MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, VI, 3 — 1956

O POLOGRUPÁCH SPLŇUJÚCICH ZOSLABENÉ PRAVIDLÁ KRÁTENIA

ŠTEFAN SCHWARZ
Katedra matematiky Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave

VENOVANÉ K 75. NARODENINÁM AKADEMIKA JURAJA HRONCA

Obsahom tejto práce je štúdium štruktúry pologrúp, ktoré splňujú isté zoslabené pravidlá krátenia. Budeme v podstate študovať podmienky, za ktorých možno danú pologrupu S písať ako súčet disjunktných čiastočných pologrúp, z ktorých v každej platí istý druh pravidla krátenia.

Tento typ pologrúp je zrejme prirodzeným zovšeobecnením pologrúp, ktoré sa dajú písať ako súčet disjunktných grúp. K tomuto typu pologrúp som bol vedený istým výsledkom z teórie charakterov bikompaktných pologrúp [3]. K tomuto istému typu došli najnovšie pri riešení podobných otázok, ale v celkom inej súvislosti, aj Hewitt a Zuckerman [1].

Na pologrupu budeme v priebehu práce klásť niektorú z týchto podmienok:

1. Podmienka A_l: $zx = zy \to x = y$ pre každé $x, y, z \in S$.
2. Podmienka A_r: $xz = yz \to x = y$ pre každé $x, y, z \in S$.
3. Podmienka A: S splňuje súčasne A_l i A_r.
4. Podmienka C: $x^2 = xy = y^2 \to x = y$ pre každú dvojicu $x, y \in S$.

Logická súvislosť týchto podmienok je daná touto schémou:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ A_l \arrow[dr] & & A_r \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Príklady pologrúp, ktoré splňujú podmienku A_l (A_r), ale nesplňujú podmienku A, sú známe. Ľahko možno udať aj príklad pologrupy, ktorá splňuje podmienku C, ale nesplňuje podmienku A. Pokiaľ je mi známe, podmienka C vystupuje prvý raz v literatúre v práci [1], ktorú mi autori dali k dispozícii v rukopise. Význam podmienky C bude v priebehu práce a výsledkami tejto práce náležite vyložený.

Zakončíme tento úvodný odsek práve spomínaným príkladom.

Príklad 0,1. Nech S je množina reálnych čísel uzavretého intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Násobením rozumejme obvyklé násobenie čísel. Keďže pre každé

$a \in S$ je $0 \cdot a = 0^2$, je zrejmé, že pologrupa nesplňuje podmienku A. Nech pre nejaké $a, b \in S$ je $a^2 = ab = b^2$. Ak je $a \neq 0$, $b \neq 0$, plynie z toho $a = b$. Ak aspoň jedno z čísel napr. $a = 0$, je $0 = b \cdot 0 = b^2$, t. j. $b = 0$, teda zase $a = b$. Preto S splňuje podmienku C.

1. P-rozklady danej pologrupy

Definícia 1.1. *Nech P značí v ďalšom ktorúkoľvek (pevne zvolenú) z podmienok A, A_l, A_r, C. Povieme, že pologrupa S pripúšťa P-rozklad, ak sa dá písať ako súčet disjunktných pologrúp $S = \sum_{\alpha \in \Lambda} \mathfrak{S}_\alpha$, pričom v každej z pologrúp $\mathfrak{S}_\alpha$ je splnená podmienka P. Jednotlivé pologrupy $\mathfrak{S}_\alpha$ nazveme komponentmi daného P-rozkladu.*

Poznámka. Ak nejaká pologrupa pripúšťa A-rozklad, pripúšťa samozrejme aj A_l-rozklad, A_r-rozklad a C-rozklad.

Príklad 1.1. Nekonečná cyklická grupa $S = \{a^n \mid n \lesseqgtr 0\}$ pripúšťa A-rozklad tvaru $S = \mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_+ + \mathfrak{S}_-$, kde $\mathfrak{S}_0 = \{a^0\}$, $\mathfrak{S}_+ = \{a, a^2, \ldots\}$, $\mathfrak{S}_- = \{a^{-1}, a^{-2}, \ldots\}$.

Príklad 1.2. Pologrupa $S = \{x_i \mid i = 1, 2, 3, \ldots\}$, kde $x_i x_k = x_i$ pre každé $i, k = 1, 2, \ldots$, nepripúšťa nijaký P-rozklad. Každé dve čiastočné pologrupy majú totiž zrejme neprázdny prenik.

Príklad 1.3. Každá idempotentná pologrupa (t. j. pologrupa so samými idempotentnými elementami) pripúšťa P-rozklad. Každý element $a \in S$ pologrupy sám osebe tvorí v takom prípade jednu z pologrúp $\mathfrak{S}_\alpha$.

Nech S pripúšťa P-rozklad. Pologrupu $\mathfrak{S}_\alpha$, ktorá obsahuje v sebe element x, označíme znakom $\mathfrak{S}_x$. V tomto zmysle píšeme $S = \sum_{x \in S} \mathfrak{S}_x$, pričom rovnaké sčítance berieme len raz.

Ak je $y \in \mathfrak{S}_x$, je podľa definície $\mathfrak{S}_y = \mathfrak{S}_x$. Ak je $\mathfrak{S}_y \cap \mathfrak{S}_x \neq \emptyset$, je $\mathfrak{S}_y = \mathfrak{S}_x$.

Pretože je $x \in \mathfrak{S}_x$, je tiež $x^n \in \mathfrak{S}_x$ pre každé prirodzené $n > 0$. Naopak, ak pre nejaké $n > 1$ je $y^n \in \mathfrak{S}_x$, je tiež $y \in \mathfrak{S}_x$. Lebo keby bolo $y \in \mathfrak{S}_y$, $\mathfrak{S}_y \neq \mathfrak{S}_x$, bolo by $y^n \in \mathfrak{S}_y \neq \mathfrak{S}_x$, čo je spor s predpokladom.

Význam podmienky C je ozrejmený touto vetou.

Veta 1.1. *Nutná podmienka k tomu, aby pologrupa S pripúšťala ktorýkoľvek z P-rozkladov, je, aby S splňovalo podmienku C.*

Dôkaz. Pretože podmienka C je najslabšia, stačí zrejme dokázať, že pologrupa S, ktorá pripúšťa C-rozklad, splňuje sama podmienku C. Nech $S = \sum_{x \in S} \mathfrak{S}_x$ je predpokladaný C-rozklad. Nech pre $x, y \in S$ je $x^2 = xy = y^2$. Potom je $x^2 = y^2 \in \mathfrak{S}_{x^2} = \mathfrak{S}_x$. Teda je tiež $y \in \mathfrak{S}_x$ a $xy \in \mathfrak{S}_x$. Ale v $\mathfrak{S}_x$ platí podmienka C. Teda je $x = y$, č. b. t. d.

Aby sme ukázali, že podmienku C vo vete 1,1 nemožno vo všeobecnosti nahradiť inou z našich podmienok, zostrojíme príklad pologrupy, ktorá pripúšťa A-rozklad, ale v ktorej nie je splnená žiadna z podmienok A, A_r a A_l.

Príklad 1.4. Nech S je pologrupa, ktorej elementami sú dvojice reálnych čísel (a, b), $S = \{(a, b) \mid 0 \leq a \leq 1,\ 0 \leq b \leq 1\}$. Násobenie nech je definované vzťahom $(a, b) \odot (c, d) = (ac, d)$.

V tejto pologrupe nie je splnená podmienka A_r, lebo $(a, b)(c, d) = (a, b_1)(c, d)$ i keď je $b \neq b_1$. Nie je splnená ani podmienka A_l, lebo $(0, b)(c, d) = (0, b)(c_1, d)$ platí i pre $c \neq c_1$. Je však splnená podmienka C. Zo vzťahu $(a, b)^2 = (a, b)(c, d) = (c, d)^2$ plynie $(a^2, b) = (ac, d) = (c^2, d)$, t. j. $b = d$ a $a^2 = ac = c^2$. Druhý z týchto vzťahov implikuje (podobne ako v príklade 0,1) $a = c$. Teda je $(a, b) = (c, d)$.

Uvažujme množinu $\mathfrak{S}^{(b)} = \{(a, b) \mid 0 < a \leq 1\}$. To je zrejme komutatívna pologrupa splňujúca podmienku A. Nech je ďalej $\mathfrak{T}^{(b)} = \{(0, b)\}$. To je pologrupa splňujúca podmienku A. Máme teda tento A-rozklad pologrupy S $S = \sum_{b \in \langle 0,1 \rangle} \mathfrak{T}^{(b)} + \sum_{b \in \langle 0,1 \rangle} \mathfrak{S}^{(b)}$. Tým je uvedené tvrdenie dokázané.

Ak pologrupa S splňuje sama podmienku P, potom rozklad $S = S + \emptyset$ nazveme triviálnym P-rozkladom pologrupy S. Tak napr. grupa pripúšťa vždy triviálny A-rozklad.

Definícia 1.2. *P-rozklad $S = \sum_{x \in S} \mathfrak{S}_x$ nazývame ireducibilným, ak žiadny z komponentov $\mathfrak{S}_x$ nepripúšťa ďalší netriviálny P-rozklad.*

Lemma 1.1. *Nech pologrupa S má aspoň jeden P-rozklad. Potom má aj ireducibilný P-rozklad a tento je jednoznačne určený.*

Dôkaz. Nech $S = \sum_{x \in S} \mathfrak{S}_x^{(\nu)}$, kde ν prebieha istú množinu indexov Λ, dáva množinu všetkých P-rozkladov pologrupy S. Podľa predpokladu je Λ neprázdne. Nech je $x \in S$. Zostrojme prenik $\bigcap_{\nu \in \Lambda} \mathfrak{S}_x^{(\nu)} = \mathfrak{R}_x$. Množina $\mathfrak{R}_x \subseteq S$ je neprázdna, lebo je $x \in \mathfrak{R}_x$. $\mathfrak{R}_x$ je pologrupa s vlastnosťou P. Je $S = \sum_{x \in S} \mathfrak{R}_x$ a tento rozklad je zrejme ireducibilný. Že ireducibilný rozklad je jednoznačný, plynie z konštrukcie rozkladu $S = \sum_{x \in S} \mathfrak{R}_x$.

Poznámka. V odseku 4 dokážeme, že pre komutatívne pologrupy je podmienka C nielen nutná, ale i dostačujúca pre existenciu P-rozkladu. Analogickú vetu pre nekomutatívny prípad sa mi nepodarilo ani dokázať, ani na príklade vyvrátiť.

V nasledujúcom odseku dokážeme najprv, že i v prípade periodických (nekomutatívnych) pologrúp je podmienka C postačujúca.

2. Periodické pologrupy

Pologrupu S nazývame periodickou, ak ku každému elementu $a \in S$ existuje konečné číslo $\varrho = \varrho(a) \geqq 1$ také, že $a^\varrho = e$, kde e je idempotent. Periodická pologrupa obsahuje teda vždy idempotent. Štruktúra takýchto pologrúp bola podrobne opísaná v práci [4].

Zopakujeme iba stručne tie poznatky, ktoré budeme v ďalšom potrebovať.

Nech $\{e_\alpha \mid \alpha \in A\}$ je množina všetkých idempotentov $\in S$. Ak $a^{\varrho(a)} = e_\alpha$, budeme hovoriť, že a patrí k idempotentu e_α. Množinu všetkých elementov patriacich k idempotentu e_α označíme znakom K_α. Potom možno S písať ako súčet disjunktných množín $S = \sum_{\alpha \in A} K_\alpha$. Ku každému e_α existuje jediná maximálna grupa G_α majúca e_α za jednotkový element. Zrejme je $G_\alpha \subseteqq K_\alpha$. Pre každé $a \in K_\alpha$ je $ae_\alpha = e_\alpha a$. Ďalej je $K_\alpha e_\alpha = e_\alpha K_\alpha = G_\alpha$. Element $a \in K_\alpha$ voláme regulárnym, ak $ae_\alpha = e_\alpha a = a$. Tie a len tie elementy $\in K_\alpha$ sú regulárne, ktoré padnú do G_α. Z toho plynie: pologrupa je súčtom (maximálnych) grúp vtedy a len vtedy, ak každý element $\in S$ je regulárny.

Nasledujúce dve vety sú známe a nebudeme ich preto dokazovať.

a) Nech S je periodická pologrupa, v ktorej platí A_l. Potom je S sprava jednoduchá pologrupa (t. j. neobsahuje nijaký pravý ideál $\neq S$) a S je množinovým súčtom disjunktných izomorfných grúp.

b) Nech S je periodická pologrupa, v ktorej platí podmienka A. Potom je S (periodická) grupa.

Lemma 2.1. *Nech S je periodická grupa. Potom S nepripúšťa nijaký netriviálny P-rozklad.*

Dôkaz. Nech je $S = \sum_{x \in S} \mathfrak{S}_x$ a nech je $e \in \mathfrak{S}_e$ jednotkovým elementom grupy S. Keďže je $x \in \mathfrak{S}_x$, je tiež $\{x, x^2, \ldots\} \subseteqq \mathfrak{S}_x$. Pre vhodne volené $\varrho = \varrho(x)$ je však $x^{\varrho(x)} = e$. Teda je $e \in \mathfrak{S}_x$, t. j. $\mathfrak{S}_x = \mathfrak{S}_e$. Každý element $x \in S$ padne do $\mathfrak{S}_e$, t. j. $S = \mathfrak{S}_e$, č. b. t. d.

Veta 2.1. *Nech S je periodická pologrupa. Pologrupa S pripúšťa P-rozklad vtedy a len vtedy, ak S spĺňuje podmienku C. Jednotlivé ireducibilné komponenty P-rozkladu sú (periodické) grupy.*

Dôkaz. a) Že podmienka je nutná, vieme z vety 1,1.

b) Dokážeme, že podmienka je postačujúca. Nech je v hore zavedenom zmysle $S = \sum_{\alpha \in A} K_\alpha$ a nech je $a \in K_\alpha$; e_α idempotent $\in K_\alpha$. Naša veta bude dokázaná, ak ukážeme, že $ae_\alpha = a$. Lebo potom a patrí do grupy G_α, t. j. $K_\alpha = G_\alpha$ pre každé $\alpha \in A$.

Keďže a patrí idempotentu e_α, existuje celé číslo $\varrho > 0$ také, že $a^\varrho \in G_\alpha$. Teda je

$$a^\varrho \cdot e_\alpha = a^\varrho. \tag{1}$$

Ak ϱ je párne, plynie z (1)

$$(a^{\varrho/2} e_\alpha)^2 = (a^{\varrho/2} \cdot e_\alpha) \cdot a^{\varrho/2} = (a^{\varrho/2})^2,$$

a teda vzhľadom na podmienku C

$$a^{\varrho/2} \cdot e_\alpha = a^{\varrho/2}.$$

Ak ϱ je nepárne, plynie z (1) $a^{\varrho+1} e_\alpha = a^{\varrho+1}$, a teda

$$\left(a^{\frac{\varrho+1}{2}} e_\alpha\right)^2 = \left(a^{\frac{\varrho+1}{2}} e_\alpha\right) a^{\frac{\varrho+1}{2}} = \left(a^{\frac{\varrho+1}{2}}\right)^2.$$

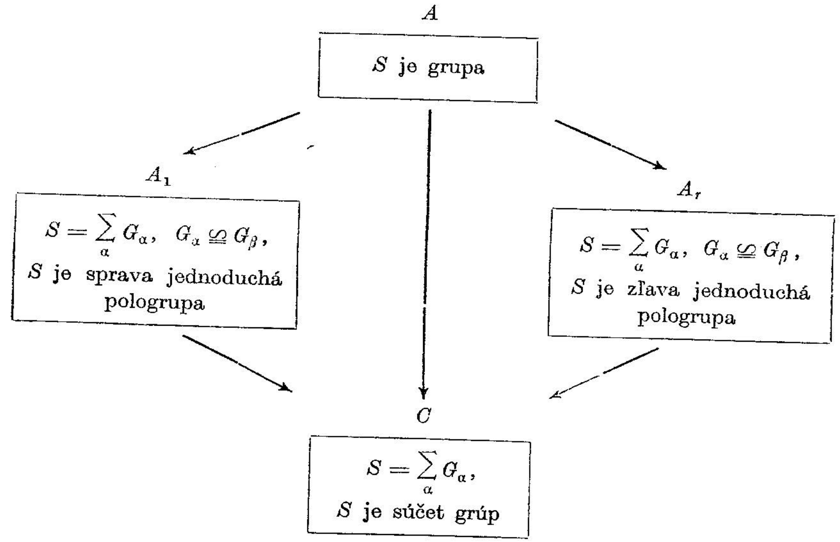
Z podmienky C plynie

$$a^{\frac{\varrho+1}{2}} e_\alpha = a^{\frac{\varrho+1}{2}}.$$

Rovnica $a^\varrho e_\alpha = a^\varrho$ má teda vždy za následok $a^\sigma e_\alpha = a^\sigma$, kde $\sigma < \varrho$ $\left(\text{totiž } \sigma = \frac{\varrho}{2} \text{ alebo } \sigma = \frac{\varrho+1}{2}, \text{ podľa toho, či je } \varrho \text{ párne alebo nie}\right)$. Opakujúc tento postup dostávame nakoniec $ae_\alpha = a$, t. j. $a \in G_\alpha$. Tým sme dokázali, že S je súčtom grúp.

Z lemmy 2,1 plynie, že jednotlivé grupy G_α sú ireducibilnými komponentmi vzniknutého P-rozkladu. Tým je vykonaný dôkaz vety 2,1.

Poznámka. Výsledky týkajúce sa periodických pologrúp možno prehľadne zhrnúť do tejto tabuľky:



Poznámka. Je známe, že Hausdorffove bikompaktné pologrupy majú analogickú štruktúru ako periodické pologrupy. Tak aj uvedené vety a) a b) platia i pre takéto pologrupy. Je však dôležité poznamenať, že pre takéto pologrupy veta 2.1 vo všeobecnosti nemusí platiť. O tom nás presvedčuje príklad 0,1, v ktorom zavedieme obvyklú topológiu na reálnej osi. Táto pologrupa spĺňuje podmienku C, je bikompaktná, nie je však súčtom grúp. Táto pologrupa má však tú vlastnosť, že sa dá písať napr. ako súčet troch disjunktných pologrúp, z ktorých každá spĺňuje podmienku A. Je totiž napr. $S = \{0\} + \{1\} + \{a \mid 0 < a < 1\}$.

3. Rozklad komutatívnej pologrupy

V tomto odseku nebudeme predpokladať žiadnu z podmienok P. Odvodíme existenciu „najjemnejšieho" rozkladu komutatívnej pologrupy S na súčet disjunktných čiastočných pologrúp. Hoci úvahy tohto odseku nie sú komplikované, v literatúre som vykonanie tohto rozkladu nikde nenašiel.

Definícia 3.1. *Nech S je komutatívna pologrupa. Budeme písať $a \sim b$, ak existujú také prirodzené čísla m a n, že platí $a^m = b^n$.*

Lemma 3.1. *Vzťah $\sim$ je ekvivalencia v obvyklom slova zmysle.*

Dôkaz. Keďže vzťahy $a \sim a$ a $a \sim b \to b \sim a$ sú zrejmé, stačí iba dokázať platnosť implikácie $a \sim b$, $b \sim c \to a \sim c$.

Podľa predpokladu existujú prirodzené čísla m, n, r, s, že $a^m = b^n$, $b^r = c^s$. Teda je $a^{mr} = b^{nr} = (b^r)^n = c^{sn}$, t. j. $a \sim c$, č. b. t. d.

Triedu obsahujúcu element a budeme značiť znakom T_a. Zrejme je $a \sim a^n$ pre každé celé $n > 0$. Teda $T_{a^n} = T_a$.

Lemma 3.2. *$a \sim b \to a \sim ab$, t. j. každé T_a je pologrupou.*

Dôkaz. Podľa predpokladu je $a^n = b^m$ pre isté vhodne volené prirodzené $n, m > 0$. Teda je $(ab)^{nm} = a^{nm}(b^m)^n = a^{n(m+n)}$, t. j. $a \sim ab$, č. b. t. d.

Lemma 3.3. *Každá z tried T_a obsahujúca idempotent je periodická pologrupa s jediným idempotentom.*

Dôkaz. Ak pre dva idempotenty $e_1, e_2 \in S$ platí $e_1 \sim e_2$, existujú dve prirodzené čísla $m, n > 0$ také, že $e_1^m = e_2^n$, t. j. $e_1 = e_2$. Trieda môže teda obsahovať najviac jeden idempotent.

Nech e je idempotent a $c \in T_e$. Potom existujú prirodzené čísla $m, n > 1$ také, že $c^n = e^m = e$, t. j. $c^n = e$. Teda ku každému $c \in T_e$ existuje konečné číslo $n = n(c)$ také, že $c^n = e$. Preto je T_a periodická pologrupa.

Lemma 3.4. *Každá z tried T_a je ireducibilná, t. j. nedá sa písať ako súčet dvoch alebo viac disjunktných pologrúp.*

Dôkaz. Nech $T_a = \sum_\alpha T^{(\alpha)}$, kde $T^{(\alpha)}$ sú disjunktné pologrupy. Nech je $b \in T^{(\alpha)}$, $c \in T^{(\beta)}$, $\alpha \neq \beta$. Keďže $T^{(\alpha)}$ a $T^{(\beta)}$ sú pologrupy, je pre každé prirodzené $m, n > 0$ $b^n \in T^{(\alpha)}$, $c^m \in T^{(\beta)}$. Teda je pre každé prirodzené $n, m > 0$ $b^n \neq c^m$. To je však nemožné, lebo podľa predpokladu je $b \sim c$.

Z uvedených výsledkov plynie táto veta:

Veta 3.1. *Každá komutatívna pologrupa sa dá písať ako súčet disjunktných pologrúp, z ktorých každá má najviac jeden idempotent. Pritom existuje „najjemnejší" rozklad, ktorý má tú vlastnosť, že komponent obsahujúci idempotent je periodická pologrupa.*

Poznámka 1. Veta 3,1 nie je správna pre nekomutatívne pologrupy. To znamená: existuje nekomutatívna pologrupa, ktorá sa nedá písať ako súčet disjunktných pologrúp, z ktorých každá má najviac jeden idempotent. Príkladom takejto pologrupy je pologrupa S, ktorej elementami sú matice

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

a násobením rozumieme obvyklé násobenie matíc. Multiplikačná tabuľka tejto pologrupy je

	0	b_1	b_2	b_3	b_4
0	0	0	0	0	0
b_1	0	b_1	0	b_3	0
b_2	0	0	b_2	0	b_4
b_3	0	0	b_3	0	b_1
b_4	0	b_4	0	b_2	0

Predpokladajme, že by taký rozklad existoval. Čiastočná pologrupa, do ktorej patrí b_3, obsahuje nutne aj element 0. Do tejto pologrupy patrí potom aj b_4 (lebo $b_4^2 = 0$). Táto čiastočná pologrupa obsahuje potom však aj elementy $b_3b_4 = b_1$, $b_4b_3 = b_2$. Teda obsahuje vôbec všetky elementy $\in S$. Rozklad žiadaného tvaru nie je možný.

Poznámka 2. Ekvivalenciu z lemmy 3,1 možno zaviesť i v nekomutatívnom prípade. Všetko sa však zvrtne na tom, že lemma 3,2 nemusí platiť.

4. A-rozklady komutatívnej pologrupy

V tomto odseku dokážeme, že v prípade komutatívnych pologrúp je podmienka C nielen nutná, ale i postačujúca pre existenciu A-rozkladu pologrupy S. Táto veta vyplýva z vyšetrovaní Hewitta a Zuckermana [1]. Ich metóda rozkladu pologrupy je analogická istej metóde, ktorú zrejme nezávisle od nich podali T. Tamura a N. Kimura v práci [2]. Dôkaz, ktorý tu podáme, je založený na inom princípe (totiž na rozklade z odseku 3) a je podstatne jednoduchší. Má okrem toho výhodu, že dáva ihneď ireducibilný A-rozklad. Treba však poznamenať, že práce [1] a [2] sledujú trochu iný cieľ. Treba (v našej terminológii) nájsť taký A-rozklad, ktorý spĺňuje naviac vzťah $\mathfrak{S}_x \cdot \mathfrak{S}_y \subseteqq \mathfrak{S}_{xy}$ pre $x, y \in S$.

Lemma 4.1. *Nech S je komutatívna pologrupa spĺňujúca podmienku C. Potom $x^\varrho y = x^\varrho z \to xy = xz$.*

Dôkaz. Nech ϱ je párne. Potom z rovníc $x^\varrho y^2 = x^\varrho zy$, $x^\varrho yz = x^\varrho z^2$ plynie

$$(x^{\varrho/2}y)^2 = x^\varrho zy = (x^{\varrho/2}y)(x^{\varrho/2}z) = x^\varrho z^2 = (x^{\varrho/2}z)^2$$

a odtiaľ (vzhľadom na podmienku C) $x^{\varrho/2} \cdot y = x^{\varrho/2} \cdot z$.

Nech ϱ je nepárne. Potom z rovníc $x^{\varrho+1}y^2 = x^{\varrho+1}zy$, $x^{\varrho+1}zy = x^{\varrho+1}z^2$ plynie obdobne $x^{\frac{\varrho+1}{2}} y = x^{\frac{\varrho+1}{2}} z$.

Opakovaním tohto postupu dostávame vzťah $xy = xz$. č. b. t. d.

Lemma 4.2. *Nech S je komutatívna pologrupa splňujúca podmienku C. Potom každá trieda T_a (zavedená v odseku 3) splňuje podmienku A.*

Dôkaz. Z lemmy 4,1 plynie najprv, že v každej triede platí $x^e y = x^e z \to xy = xz$. To nám pomôže dokázať, že pre $a, b, c \in T_a$ platí $ab = ac \to b = c$.

Podľa predpokladu je pre vhodne volené prirodzené čísla $m, n, s, t > 0$, $b^n = a^m$, $c^s = a^t$. Teda je

$$b^{n+1} = aba^{m-1} = aca^{m-1} = b^n c,$$
$$c^{s+1} = aca^{t-1} = aba^{t-1} = c^s b.$$

Z lemmy 4,1 plynie $b^2 = bc$, $c^2 = bc$, teda $b^2 = bc = c^2$. Vzhľadom na podmienku C je preto $b = c$, č. b. t. d.

Lemma 4.3. *Za predpokladov lemmy 4,2 každá trieda obsahujúca idempotent je periodickou grupou.*

Dôkaz. Z lemmy 3,3 plynie, že T_a je periodickou pologrupou s jediným idempotentom. Z vety 2,1 plynie, že T_a je periodickou grupou.

Z doterajších výsledkov plynie:

Veta 4.1. *Nutná a postačujúca podmienka pre to, aby komutatívna pologrupa pripúšťala A-rozklad, je splnenie podmienky C. Pritom v ireducibilnom A-rozklade komponent obsahujúci idempotent je periodickou grupou.*

Ako doplnok k lemme 2,1 môžeme teraz ľahko dokázať túto vetu o grupách:

Veta 4.2. *Nech S je Abelova grupa. Nutná a postačujúca podmienka pre to, aby S pripúšťalo netriviálny A-rozklad je: S obsahuje element nekonečného rádu. Ireducibilný A-rozklad má aspoň tri triedy.*

Dôkaz. Nevyhnutnosť podmienky plynie z lemmy 2,1. Nech a je element nekonečného rádu a S_0 podgrupa všetkých elementov konečného rádu. Nech e je jednotkovým elementom z S. Pre každé prirodzené $n \geq 1$ je a^n non $\in S_0$, teda je $T_a \neq T_e = S_0$. Existencia netriviálneho A-rozkladu je teraz dôsledkom vety 4,1. Nevyhnutne je $a \not\sim a^{-1}$, lebo $T_a = T_{a^{-1}}$ by implikovalo $aa^{-1} = e \in T_a$. Teda je $T_a \neq T_{a^{-1}}$ a S má najmenej tri triedy, totiž S_0, T_a, $T_{a^{-1}}$.

Poznámka. Výsledky našej práce dávajú vznik niekoľkým problémom, ktorých riešenie sa nezdá jednoduché.

Problém 1. Nech S je nekomutatívna pologrupa. Nájsť nutnú a postačujúcu podmienku pre to, aby S pripúšťalo A-rozklad (A_l-rozklad, A_r-rozklad).

Problém 2. Rozriešiť problém 1 aspoň pre prípad Hausdorffových bikompaktných pologrúp.

Jednoduchšie znie tento problém (hoci sa nezdá ľahkým).

Problém 3. Nech S je nekomutatívna grupa. Nájsť nutnú a postačujúcu podmienku, aby S pripúšťalo netriviálny A-rozklad.

Problém 4. Rozriešiť problém 3 aspoň pre prípad Hausdorffových bikompaktných grúp.

LITERATÚRA

1. Hewitt E.—Zuckerman H. S., The L_1-algebra of a commutative semigroup, Annals of Mathematics, 1956, v tlači. 2. Tamura T.—Kimura N., On decompositions of a commutative semigroup, Kodai Mathematical Seminar reports, No 4, December 1954, 109—112. 3. Schwarz Št., The theory of characters of commutative Hausdorff bicompact semigroups, Čechoslovackij mat. žurnal, *6* (81), 1956, v tlači. 4. Schwarz Št., K teoriji periodičeskich polugrupp, Čechoslovackij mat. žurnal, *3* (78), 1953, 7—21.

Došlo 19. III. 1956.

ПОЛУГРУППЫ УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ НЕКОТОРЫМ СЛАБЫМ ВИДАМ ПРАВИЛА СОКРАЩЕНИЯ

ШТЕФАН ШВАРЦ

Выводы

Пусть S - полугруппа. Скажем, что S удовлетворяет условию $A_l(A_r, A)$, если в S имеет место правило сокращения слева (справа, слева и справа). Скажем далее, что S удовлетворяет условию C если $x^2 = xy = y^2 \to x = y$ для всякой пары $x, y \in S$.

Пусть P значит некоторое из условий A, A_l, A_r, C. Скажем, что S допускает P-разбиение если S можно писать как сумму непересекающихся частичных полугрупп $S = \sum_\alpha \mathfrak{S}_\alpha$, причем каждая полугруппа $\mathfrak{S}_\alpha$ удовлетворяет условию P.

Для того чтобы S допускало P-разбиение необходимо, чтобы S удовлетворяло условию C. В статье доказано: это условие является также достаточным в следующих двух случаях:

a) S — периодическая полугруппа,

b) S — любая коммутативная полугруппа

В случае a) компоненты неразложимого P-разбиения — (периодические) группы.

В случае b) компоненты неразложимого A-разбиения — классы эквивалентных между собой элементов, причем эквивалентность $\sim$ в S устанавливается следующим образом: $a \sim b \leftrightarrow a^m = b^n$ для некоторых натуральных $m, n > 0$. Класс содержащий идемпотент — периодическая группа.

Легко показать, что абелева группа S допускает нетривиалное A-разбиение тогда и только тогда, если в S имеется элемент бесконечного порядка. Аналогичная проблема для некоммутативных групп оставляется открытой. Другая проблема, которая оставляется открытой: найти необходимое и достаточное условие для того чтобы любая полугруппа допускала $A(A_l, A_r)$-разбиение.

SEMIGROUPS SATISFYING SOME WEAKENED FORMS OF THE CANCELLATION LAW

ŠTEFAN SCHWARZ

Summary

Let S be a semigroup. We shall say that S satisfies the condition $A_l(A_r, A)$ if in S the left (right, two-sided) cancellation law holds. We shall say further that S satisfies the condition C if $x^2 = xy = y^2 \to x = y$ for every couple $x, y \in S$.

Let P detones any one of the conditions A, A_l, A_r, C. We shall say that S admits a P-decomposition if S can be written as a class sum of disjoint subsemigroups $S = \sum_{\alpha} \mathfrak{S}_\alpha$, where each $\mathfrak{S}_\alpha$ satisfies the condition P.

A necessary condition that S admits a P-decomposition is the fulfilment of the condition C (in the whole semigroup S).

It is proved: this condition is also sufficient in the following two special cases:

a) S is a (non-commutative) torsion semigroup,

b) S is a commutative semigroup.

In the case a) the components of the irreducible P-decomposition of S are (torsion) groups.

In the case b) the components of the irreducible A-decomposition are classes of equivalent elements where the equivalence relation $\sim$ in S is defined by the following statement: $a \sim b$ if and only if there exist two integers $m, n > 0$ such that $a^m = b^n$. Hereby a class containing an idempotent is a torsion group.

It is easy to show that an abelian group admits a non-trivial A-decomposition if and only if it contains an element of infinite order. The analogous problem for non-commutative groups seems to be not easy. An other problem which remains open is to find necessary and sufficient conditions that a general semigroup admits a $A(A_l, A_r)$-decomposition.