O ČASOVOM ROZLOŽENÍ KOINCIDENCIÍ PRI MERANIACH V KOZMICKOM ŽIARENÍ

JURAJ DUBINSKÝ, EUGEN FRAENKEL
Katedra matematiky a fyziky Vyššej pedagogickej školy v Prešove

Metóda koincidencií sa s úspechom používa pri riešení rozličných problémov v odbore kozmického žiarenia. Koincidencie registrujeme počítadlami alebo zapisovacími registračnými aparatúrami, ktoré ich zaznamenávajú na pás tak, ako za sebou nasledujú v rôznych časových intervaloch. V časovom rozložení koincidencií na prvý pohľad nevidíme nijakú pravidelnosť. Ba naopak, môžeme povedať, že sa koincidencie zdajú rozložené celkom nepravidelne, a to v dôsledku štatistického charakteru javu, ktorý zastiera zákonitosť, aj keď ona tam existuje. V tomto prípade má štatistika výnimočné priaznivé podmienky. Na Lomnickom štíte GM počítačom 40×600 mm prejde za minútu okolo 1000 častíc kozmického žiarenia. Pri paralelnom zapojení štyroch počítačov pozorujeme už okolo 4000 pulzov nepravidelne rozložených v časovom intervale 1 minúty. Ak niektorá častica preletí všetkými štyrmi počítačmi, potom koincidenčná aparatúra vyberie z oných 4000 pulzov každý takýto prípad a zaregistruje ho ako koincidenciu. Pri obmedzených technických možnostiach a sťažených podmienkach koincidencie môže sa stať, že jedna takáto koincidencia pripadne priemerne až na hodinový časový interval [1].

Každé meranie vykonané v kozmickom žiarení metódou GM počítačov je štatistického charakteru, takže za publikované výsledky je vo veľkej miere zodpovedná aj štatistická metóda, použitá pri spracovaní výsledkov.

Predpokladajme, že sme koincidenčnou aparatúrou namerali za čas τ_1, koincidencií n_1 a za čas τ_2, koincidencií n_2. Preberme všetky činitele, ktoré môžu mať vplyv na priemerné časy:

$$\bar{t}_1 = \frac{\tau_1}{n_1} \quad \text{a} \quad \bar{t}_2 = \frac{\tau_2}{n_2}$$

na takto namerané priemerné časy vplýva počet a veľkosť účinnej plochy počítačov, rozlišovacia doba koincidenčnej aparatúry a rozlišovacia doba registračnej aparatúry. Pri meraní tou istou aparatúrou ostávajú vo všetkých intervaloch merania spomínané podmienky nezmenené. Priemerné časy sa podstatne menia zmenou podmienok koincidencií, napr. koincidencie počítačov nad sebou a vedľa seba. Frekvencia koincidencií je málo závislá od atmosferických zmien (tlaku, teploty a vlhkosti vzduchu). No a konečne aj keby všetky vymenované podmienky ostali nezmenené počas opakovaných meraní, bude mať $\Delta \bar{t} = \bar{t}_1 - \bar{t}_2$ aj pre $\tau_1 = \tau_2$ hodnotu rozličnú od 0 pre štatistickú povahu veci. V takýchto prípadoch pri spracovaní výsledkov postupujeme ďalej tak, že bez ohľadu na časovú dĺžku jednotlivých meraní τ_k a bez toho, aby sme sa pýtali na časové rozloženie javov v τ_k, považujeme všetky merania za rovnocenné. Najviac ak pri malej frekvencii koincidencií skúmame, či $n_1, n_2 \ldots$ odčítané z registračného prístroja v časoch $\tau_1 = \tau_2 = \ldots$ prejavujú normálnu fluktuáciu, vtedy totiž majú $n_1, n_2 \ldots$ fluktuovať podľa Poissonovho rozloženia.

Pokiaľ je priemerný čas $\bar{t}$ medzi dvoma za sebou nasledujúcimi koincidenciami dostatočne veľký v porovnaní s rozlišovacou dobou koincidenčnej a registračnej aparatúry, je zrejmé, že na časové rozloženie koincidencií nemôže mať vplyv ani počet počítačov a veľkosť ich účinnej plochy, ani koincidenčná a registračná aparatúra. K všeobecnosti prispeje, ak sa koincidencie vezmú z rôzne dlhých časových intervalov pripadajúcich na rôzne denné doby a za rôznych meteorologických podmienok.

V ďalšom sa z tohto hľadiska analyzuje meranie vplyvu zemského magnetického poľa na rozsiahle spŕšky. Toto meranie robil dr. Chalupka z fyzikálneho ústavu ČSAV v letných mesiacoch roku 1954. Aparatúra použitá pri meraní bola zhotovená inž. Brojom v dielňach Fyz. ústavu ČSAV a registrovala štvornásobné koincidencie [2], [3].

Vybrali sme 14 nerovnako dlhých časových intervalov, v ktorých bolo zaregistrované celkom 1937 koincidencií. Najmenší časový interval medzi dvoma za sebou nasledujúcimi zaregistrovanými koincidenciami je 3″, najväčší 11 min. 30″. Počet dlhých intervalov je malý, dlhších intervalov ako 5 min. je iba 3,8 % a dlhších ako 10 min. iba 0,15 %. Z tohto výsledku poznávame, že dĺžka časových intervalov medzi dvoma za sebou nasledujúcimi koincidenciami nie je rovnomerne zastúpená. Väčšia časť časových intervalov, a to 54,3 %, je kratšia ako 1 min., 23,4 % má časový interval medzi jednou a dvoma minútami.

Časové úseky skutočného merania sme rozdelili na polminúty a pre rôzne dlhé časové intervaly rastúce po polminúte našli sme počet n_i a pravdepodobnosti $p_i = \frac{n_i}{N}$ koincidencií; n_i je počet koincidencií príslušných rôznym časovým intervalom medzi dvoma koincidenciami a N je počet všetkých zaregistrovaných koincidencií.

Našli sme:

Tabuľka 1

Počty a pravdepodobnosti časových intervalov

Čas t_1	Počet n_i	Pravdepodob. $P_i = \frac{n_i}{N}$	Čas t_1	Počet n_i	Pravdepodob. $P_i = \frac{n_i}{N}$
0″—29″	612	0,3160	360″—389″	6	0,0031
30″—59″	441	0,2276	390″—419″	13	0,0067
60″—89″	285	0,1471	420″—449″	7	0,0036
90″—119″	169	0,0872	450″—479″	6	0,0031
120″—149″	121	0,0625	480″—509″	2	0,0010
150″—179″	84	0,0434	510″—539″	2	0,0010
180″—209″	63	0,0325	540″—569″	—	—
210″—239″	39	0,0201	570″—599″	1	0,0005
240″—269″	31	0,0160	600″—629″	1	0,0005
270″—299″	17	0,0088	630″—659″	—	—
300″—329″	19	0,0098	660″—689″	1	0,0005
330″—359″	16	0,0082	690″—919″	1	0,0005

Spolu $N = 1937$ $P = 0{,}9997$

Z tab. 1 dostávame:

1. priemer $\bar{t} = \frac{\Sigma n_i t_i}{N} = 1$ min 23″,

2. smerodajná odchýlka $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma n_i (t - \bar{t})^2}{N}} = 1$ min 30″.

Podľa toho je priemer = 1 min. 23″ ± 1 min. 30″.

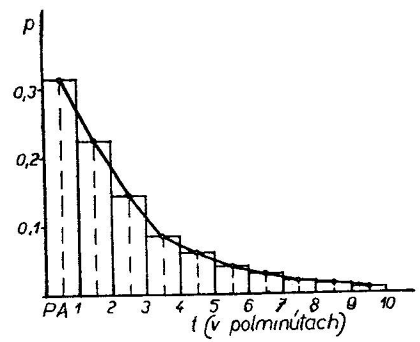
Zvoľme za časovú jednotku pol minúty a pravdepodobnosti znázornime polygónom:

Nájdime spojitú krivku, ktorá sa všeobecne vyskytuje pri vyšetrovaní štatistických súborov a ktorá by čo najlepšie vyjadrovala priebeh pravdepodobnosti zvolených časových intervalov. Ukážeme, že naše pravdepodobnosti dobre vyhovujú vzorcu:

$$p = Ce^{-\lambda t} \text{ (kde } C \text{ a } \lambda \text{ sú konštanty)} \quad (1)$$

Pozri tab. 3, v ktorej sú hodnoty vyrátané pomocou tohto vzorca, porovnané s hodnotami rozoberaného prípadu. Logaritmujme rovnicu (1), aby sme určili konštanty C a λ.

$$\log p = \log C - \lambda t \log e. \quad (2)$$



Obr. 1.

Dostali sme lineárnu rovnicu pre t a sme pred úlohou nájsť priamku, ktorá by najlepšie vyjadrovala priebeh logaritmov našich pravdepodobností. To značí, že máme nájsť trendovú priamku týchto logaritmov. Je to priamka, ktorej rovnica nielen vyrovnáva rozdiely (súčet kladných a záporných odchýlok má byť nula), ale aj súčet štvorcov rozdielov je najmenší. Vyrátame ju sčítacím spôsobom, pri ktorom postupujeme takto:

Údaje (logaritmy pravdepodobnosti) podpíšeme pod seba tak, že budú tvoriť prvý stĺpec čísel. Ďalšie stĺpce čísel dostaneme tak, že prvé číslo necháme rovnaké, ako je v prvom stĺpci, a ďalšie členy dostaneme postupným sčítaním. Preto druhé číslo druhého stĺpca dostaneme sčítaním prvého a druhého čísla prvého stĺpca, tretie číslo druhého stĺpca dostaneme sčítaním prvého, druhého a tretieho čísla prvého stĺpca atď. Podobne druhé číslo tretieho stĺpca dostaneme sčítaním prvého a druhé čísla druhého stĺpca atď. Každý stĺpec je o jeden člen kratší [4]. Dostali sme tzv. binomické momenty $M_0, M_1, M_2, \ldots$ (pre trendovú priamku stačia M_0, M_1) pre parabolu druhého stupňa M_0, M_1, M_2 atď.

Ďalej tieto momenty postupne delíme číslami $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots$, (kde n je počet členov prvého stĺpca). Z toho sme dostali priemerné momenty $m_0, m_1, \ldots$ — a rovnica trendovej priamky bude daná:

$$y = m_0 - 3m_{01} + 6m_{01}\frac{x+1}{n+1}\,(m_{01} = m_0 - m_1). \tag{3}$$

Postup jasne vynikne z tab. 2, v ktorej je vyrátaná trendová priamka z prvých desiatich členov tab. 1. Tabuľka zahŕňa 96,2 % všetkých údajov. Časovou jednotkou je polminúta, a aby sme sa vyhli negatívnym logaritmom, vezmeme čísla log. $p + 3$.

Tabuľka 2

Výpočet trendovej priamky

log. 0,3160 + 3 = 2,49969	2,49969	2,49969
log. 0,2276 + 3 = 2,35717	4,85686	7,35655
log. 0,1471 + 3 = 2,16761	7,02447	14,38102
log. 0,0872 + 3 = 1,94052	8,96499	23,34601
log. 0,0625 + 3 = 1,79588	10,76087	34,10688
log. 0,0434 + 3 = 1,63749	12,39836	46,50524
log. 0,0325 + 3 = 1,51188	13,91024	60,41548
log. 0,0201 + 3 = 1,30320	15,21344	75,62892
log. 0,0160 + 3 = 1,20412	16,41756	92,04648
log. 0,0088 + 3 = 0,94448	17,36204	
	M_0	M_1

$$m_0 = M_0 : \binom{10}{1} = 17{,}36204 : 10 = 1{,}73620$$

$$m_1 = M_1 : \binom{10}{2} = 92{,}04648 : 45 = 2{,}04547$$

$$m_{01} = m_0 - m_1 = -0{,}30927.$$

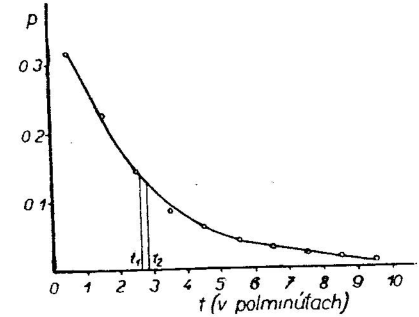
Preto rovnica trendovej priamky (3) je daná:

$$J = m_0 - 3m_{01} + 6m_{01}\frac{x+1}{n+1} = 2{,}49532 - 0{,}16869\,x \tag{4}$$

x rátame od bodu A a t od bodu P (viď obr. 1), takže

$$x = t - \frac{1}{2} \text{ a dostávame:}$$

$$\log p + 3 = 2{,}49532 - 0{,}16869\left(t - \frac{1}{2}\right) \tag{5}$$



Obr. 2.

ináč

$$p = 10^{-0{,}42034 - 0{,}16869\,t}, \tag{6}$$

pretože však $10 = e^{2{,}3026}$, dostávame:

$$p = 0{,}3799 \,.\, e^{-0{,}3884\,t} \tag{7}$$

t je v polminútach.

Pravdepodobnosť pre časový interval medzi t_1 a t_2 je daná

$$p = \int_{t_1}^{t_2} Ce^{-\lambda t}\,dt,\ C = 0{,}3799,\ \lambda = 0{,}388. \tag{8}$$

Pre interval od 0 do t je pravdepodobnosť:

$$p = \int_0^t Ce^{-\lambda t}\,dt. \tag{9}$$

Pravdepodobnosť všetkých prípadov sa rovná 1.

$$\int_0^\infty Ce^{-\lambda t}\,dt = \left[\frac{Ce - \lambda t}{-\lambda}\right]_0^\infty = \frac{C}{\lambda} = 1. \tag{10}$$

My máme:

$$\frac{C}{\lambda} = \frac{0{,}3799}{0{,}3884} = 0{,}978. \tag{11}$$

Pravdepodobnosti pre časové intervaly rastúce po polminúte sú:

$$p_0 = \int_0^1 Ce^{-\lambda t}\,dt = \frac{C}{\lambda}(1 - e^{-\lambda}) \tag{12}$$

$$p_1 = \int_1^2 Ce^{-\lambda t}\,dt = \frac{C}{\lambda}(e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}) = pe^{-\lambda} \tag{13}$$

$$p_2 = \int_2^3 Ce^{-\lambda t}\,dt = \frac{C}{\lambda}(e^{-2\lambda} - e^{3\lambda}) = p_1e^{-\lambda} \text{ atd.} \tag{14}$$

V našom prípade máme:

$$\frac{C}{\lambda} = 0{,}978; \; e^{-\lambda} = e^{-0{,}3884} = 10^{-0{,}16869} = 0{,}6781 \tag{15}$$

Preto môžeme porovnať pravdepodobnosti vyrátané podľa vzorcov (12), (13), (14) s pravdepodobnosťami vyrátanými zo skutočných zaregistrovaných údajov (tab. 3).

Tabuľka 3

Porovnanie pravdepodobností			
Polminúty	Pravdepodob. podľa vzorca	Pravdepodob. z údajov	Rozdiely
0—1	0,3148	0,3160	—0,0012
1—2	0,2135	0,2276	—0,0141
2—3	0,1448	0,1471	—0,0023
3—4	0,0981	0,0872	+0,0109
4—5	0,0665	0,0625	+0,0040
5—6	0,0451	0,0434	+0,0017
6—7	0,0306	0,0325	—0,0019
7—8	0,0207	0,0201	+0,0006
8—9	0,0140	0,0160	—0,0020
9—10	0,0095	0,0088	+0,0007
0—10	0,9576	0,9612	—0,0215 +0,0179

—0,0036

Vidíme, že odchýlky nepresahujú obvyklé odchýlky v matematickej štatistike.

Podľa Poissonovho zákona pravdepodobnosť toho, že za čas od 0 do t nevznikne ani jedna koincidencia je daná [5]

$$p_0 = \bar{e}^{\frac{t}{\bar{t}}}, \tag{16}$$

kde $\bar{t}$ je priemerný časový interval koincidencií.

Označme $p_0 = p_0(t)$ funkciu času vyjadrujúcu pravdepodobnosť toho, že za čas od 0 do t nevznikne ani jedna koincidencia. Nech táto funkcia je spojitá a má derivácie v intervale $(0, \infty)$. Ak medzi dvoma za sebou nasledujúcimi koincidenciami má byť časový interval práve rovný t, tak v čase $(0, t)$ nemá nastať a v čase $(t, t + \mathrm{d}t)$ má vzniknúť koincidencia. Pravdepodobnosť toho dostaneme podľa vety o násobení pravdepodobností. Pravdepodobnosť, že za čas od 0 do t nevznikne koincidencia je $p_0 = \bar{e}^{\frac{t}{\bar{t}}}$ a pravdepodobnosť, že za čas $\mathrm{d}t$ nastane práve jedna koincidencia je $p = \frac{\mathrm{d}t}{\bar{t}}$, takže

$$\mathrm{d}p = p_0 p = e^{-\frac{t}{\bar{t}}} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\bar{t}} \tag{17}$$

označme

$$\lambda = \frac{1}{\bar{t}},$$

bude preto

$$\mathrm{d}p = \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t. \tag{18}$$

Výsledok sa zhoduje so vzorcami (8) a (10), ktoré môžeme napísať v tvare:

$$\mathrm{d}p = Ce^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t; \tag{19}$$

v našom prípade sme mali $\bar{t} = 1$ min. 23″ = 2,76 polminúty, takže

$$\lambda = \frac{1}{\bar{t}} = \frac{1}{2{,}76} = 0{,}362, \tag{20}$$

čo sa dosť dobre zhoduje s λ-ou, ktorú sme dostali zo skutočných údajov v rovnici (8).

$$\lambda \doteq C \doteq 0{,}38.$$

Ukázali sme takto, že časové intervaly medzi dvoma za sebou nasledujúcimi koincidenciami sa v časovom slede riadia podľa Poissonovho rozloženia.

Je nám milou povinnosťou poďakovať prof. dr. V. Petržilkovi, členovi korešpondentovi ČSAV, ako aj vedeckému pracovníkovi ČSAV dr. P. Chalupkovi za požičaný experimentálny materiál a za pripomienky sledujúce upresnenie niektorých častí práce.

LITERATÚRA

1. Dubinský J., Chalupka P., Petržilka V., Tomášková L., Čs. Čas. Fys. 5 (1955) 295. 2. Chalupka P., Čs Čas. Fys. 4 (1954), 612. 3. Chalupka P., Mat.-Fyz. Čas. 4 (1955). 4. Fraenkel E., Statistický obzor 4 (1948) 391—444. 5. Glivenko V. I., Theorie pravděpodobnosti (132).

Došlo 30. XII. 1955.