1} - \omega_{r_2}) = \frac{1}{2}mv^2 \quad (8,2)$$

$$\frac{|\vec{\Delta k}|}{\varkappa} = \frac{\frac{\omega_{r_1} - \omega_{r_2}}{c}}{\varkappa} = \frac{\frac{1}{2}\frac{mv^2}{c}}{mv} = \frac{1}{2}\frac{v}{c}. \quad (8,3)$$

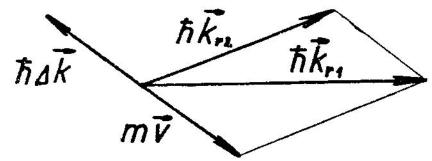
Ďalej

$$\frac{|\vec{\Delta k}|^2}{\varkappa^2} = \frac{\frac{(\omega_{r_1} - \omega_{r_2})^2}{c^2}}{\frac{2mW_\varkappa}{\hbar^2}} = \frac{\hbar^2}{c^2}\frac{(\omega_{r_1} - \omega_{r_2})^2}{2m\hbar(\omega_{r_1} - \omega_{r_2})} = \frac{\hbar(\omega_{r_1} - \omega_{r_2})}{2mc^2} \ll 1. \quad (8,4)$$

Pretože sme nepočítali relativisticky, musíme druhú a vyššie mocniny podielu $\frac{|\vec{\Delta k}|}{\varkappa} = \frac{1}{2}\frac{v}{c}$ popri prvej mocnine, resp. 1 zanedbať. Tým sa zložitý výraz (7,2) veľmi podstatne zjednoduší a hľadaná funkcia smerového rozdelenia Comptonových elektrónov $J(\vartheta, \varphi)$ bude

$$J(\vartheta,\varphi) = \frac{4(Z\alpha)^5}{27\pi^3\varkappa^6} \cdot \frac{1 + 4\frac{v}{c}\cos\vartheta}{\left(1 + \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^8} \cdot \frac{1}{r^2}. \quad (8,5)$$

Vo vzorci (8,5) ϑ je uhol medzi vektorom $\vec{\Delta k} = \vec{k}_{r_2} - \vec{k}_{r_1}$ a polohovým vektorom odrazového elektrónu (v súradnej sústave s počiatkom v strede

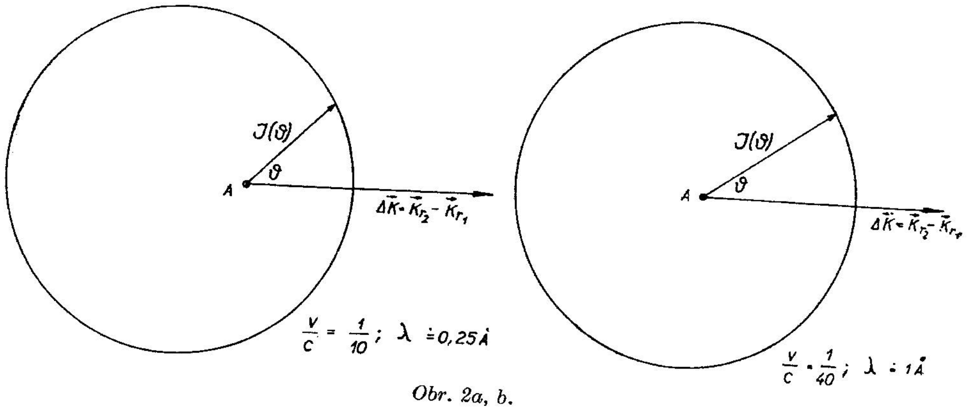


Obr. 1.

atómu), t. j. uhol, ktorý zviera smer letu odrazového elektrónu so smerom vektora $\vec{\Delta k}$. Ako zo vzorca (8,5) vidieť, maximálna emisia Comptonových elektrónov je vo smere $\vartheta = \pi$ a rozdeľovacia funkcia $J(\vartheta, \varphi)$ je osovo symetrická podľa smeru vektora $\vec{\Delta k} = \vec{k}_{r_2} - \vec{k}_{r_1}$. Obr. 1 znázorňuje vektorový diagram hybností primárneho $\hbar\vec{k}_{r_1}$ a rozptýleného $\hbar\vec{k}_{r_2}$ fotónu a hybnosti odrazového elektrónu $m\vec{v}$. Z neho vidíme, že maximálna emisia pripadá do smeru, v ktorom vyletí podľa klasickej teórie voľný elektrón pri Comptonovom jave.

Smerové rozdelenie z M-hladiny emitovaných Comptonových elektrónov sa len málo líši od smerového rozdelenia elektrónov z K- a L-hladiny, čo obzvlášť jasne vynikne, keď vo vzorci (8,5) $\dfrac{1 + 4\frac{v}{c}\cos\vartheta}{\left(1 + \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^8}$ rozvinieme podľa mocnín $\frac{v}{c}$ a relativistické členy, t. j. členy kvadratické a vyššie v rozvoji zanedbáme:

$$J(\vartheta, \varphi)_M \sim \left(1 + 4\frac{v}{c}\cos\vartheta\right)\left(1 - 8\frac{v}{c}\cos\vartheta + \dots\right) = 1 - 4\frac{v}{c}\cos\vartheta + \dots$$



Obr. 2a, b.

Keď si v rovnakom priblížení napíšeme podobné rozdeľovacie funkcie pre Comptonove elektróny emitované z K- a L-hladiny podľa prác G. Wentzla [1] a jedného z autorov [2] a rozvinieme podľa mocnín $\frac{v}{c}$ a relativistické členy zanedbáme, dostaneme tak:

$$J(\vartheta, \varphi)_K \sim \frac{1}{\left(1 + \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^4} = 1 - 4\frac{v}{c}\cos\vartheta + \dots$$

$$J(\vartheta, \varphi)_L \sim \frac{1 + 2\frac{v}{c}\cos\vartheta}{\left(1 + \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^6} = 1 - 4\frac{v}{c}\cos\vartheta + \dots$$

Maximálna emisia vo smere $\vartheta = \pi$ bude tým výraznejšia, čím bude pomer $\frac{v}{c}$ väčší. Obr. 2 znázorňuje polárny diagram závislosti J od ϑ pre dve hodnoty pomeru $\frac{v}{c}$ a ľubovoľnú hladinu.

§ 9. Nakoniec ešte prirovnáme absolútnu hodnotu úhrnnej pravdepodobnosti pre emisiu Comptonovho elektrónu z M-hladiny, t. j. súčet pravdepodobností emisie do všetkých smerov, s absolútnymi hodnotami úhrnných pravdepodobností v K- a L-hladine. Úhrnná pravdepodobnosť Comptonovho javu, t. j. pravdepodobnosť, že za čas t s atómom spriahnuté pole žiarenia prejde zo stavu $N_1, N_2, \dots, N_{r_2}, \dots, N_{r_1}, \dots$ do stavu $N_1, N_2, \dots N_{r_2} + 1, \dots, N_{r_1} - 1, \dots$ a súčasne atóm z počiatočného stavu n_1, l_1 prejde do ktoréhokoľvek stavu so spojitou (kladnou) energiou elektrónu, je podľa § 5 rov. (5,2)

$$N = \int d\tau \left| \sum_{l_2} \int d\varkappa\, a_{\varkappa l_2} u_{\varkappa l_2} \right|^2.$$

Dosadíme tu za $a_{\varkappa l_2}$ podľa (4,3) a (4,5) a dostaneme

$$N = 4\pi^2 \left[\frac{e^2}{m}(\vec{e}_{r_1} \cdot \vec{e}_{r_2})\right]^2 \cdot \frac{2\hbar^2 N_{r_1}}{V^2 \omega_{r_1} \omega_{r_2}} \int d\tau \left| \int d\varkappa \frac{e^{i\Delta\omega t} - 1}{\hbar\Delta\omega} \cdot \sum_{l_2} \underset{n_1 l_1, \varkappa l_2}{\varepsilon}(\Delta\vec{k}) u_{\varkappa l_2} \right|^2, \tag{9,1}$$

kde

$$\Delta\omega = \frac{1}{\hbar}(W_\varkappa - W_{n_1}) - (\omega_{r_1} - \omega_{r_2}), \tag{9,2}$$

$$\underset{n_1 l_1, \varkappa l_2}{\varepsilon}(\Delta\vec{k}) = \int u^*_{\varkappa l_2} e^{i(\Delta\vec{k} \cdot \vec{r})} u_{n_1 l_1}\, d\tau \tag{9,3}$$

a kládli sme $N_{r_1} = 1$.

Výraz $\sum_{l_2} \underset{n_1 l_1, \varkappa l_2}{\varepsilon}(\Delta\vec{k}) u_{\varkappa l_2}$ sme v § 6 vypočítali a našli sme preň vyjadrenie [rov. (6,1)]

$$\frac{e^{-i\varkappa r}}{r} A_\varkappa(\vartheta, \varphi).$$

Faktor pred integrálom v (9,1) označíme

$$C = \frac{8\pi^2 e^4 \hbar^2 (\vec{e}_{r_1} \cdot \vec{e}_{r_2})^2 N_{r_1}}{m^2 V^2 \omega_{r_1} \omega_{r_2}} \tag{9,4}$$

a priestorový element $d\tau$ vyjadríme vo sférických súradniciach

$$d\tau = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Potom bude (9,1)

$$N = C \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi \int_0^\infty d\varkappa \frac{e^{i\Delta\omega t} - 1}{\hbar\Delta\omega} \cdot \frac{e^{-i\varkappa r}}{r} A_\varkappa(\vartheta, \varphi) \,.$$

$$\cdot \int_0^\infty d\varkappa' \frac{e^{-i\Delta\omega' t} - 1}{\hbar\Delta\omega'} \cdot \frac{e^{-i\varkappa' r}}{r} A^*_{\varkappa'}(\vartheta, \varphi). \tag{9,5}$$

Integráciu podľa r a $\varkappa'$ vykonáme podľa Fourierovej teorémy

$$\int_0^\infty \mathrm{d}r \int_0^\infty \mathrm{d}\varkappa' \frac{\mathrm{e}^{-it\Delta\omega'}-1}{\hbar\Delta\omega'} A^*_{\varkappa'}(\vartheta,\varphi)\,\mathrm{e}^{ir(\varkappa'-\varkappa)} = \pi \frac{\mathrm{e}^{-it\Delta\omega}-1}{\hbar\Delta\omega} A^*_{\varkappa}(\vartheta,\varphi). \qquad (9{,}6)$$

Tento výsledok dosadíme do (9,5) a vykonáme integráciu podľa $\varkappa$

$$N = \frac{C\pi}{\hbar^2}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \int_0^\infty \frac{\sin^2\frac{t}{2}\left[\frac{1}{\hbar}(W_\varkappa - W_{n_1}) - (\omega_{r_1}-\omega_{r_2})\right]}{\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\hbar}(W_\varkappa - W_{n_1}) - (\omega_{r_1}-\omega_{r_2})\right]^2} |A_\varkappa(\vartheta,\varphi)|^2\,\mathrm{d}\varkappa. \qquad (9{,}7)$$

Zavedieme substitúciu

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\hbar}(W_\varkappa - W_{n_1}) - (\omega_{r_1}-\omega_{r_2})\right] = \xi; \qquad \mathrm{d}W_\varkappa = 2\hbar\,\mathrm{d}\xi \qquad (9{,}8)$$

a (9,7) upravíme

$$N = \frac{2C\pi^2 t}{\hbar}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \int_{\xi_0}^\infty \left(\frac{\mathrm{d}W_\varkappa}{\mathrm{d}\varkappa}\right)^{-1} |A_\varkappa(\vartheta,\varphi)|^2 \frac{\sin^2\xi t}{\pi\xi^2 t}\,\mathrm{d}\xi. \qquad (9{,}9)$$

Výraz $\frac{\sin^2\xi t}{\pi\xi^2 t}$ má vlastnosť delta funkcie $\delta(\xi)$ pre $t\to\infty$. Integračná hranica $\xi_0 = -\frac{W_{n_1}}{\hbar} - (\omega_{r_1}-\omega_{r_2})$. Integrál podľa ξ bude preto

$$\left(\frac{\mathrm{d}W_\varkappa}{\mathrm{d}\varkappa}\right)^{-1} |A_\varkappa(\vartheta,\varphi)|^2 \qquad (9{,}10)$$

s hodnotou $\varkappa$, vyhovujúcou podmienke

$$\frac{W_\varkappa - W_{n_1}}{\hbar} - (\omega_{r_1}-\omega_{r_2}) = 0.$$

Funkcia $\frac{|A_\varkappa(\vartheta,\varphi)|^2}{r^2}$ je totožná s výrazom (7,2), ktorý vzhľadom na podmienky uvedené v § 3, totiž $\hbar\omega \ll mc^2$ a $\left(\frac{Z\alpha}{3}\right)^2 \ll \varkappa^2$ sa zjednodušil na (8,5). Keď teda za $|A_\varkappa(\vartheta,\varphi)|^2$ dosadíme podľa (8,5), bude pravdepodobnosť elementárneho Comptonovho javu podľa (9,9), (9,10), resp. (9,4) a (3,2)

$$N = \frac{64}{27}\cdot\frac{\pi e^4 (Z\alpha)^5 t}{m\hbar\varkappa^7}\cdot\frac{N_{r_1}(\vec{e}_{r_1}\vec{e}_{r_2})^2}{V^2\omega_{r_1}\omega_{r_2}}\cdot\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{1+4\frac{v}{c}\cos\vartheta}{\left(1+\frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^8}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi. \qquad (9{,}11)$$

Integrál podľa ϑ a φ sa rovná 4π.

Výraz N udáva pravdepodobnosť, že za t sekúnd od počiatku pôsobenia žiarivého poľa na atóm nastane Comptonov jav, pri ktorom fotón rozptýleného

žiarenia má frekvenciu ω_{r_2}. Pripustíme teraz pre rozptýlené žiarenie všetky frekvencie ω a zavedieme zmenu v označení: $\omega_{r_2}\to\omega$ pre rozptýlenú vlnu a $\omega_{r_1}\to\omega_1$ pre primárnu vlnu. Potom bude pravdepodobnosť Comptonovho javu, ktorý primárny fotón o frekvencii ω_1 prevádza do frekvenčného intervalu $\omega, \omega+\mathrm{d}\omega$ úmerná počtu stojatých vĺn vo frekvenčnom intervale $\mathrm{d}\omega$ rozptýleného žiarenia v našom ohraničenom elektromagnetickom poli v objeme V. Tento počet je

$$\frac{V\omega^2}{2\pi^2c^3}\,\mathrm{d}\omega$$

a z neho do priestorového uhla $\mathrm{d}\Omega$ pevného smeru pripadá

$$\frac{V\omega^2}{2\pi^2c^3}\,\mathrm{d}\omega\cdot\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi} = \frac{V\omega^2}{8\pi^3c^3}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\Omega.$$

Pre energiu vyžiarenú za 1 sekundu z atómu do pevného priestorového uhla $\mathrm{d}\Omega$ a frekvenčného intervalu $\mathrm{d}\omega$ máme

$$J_\omega\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\Omega = \frac{N}{t}\cdot\frac{V\omega^2}{8\pi^3c^3}\hbar\omega\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\Omega$$

$$J_\omega\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\Omega = \frac{32}{27\pi}\cdot\frac{e^4(Z\alpha)^5}{c^3m\hbar\varkappa^7}\cdot\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 g\cdot\cos^2\Phi\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\Omega, \qquad (9{,}12)$$

kde $g = \frac{N_{r_1}\cdot\hbar\omega_1}{V}$ je hustota energie primárnej vlny. Faktor $\cos^2\Phi$, kde Φ je rozptylový uhol, pochádza od súčinu $(\vec{e}_{r_1}\cdot\vec{e}_{r_2})^2$, ako plynie z úvahy: Myslime si polarizovanú rozptýlenú vlnu zloženú zo zložky, ktorej elektrický vektor kmitá v rovine elektrického vektora primárnej vlny a vlnovej normály rozptýlenej vlny, a zo zložky kolmej. Druhá (kolmá) zložka dáva v súčine $(\vec{e}_{r_1}\vec{e}_{r_2})^2$ nulový príspevok.

Od výrazu $J_\omega\mathrm{d}\omega\,.\,\mathrm{d}\Omega$ jednoducho závisí absorpčný koeficient absorpcie röntgenového žiarenia, spôsobenej Comptonovým efektom, ako aj intenzita rozptýleného žiarenia, t. j. intenzita Comptonovej spektrálnej čiary. S týmito otázkami hodlajú sa autori zaoberať v inej práci.

Nakoniec prirovnáme ešte úhrnný tok energie $J_\omega\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\Omega$ z M-hladiny s analogickými výrazmi pre K- a L-hladinu. Použili sme výsledky G. Wentzla [1] (§ 15) pre K-hladinu a jedného z autorov [2] (§ 7) pre L-hladinu. Výrazy $(J_\omega)_K$, $(J_\omega)_L$, $(J_\omega)_M$ sú okrem číselných faktorov totožné. Na základe týchto výsledkov našli sme pre pomer hodnôt J_ω v hladinách K, L, a M:

$$(J_\omega)_K : (J_\omega)_L : (J_\omega)_M = 32 : \frac{32}{8} : \frac{32}{27}.$$

LITERATÚRA

1. Wentzel G., Über den Rückstoß beim Comptoneffekt am Wasserstoffatom (Zeitschrift für Physik, 58, 1929). 2. Fischer J., Über die retardierten Matrixelemente in der Theorie der Streuung und Absorption von Röntgenstrahlen (Annalen der Physik, 5. Folge, Bd. 11, 1931). 3. Handbuch der Physik XXIV/1 (1933), str. 740. 4. Blochincev D. I., Základy kvantové mechaniky (Nakl. ČSAV, Praha 1956).

Došlo 14. III. 1956.