MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, VI, 3 — 1956

O JEDNÉ KINEMATICKÉ VLASTNOSTI PROSTOROVÝCH KŘIVEK

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

V prostoru buďte dány dva různé body A, B a dvě různé přímky a, b; přímka a incidentní s bodem A a přímka b incidentní s bodem B. Nechť útvar tvořený body A, B a přímkami a, b je při pohybu v prvním stupni volnosti neproměnný. Jsou nalezeny nutné a postačující podmínky, aby existovaly trajektorie (A) a (B) bodů A a B takové, že přímka a je tečnou trajektorie (A) v bodě A a přímka b tečnou trajektorie (B) v bodě B.

Buďte x, y, z pravoúhlé kartézské souřadnice v prostoru a

$$x = x(s), \qquad y = y(s), \qquad z = z(s) \tag{1}$$

reálné funkce reálného argumentu s definované pro všecka $s \in I = (a, b)$, které mají spojité derivace až do 3. řádu v intervalu I a pro které platí $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$, $x''^2 + y''^2 + z''^2 \neq 0$ pro všecka $s \in I$ (čárky v tomto úvodu značí derivaci podle s). Rovnice (1), které budeme psát zkráceně

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s), \tag{*}$$

jsou pak rovnicemi křivky bez singulárních a inflexních bodů; parametr s je její oblouk. Pro každý bod křivky (*) jsou definovány jednotkové vektory tečny, hlavní normály a binormály relacemi $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{r}'$, $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{t}'}{\sqrt{\boldsymbol{t}' . \boldsymbol{t}'}}$, $[\boldsymbol{tnb}] = 1$; odmocninu bereme vždy kladně. V celém intervalu I jsou dále definovány flexe $k_1(s) = \sqrt{\boldsymbol{r}'' . \boldsymbol{r}''} > 0$ a torse $k_2(s) = \dfrac{1}{k_1^2(s)} [\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}''']$ křivky (*) a platí známé Frenetovy vzorce.

Jsou-li naopak dány dvě funkce $k_1 = k_1(s) > 0$ a $k_2 = k_2(s)$ argumentu s spojité v intervalu I, existuje (až na polohu v prostoru) právě jedna křivka, která má s za oblouk a tyto funkce za flexi, resp. torsi.[1] Je-li mezi funkcemi $k_1 = k_1(s)$ a $k_2 = k_2(s)$ nějaký *speciální* vztah — a jen v tomto případě, jsou $k_1 = k_1(s)$ a $k_2 = k_2(s)$ přirozenými rovnicemi nějaké *zvláštní* křivky. Nejjednodušší případ je patrně ten, kdy

$$c_1 k_1 + c_2 k_2 + c = 0, \tag{2}$$

kde c_1, c_2, c jsou konstanty nikoliv všecky nulové. Při $c = 0$ a $c_1 c_2 \neq 0$ jsou rovnicí (2) charakterisovány spádové křivky.[2] Jestliže $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$, určuje rovnice (2) křivky

[1] Viz [4], str. 61—65.

[2] Viz [2], str. 180 nebo [4], str. 56.

konstantní torse, které (při $k_2 \neq 0$) byly z Darbouxova podnětu podrobně studovány. V případě, kdy $c_1 c \neq 0$, charakterisuje rovnice (2) t. zv. křivky Bertrandovy. Objevil je roku 1850 J. Bertrand, když řešil úlohu, kterou r. 1844 položil A. Barré de Saint-Venant: Existují na ploše hlavních normál křivky ještě jiné křivky, které mají přímky této plochy opět za hlavní normály? Bertrandovy křivky byly mnoha matematiky podrobně studovány (Bianchi, Darboux, Mannheim, Picard, Serret a j.) a jejich elementární vlastnosti jsou dobře známy. Konečné rovnice Bertrandových křivek nalezl Darboux[3] (po něm i G. Scheffers[4]) a jiným způsobem L. Bianchi,[5] který vyšel od křivek konstantní nenulové flexe. Tyto speciální Bertrandovy křivky studoval již roku 1784 G. Monge. Jejich vytvoření z kružnice je známé.[6] Ze spádových křivek jsou Bertrandovými křivkami jedině kružnice a šroubovice na rotační válcové ploše s přirozenými rovnicemi $k_1 = \text{konst} \neq 0$, $k_2 = \text{konst} \neq 0$.[7]

Kvadratická relace mezi flexí a torsí je tvaru

$$Ak_1^2 + Bk_1k_2 + Ck_2^2 + Dk_1 + Ek_2 + F = 0, \tag{3}$$

kde $A, B, C, D, E, F = \text{konst}$. Křivky, pro které platí rovnice (3) s $E = F = 0$, vyšetřoval a charakterisoval jistou kinematickou vlastností první A. Demoulin; jejich speciálním případem jsou i Bertrandovy křivky. E. Cesàro v [2] došel mimo jiné k tomuto výsledku: Je-li p přímka pevně spojená s Frenetovým trojhranem křivky a nerovnoběžná s žádnou jeho stěnou, pak při pohybu trojhranu podél křivky přímka p vytvoří rozvinutelnou plochu tehdy a jen tehdy, když pro křivku platí (3) s $F = 0$, $DE \neq 0$. Nehledě k těmto a několika triviálním případům zůstává otevřená otázka, jak geometricky charakterisovat křivky, pro které platí rovnice (3), zvláště při $F \neq 0$.

Originální zobecnění Bertrandových křivek podal roku 1938 N. G. Tuganov v práci [8]. Ke křivce Γ na ploše π, jejíž normální křivost a geodetická torse jsou vázány lineární rovnicí s konstantními koeficienty, existuje křivka Γ' na ploše π' a mezi jejich body jedno-jednoznačná korespondence taková, že normály ploch π a π' v korespondujících bodech splývají a spolu s tečnami křivek Γ a Γ' a jejich normálami v tečných rovinách tvoří útvar neproměnného tvaru. Platí též opak. N. G. Tuganov udal řadu velmi zajímavých vlastností těchto křivek a o tři roky později je dále zobecnil v práci [9].

Z podnětu akademika Čecha vyšetřil autor v tomto článku křivky, které v jistém smyslu jsou rovněž zobecněním Bertrandových křivek a současně jednoparametrickou analogií k plochám, jež autor studoval v práci [6]. Též jsou prostorovým zobecněním rovinných paralelních křivek. Stejná úloha (viz sunto) v prostoru E_n, $n > 3$, má — jak se snadno zjistí — vždy řešení.

1. Kromě výše zavedené křivky (*) budeme uvažovat ještě jinou křivku o rovnicích $x = {}'x('s)$, $y = {}'y('s)$, $z = {}'z('s)$ čili

$$'\boldsymbol{r} = {}'\boldsymbol{r}('s); \tag{**}$$

$'x('s)$, $'y('s)$, $'z('s)$ jsou reálné funkce reálného argumentu, o nichž budeme předpokládat, že mají spojité derivace podle $'s$ v intervalu $'I = ('a, 'b)$, při čemž $\left(\frac{\mathrm{d}'x}{\mathrm{d}'s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}'y}{\mathrm{d}'s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}'z}{\mathrm{d}'s}\right)^2 = 1$. Parametr $'s$ je pak obloukem křivky

[3] Viz [3], str. 62, 63.
[4] Viz [7], str. 440—443.
[5] Viz [1], str. 32—34.
[6] Viz [5], str. 116.
[7] Viz [2], str. 181.

(**) a v každém jejím bodě existuje jednotkový tečný vektor $'\boldsymbol{t} = \frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}'s}$.

Budeme řešit tuto úlohu:

Jaké jsou nutné a postačující podmínky, aby existovalo prosté zobrazení f intervalu I na $'I$ takové, že spojnice korespondujících si bodů křivek (*) a (**) o parametrech $s \in I$ a $'s = f(s) \in {}'I$ a tečny v nich tvoří útvar neproměnného tvaru?

Analyticky formulujeme úlohu relacemi

$$\sqrt{('\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}) \cdot ('\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r})} = v = \text{konst.} > 0, \tag{1,1}$$
$$\boldsymbol{t} \cdot ('\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}) = v \cos \alpha = \text{konst.}, \tag{1,2}$$
$$'\boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{r} - {}'\boldsymbol{r}) = v \cos {}'\alpha = \text{konst.}, \tag{1,2'}$$
$$\boldsymbol{t} \cdot {}'\boldsymbol{t} = \cos \beta = \text{konst.}, \tag{1,3}$$

kde $s \in I$ a $'s = f(s) \in {}'I$ a o úhlech α, $'\alpha$, β lze předpokládat

$$0 \leqq \alpha, {}'\alpha, \beta < \pi. \tag{1,4}$$

Ukážeme totiž později, že obě tečny v korespondujících bodech nikdy nemohou splynout s jejich spojnicí.

Křivky (*) a (**), které jsou řešením této úlohy, budeme nazývat dvojicí sdružených křivek, křivku (*) první a (**) druhou.

Při každém prostém zobrazení f intervalu I na interval $'I$ platí pro průvodiče odpovídajících si bodů křivek (*) a (**) o parametrech $s \in I$ a $'s = f(s) \in {}'I$

$$'\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} + \varrho \boldsymbol{t} + \lambda \boldsymbol{n} + \mu \boldsymbol{b}, \tag{1,5}$$

kde $\varrho = \varrho(s)$, $\lambda = \lambda(s)$, $\mu = \mu(s)$ jsou funkce argumentu s, které v intervalu I mají spojité derivace podle s.

2. Relace (1,1) platí tehdy a jen tehdy, když

$$\varrho^2 + \lambda^2 + \mu^2 = v^2. \tag{2,1}$$

Vztah (1,2) je splněn tehdy a jen tehdy, když

$$\varrho = v \cos \alpha. \tag{2,2}$$

Z (2,1) a (2,2) plyne

$$\lambda^2 + \mu^2 = v^2 \sin^2 \alpha. \tag{2,3}$$

Podle (1,5), (2,2) a Frenetových vzorců je

$$\frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = {}'\boldsymbol{t} \cdot \frac{\mathrm{d}'s}{\mathrm{d}s} = (1 - \lambda k_1)\,\boldsymbol{t} + \left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s} + \varrho k_1 - \mu k_2\right)\boldsymbol{n} + \left(\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}s} + \lambda k_2\right)\boldsymbol{b}. \tag{2,4}$$

Poněvadž sdružená křivka je bez singularit, musí

$$\frac{\mathrm{d}'s}{\mathrm{d}s} = \varepsilon \sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s} + \varrho k_1 - \mu k_2\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}s} + \lambda k_2\right)^2} \neq 0;\ \varepsilon = \pm 1. \tag{2,5}$$

Podle (2,4) a (2,5) je tedy

$$'\boldsymbol{t} = \varepsilon \frac{(1 - \lambda k_1)\boldsymbol{t} + \left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s} + \varrho k_1 - \mu k_2\right)\boldsymbol{n} + \left(\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}s} + \lambda k_2\right)\boldsymbol{b}}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s} + \varrho k_1 - \mu k_2\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}s} + \lambda k_2\right)^2}}. \tag{2,6}$$

Podmínka (1,2') je podle (2,6), (1,5), (2,3), (2,2) a (1,1) splněna tehdy a jen tehdy, když

$$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2 + \left(\frac{d\lambda}{ds} + \varrho k_1 - \mu k_2\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{ds} + \lambda k_2\right)^2}} = -\varepsilon \cos{}'\alpha. \quad (2,7)$$

Kdyby $\alpha = {}'\alpha = 0$, bylo by podle (2,2) a (2,3) předně $\varrho = v$, $\lambda = \mu = 0$, a podle (2,7) a (1,1) pak $k_1 = 0$, což vylučujeme. Není tedy možné, aby tečny v korespondujících si bodech dvou sdružených křivek splývaly s jejich spojnicí, jak bylo již v odst. 1 vytknuto.

Je-li $\alpha = \frac{\pi}{2}$, je podle (2,7) též ${}'\alpha = \frac{\pi}{2}$ a naopak. Dvojici sdružených křivek, v níž žádná z tečen v korespondujících si bodech není kolmá na jejich spojnici, nazveme 1. typu. Dvojici sdružených křivek, pro něž spojnice odpovídajících si bodů je kolmá na obě jejich tečny v těchto bodech, nazveme 2. typu. Kromě těchto dvojic 1. nebo 2. typu žádné jiné neexistují.

V odst. 3—6 budeme vyšetřovat 1. typ a v odst. 7—9 typ 2.

3. Nechť tedy

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} \neq {}'\alpha. \quad (3,1)$$

Z (2,7) a (2,5) pak plyne $\varepsilon = \operatorname{sgn}\left(-\frac{\cos\alpha}{\cos{}'\alpha}\right)$ a

$$\frac{d's}{ds} = -\frac{\cos\alpha}{\cos{}'\alpha}, \quad (3,2)$$

takže zobrazení f je dáno rovnicí

$$s\cos\alpha + {}'s\cos{}'\alpha = \text{konst.}$$

Nutná a postačující podmínka pro platnost vztahu (1,3) je podle (2,6) a (2,7)

$$\lambda k_1 = 1 + \frac{\cos\alpha}{\cos{}'\alpha}\cos\beta. \quad (3,3)$$

Z (2,7) a (3,3) pak plyne

$$\left(\frac{d\lambda}{ds} + \varrho k_1 - \mu k_2\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{ds} + \lambda k_2\right)^2 = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2{}'\alpha}\sin^2\beta. \quad (3,4)$$

V odst. 3—5 budeme stále předpokládat

$$\beta > 0; \quad (3,5)$$

jednoduchý případ $\beta = 0$ vyšetříme v odst. **6**. **Platí-li naopak (3,4), je podle** (3,5), (1,4) a (3,1) nerovnost (2,5) splněna.

V dalším rozlišíme ještě případy, kdy

$$1 + \frac{\cos\alpha}{\cos{}'\alpha}\cos\beta \neq 0 \quad (3,6)$$

nebo

$$1 + \frac{\cos\alpha}{\cos{}'\alpha}\cos\beta = 0. \quad (3,7)$$

4. Jako první budeme diskutovat případ (3,6). Z (3,3) a (2,3) dostáváme

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{k_1}\left(1 + \frac{\cos\alpha}{\cos{}'\alpha}\cos\beta\right), \\ \mu &= \pm\frac{1}{k_1}\sqrt{v^2k_1^2\sin^2\alpha - \left(1 + \frac{\cos\alpha}{\cos{}'\alpha}\cos\beta\right)^2}, \end{aligned}\right\} \quad (4,1)$$

kde buďto

$$k_1 = \frac{1}{v\sin\alpha}\left|1 + \frac{\cos\alpha}{\cos{}'\alpha}\cos\beta\right| \quad (4,2_1)$$

anebo

$$k_1 > \frac{1}{v\sin\alpha}\left|1 + \frac{\cos\alpha}{\cos{}'\alpha}\cos\beta\right| \quad (4,2_2)$$

pro všecky hodnoty argumentu $s \in I$.

V prvním případě je podle (4,1)

$$\lambda = \tau v\sin\alpha, \quad \mu = 0; \quad \tau = \operatorname{sgn}\left(1 + \frac{\cos\alpha}{\cos{}'\alpha}\cos\beta\right); \quad (4,3)$$

a z (3,4), (4,3) a $(4,2_1)$ plyne

$$k_2^2 = \frac{\operatorname{cotg}^2\alpha}{v^2}\left\{\frac{\sin^2\beta}{\cos^2{}'\alpha} - \frac{\left(1 + \frac{\cos\alpha}{\cos{}'\alpha}\cos\beta\right)^2}{\sin^2\alpha}\right\}, \quad (4,4)$$

takže nutně

$$\sin\alpha\sin\beta \geqq |\cos{}'\alpha + \cos\alpha\cos\beta|. \quad (4,5)$$

Geometrický význam těchto vztahů je průhledný.

V druhém případě, kdy platí $(4,2_2)$, dostaneme eliminací λ a μ z (2,7) a (4,1)

$$\Bigg\{\Bigg[\left(1 + \frac{\cos\alpha}{\cos{}'\alpha}\cos\beta\right)\frac{d\frac{1}{k_1}}{ds} + vk_1\cos\alpha \mp$$

$$\mp\frac{k_2}{k_1}\sqrt{v^2k_1^2\sin^2\alpha - \left(1 + \frac{\cos\alpha}{\cos{}'\alpha}\cos\beta\right)^2}\Bigg]^2 +$$

$$+\Bigg[\mp\frac{\left(1 + \frac{\cos\alpha}{\cos{}'\alpha}\cos\beta\right)^2}{\sqrt{v^2k_1^2\sin^2\alpha - \left(1 + \frac{\cos\alpha}{\cos{}'\alpha}\cos\beta\right)^2}}\frac{d\frac{1}{k_1}}{ds} + \left(1 + \frac{\cos\alpha}{\cos{}'\alpha}\cos\beta\right)\frac{k_2}{k_1}\Bigg]^2\Bigg\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= -\varepsilon\frac{\cos\alpha}{\cos{}'\alpha}\sin\beta. \quad (4,6)$$

Máme tak tento první výsledek:

Nutná a postačující podmínka, aby křivka (*) byla první z takové dvojice sdružených křivek 1. typu, pro niž platí (3,5) a (3,6), je:

Křivka (*) je buďto šroubovice na rotační válcové ploše π, jejíž flexe a torse je dána vzorci (4,2_1) a (4,4), jestliže v (4,5) platí znamení nerovnosti, nebo kružnice k, anebo její první a druhá křivost splňují relace (4,2_2) a (4,6).

V prvních dvou případech je sdružená křivka (**) dána rovnicí

$$'\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} + v(\boldsymbol{t} \cos \alpha + \tau \boldsymbol{n} \sin \alpha)$$

a je to opět šroubovice na rotační ploše válcové souosé s plochou π anebo kružnice soustředná s kružnicí k. V třetím případě je sdružená křivka (**) dána rovnicí (1,5), v níž ϱ, resp. λ, μ je určeno v (2,2) resp. (4,1). Zobrazení f je ve všech případech dáno rovnicí $s \cos \alpha + {}'s \cos {}'\alpha = konst.$

5. Platí-li (3,7), je předně nutně

$$\beta \neq \frac{\pi}{2}, \tag{5,1}$$

takže

$$\frac{\cos \alpha}{\cos {}'\alpha} = -\frac{1}{\cos \beta}, \tag{5,2}$$

a podle (3,2) a (5,2) je zobrazení f dáno rovnicí

$$'s = \frac{s}{\cos \beta} + \text{konst.} \tag{5,3}$$

Z (3,3) a (3,7) a (2,3) plyne dále

$$\lambda = 0, \qquad \mu = \pm v \sin \alpha. \tag{5,4}$$

Podle (2,7), (5,2), (5,4), (2,2) a (5,1) je

$$v \mid (k_1 \cos \alpha \mp k_2 \sin \alpha) \operatorname{cotg} \beta \mid = 1. \tag{5,5}$$

Křivka (*) je tedy tehdy a jen tehdy první z dvojice sdružených křivek 1. typu, pro niž platí (3,5) a (3,7), když je Bertrandovou křivkou definovanou relací (5,5). Sdružená druhá křivka dvojice je pak dána rovnicí

$$'\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} + v(\boldsymbol{t} \cos \alpha \pm \boldsymbol{b} \sin \alpha)$$

a zobrazení f je určeno v (5,3).

Spojnice korespondujících bodů je tečnou první ze sdružených křivek dvojice zřejmě jen v tom případě, kdy

$$k_1 = \frac{|\operatorname{tg} \beta|}{v}.$$

Vskutku, při $\alpha = 0$ je nutně $'\alpha + \beta = \pi$, takže platí (3,7) a z (5,5) pak ihned plyne toto tvrzení.

6. Z dvojic 1. typu zbývá ještě vyšetřovat případ, kdy

$$\beta = 0. \tag{6,1}$$

Pak je $\alpha \, '\alpha \neq 0$ a $\alpha + {}'\alpha = \pi$. Tedy

$$1 + \frac{\cos \alpha}{\cos {}'\alpha} \cos \beta = 1 + \frac{\cos {}'\alpha}{\cos \alpha} \cos \beta = 0. \tag{6,2}$$

Z (3,3) a (2,3) tak plyne

$$\lambda = 0, \qquad \mu = \pm v \sin \alpha \tag{6,3}$$

a v důsledku (6,1) — (6,3), (2,2) a (1,1) je podmínka (2,7) ekvivalentní s

$$k_1 \cos \alpha \mp k_2 \sin \alpha = 0.$$

Z toho pak snadno plyne:

Nutná a postačující podmínka, aby ve dvojici 1. typu tečny v korespondujících bodech byly rovnoběžné, je:

Křivky dvojice jsou obecné šroubovice, jedna vznikne z druhé translací ve směru, s kterým její tečny svírají pevný úhel.

7. Ještě je třeba vyšetřit dvojice sdružených křivek 2. typu, t. j. takové dvojice, pro něž

$$\alpha = {}'\alpha = \frac{\pi}{2}. \tag{7,1}$$

Podle (2,2) pak

$$\varrho = 0. \tag{7,2}$$

Podmínka (2,7) ekvivalentní s (1,2') je nyní splněna identicky a podmínka (1,3) je podle (2,6) a (7,2) splněna tehdy a jen tehdy, když

$$\frac{\varepsilon(1 - \lambda k_1)}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \left(\frac{d\lambda}{ds} - \mu k_2\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{ds} + \lambda k_2\right)^2}} = \cos \beta. \tag{7,3}$$

Jednoduché případy $\beta = 0$ anebo $\beta = \frac{\pi}{2}$ probereme v odst. 8 a 9. Nyní se budeme zabývat případem

$$0 \neq \beta \neq \frac{\pi}{2}. \tag{7,4}$$

Pak je podle (7,3) předně

$$1 - \lambda k_1 \neq 0, \tag{7,5}$$

a podle (2,5) a (7,3) je

$$'s = \frac{s}{\cos \beta} - \frac{1}{\cos \beta} \int \lambda k_1 \, ds. \tag{7,6}$$

Podle (2,3) a (7,1) můžeme položit

$$\lambda = v \sin \varphi, \qquad \mu = v \cos \varphi, \qquad \varphi = \varphi(s). \tag{7,7}$$

Poněvadž pak

$$\left(\frac{d\lambda}{ds} - \mu k_2\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{ds} + \lambda k_2\right)^2 = v^2 \left(\frac{d\varphi}{ds} - k_2\right)^2, \tag{7,8}$$

získáme eliminací λ a μ z (7,3) podle (7,7) a (7,8)

$$v\left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} - k_2\right| = |(1 - vk_1 \sin\varphi)\operatorname{tg}\beta|. \tag{7,9}$$

Naopak řešení této rovnice existuje a je spojité v každém intervalu uzavřeném $J \subset I$.

Zjistili jsme tak, že *ve dvojici sdružených křivek 2. typu, v níž tečny v korespondujících bodech nejsou rovnoběžné ani kolmé, lze křivku (*) volit libovolně s tím jediným omezením, že* $1 - vk_1 \sin\varphi \neq 0$, *kde* $\varphi = \varphi(s)$ *je řešení rovnice* (7,9). *Sdružená druhá křivka dvojice je dána rovnicí*

$$'\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} + v(\boldsymbol{n}\sin\varphi + \boldsymbol{b}\cos\varphi)$$

a zobrazení f je dáno vztahy (7,6) *a* (7,7$_1$).

8. Nechť nyní

$$\beta = 0. \tag{8,1}$$

Podle (7,3) je pak

$$1 - \lambda k_1 \neq 0, \qquad \varepsilon = \operatorname{sgn}(1 - \lambda k_1); \tag{8,2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s} - \mu k_2 = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}s} + \lambda k_2 = 0 \tag{8,3}$$

a z (2,5) plyne

$$'s = s - \int \lambda k_1 \,\mathrm{d}s. \tag{8,4}$$

Je-li křivka (*) rovinná, je podle (8,3) a (2,3) λ = konst., μ = konst. a naopak. Je-li křivka (*) prostorová, budeme předpokládat ještě existenci spojitých čtvrtých derivací funkcí (1) v intervalu I a $k_2 \neq 0$ pro všecka $s \in I$. V tomto případě z (8,3) a (2,3) pak snadno plyne, že λ a μ jsou ta řešení diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2\nu}{\mathrm{d}s^2} - \frac{1}{k_2}\frac{\mathrm{d}k_2}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}s} + k_2^2\nu = 0 \tag{8,5}$$

s neznámou funkcí $\nu = \nu(s)$, pro která [podle (2,3) a (7,1)] platí $\lambda^2 + \mu^2 = v^2$. Tato řešení jsou

$$\lambda = v\sin\left(\int k_2\,\mathrm{d}s + c\right), \qquad \mu = v\cos\left(\int k_2\,\mathrm{d}s + c\right), \qquad c = \text{konst.} \tag{8,6}$$

Pro sdruženou křivku (**) dostaneme nyní snadno vzhledem k (8,4) a (2,1) [λ a μ je určeno v (8,6)]

$$\left.\begin{aligned} &'\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} + \lambda\boldsymbol{n} + \mu\boldsymbol{b}; \\ &'\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}, \qquad '\boldsymbol{n} = \varepsilon\boldsymbol{n}, \qquad '\boldsymbol{b} = \varepsilon\boldsymbol{b}; \\ &'k_1 = \frac{\varepsilon k_1}{1 - \lambda k_1}, \qquad 'k_2 = \frac{k_2}{1 - \lambda k_1}. \end{aligned}\right\} \tag{8,7}$$

Ve dvojici sdružených křivek 2. typu, v níž tečny v korespondujících si bodech jsou rovnoběžný, je možno křivku (*) volit libovolně s tím omezením, že [podle (8,2$_1$) a (8,6$_1$)] $vk_1 \sin\left(\int k_2 \mathrm{d}s + c\right) \neq 1$. *Zobrazení f je dáno rovnicí* (8,4) *a pro sdruženou křivku (**) dvojice platí* (8,7). *V tomto případě je analogie s rovinnými paralelními křivkami nejužší. Sdružené křivky jsou evolventami téže evoluty.*

9. Zbývá poslední případ dvojice 2. typu, pro niž

$$\beta = \frac{\pi}{2}. \tag{9,1}$$

Pak je podle (7,3) nutně

$$1 - \lambda k_1 = 0, \tag{9,2}$$

t. j. podle (9,2) a (2,3)

$$\lambda = \frac{1}{k_1}, \qquad \mu = \pm\frac{1}{k_1}\sqrt{v^2k_1^2 - 1}. \tag{9,3}$$

Je tedy pro všechny hodnoty argumentu s z intervalu I buďto $k_1 = \frac{1}{v}$ anebo $k_1 > \frac{1}{v}$. Znaménko ε lze nyní volit libovolně; položíme $\varepsilon = 1$.

Nechť předně

$$k_1 > \frac{1}{v}. \tag{9,4}$$

Podle (9,3) je pak

$$\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s} - \mu k_2\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}s} + \lambda k_2\right)^2 = v^2\left(\frac{\frac{\mathrm{d}k_1}{\mathrm{d}s}}{k_1\sqrt{v^2k_1^2 - 1}} \pm k_2\right)^2. \tag{9,5}$$

Výraz v závorce napravo v (9,5) se anuluje tehdy a jen tehdy, když

$$v^2 = \frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2}\frac{\mathrm{d}\frac{1}{k_1}}{\mathrm{d}s},$$

tedy jedině v těch bodech křivky (*), v nichž její oskulační koule má poloměr rovný v. Takové body však na křivce (*) podle (9,4) neexistují. Podle (2,5), (9,2), (7,2), (9,5) a (1,1) platí

$$'s = v\int\left|\frac{\frac{\mathrm{d}k_1}{\mathrm{d}s}}{k_1\sqrt{v^2k_1^2 - 1}} \pm k_2\right|\mathrm{d}s. \tag{9,6}$$

Sdružená křivka (**) pak podle (2,1), (7,2) a (9,3) je dána rovnicí

$$'\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} + \frac{1}{k_1}\boldsymbol{n} \pm \frac{1}{k_1}\sqrt{v^2k_1^2 - 1}\boldsymbol{b}. \tag{9,7}$$

Jestliže za druhé

$$k_1 = \frac{1}{v}, \tag{9,8}$$

je podle (9,3)

$$\lambda = v, \qquad \mu = 0$$

a podle (2,5), (9,2), (7,2), (9,8) a (1,1)

$$'s = v\int |k_2|\,\mathrm{d}s. \tag{9,9}$$

Není-li tedy žádný bod křivky (*) stacionární, je sdružená křivka

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + v\mathbf{n}$$

vskutku bez singularit.

Nutná a postačující podmínka, aby křivka (*) byla první z dvojice sdružených křivek 2. typu, v níž tečny v korespondujících si bodech jsou kolmé, je:

Buďto má křivka (*) poloměr křivosti stále větší než v anebo stále roven v a je bez stacionárních bodů.

V prvním případě je druhá křivka dvojice dána v (9,7), *ve druhém případě je vytvořena středy křivosti křivky* (*). *Zobrazení f je určeno v* (9,6), *resp.* (9,9).

LITERATURA

1. Bianchi L., Vorlesungen über Differentialgeometrie, Leipzig 1899. 2. Cesàro R., Vorlesungen über natürliche Geometrie, Leipzig 1901. 3. Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces, I, Paris 1914. 4. Hlavatý V., Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet, Praha 1937. 5. Hostinský B., Diferenciální geometrie křivek a ploch, Praha 1950. 6. Nádeník Z., Поверхности, аналогичные кривым Бертрана. Чехосл. мат. журналь, т. 5 (1955). 7. Scheffers G., Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, I, Leipzig 1910. 8. Tuganov N. G., Sur les lignes sur la surface dont la torsion géodésique et la courbure normale sont liées par une rélation linéaire. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 20 (1938). 9. Tuganov N. G., Sur les lignes situées sur une surface dont la torsion géodésique, la courbure normale et la courbure géodésique sont liées par une rélation linéaire à coefficients constants. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 30 (1941).

Došlo 22. III. 1956.

ОБ ОДНОМ КИНЕМАТИЧЕСКОМ СВОЙСТВЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ

ЗБЫНЕК НАДЕНИК

Выводы

Исследованы необходимые и достаточные условия для того, чтобы между точками двух пространственных кривых существовало взаимно-однозначное соответствие такое, что прямая проходящая соответствующими точками и касательные в этих точках образуют образ неизменяемого вида.

SUR UNE PROPRIÉTÉ CINÉMATIQUE DES COURBES GAUCHES

ZBYNĚK NÁDENÍK

Résumé

On résout la question suivante: Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes, sous lesquelles existe parmi les points de deux courbes gauches une correspondance telle que la droite qui joint deux points correspondants et les droites tangentes dans ces points forment une figure invariable.