MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, VI, 3 — 1956

POZNÁMKA O ÚPLNÝCH METRICKÝCH PROSTORECH

MILOSLAV JŮZA
Katedra matematiky Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave

Je-li P úplný metrický prostor, pak — jak je známo — platí tato věta: Budiž $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ posloupnost uzavřených koulí prostoru P taková, že pro $n = 1, 2, \ldots$ platí $K_{n+1} \subset K_n$ a že poloměry koulí konvergují k nule. Pak průnik $\prod_{n=1}^{\infty} K_n$ je neprázdný.

Tato věta neplatí, vynecháme-li podmínku, že poloměry koulí konvergují k nule, jak ukazuje tento příklad:

Prostor P budiž množina přirozených čísel, v níž metriku ϱ definujeme takto:

$$\varrho(m, m) = 0, \; \varrho(m, n) = 1 + \frac{1}{\min(m, n)} \quad \text{pro } m \neq n.$$

Snadno zjistíme, že ϱ je metrika, při čemž prostor P s metrikou ϱ je úplný. Ale je-li K_n uzavřená koule o středu n a poloměru $1 + \frac{1}{n}$, pak $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ je monotonní posloupnost uzavřených koulí s prázdným průnikem.

Uvedený příklad by se mohl zdát příliš triviální vzhledem k tomu, že uvažovaný prostor se skládá pouze z isolovaných bodů. Ale v tomto článku sestrojíme dokonce metrický lineární prostor, který bude úplný a přitom v něm budou existovat monotonní posloupnosti uzavřených koulí bez společného bodu.

Definice 1. *Budiž R množina reálných čísel. Pro $x \in R$, $y \in R$ definujme funkci $\varrho(x, y)$ takto:*

a) *je-li* $|x - y| \leqq 2$, *je* $\varrho(x, y) = |x - y|$;

b) *je-li* $|x - y| > 2$, *je* $\varrho(x, y) = 1 + \dfrac{1}{|x - y| - 1}$.

Věta 1. *ϱ je metrika v R.*

Důkaz. Je zřejmé vždycky $\varrho(x, x) = 0$, $\varrho(x, y) \geqq 0$, $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$. Zbývá dokázat, že pro libovolná x, y, z platí

$$\varrho(x, y) \leqq \varrho(x, z) + \varrho(z, y).$$

Vhodným označením můžeme dosáhnout toho, aby nastal jeden z těchto případů:

$$\text{I. } x \leqq z \leqq y, \quad \text{II. } x \leqq y \leqq z, \quad \text{II}'. \ z \leqq x \leqq y.$$

Případ II′ snadno převedeme na II, užijeme-li zobrazení $\varphi(x) = -x$, při němž zřejmě platí $\varrho(x, y) = \varrho(\varphi(x), \varphi(y))$.

I. Budiž $x \leqq z \leqq y$. Potom $|x - y| = y - x = y - z + z - x = |y - z| + |z - x|$. Nastává vždy jeden z těchto případů:

a) $|x - y| > 2$, $\quad |x - z| > 2$, $\quad |z - y| > 2$,
b) $|x - y| > 2$, $\quad |x - z| > 2$, $\quad |z - y| \leqq 2$,
b′) $|x - y| > 2$, $\quad |x - z| \leqq 2$, $\quad |z - y| > 2$,
c) $|x - y| > 2$, $\quad |x - z| \leqq 2$, $\quad |z - y| \leqq 2$,
d) $|x - y| \leqq 2$.

Případ b′) opět snadno převedeme na b) použitím zobrazení $\varphi(x) = -x$.

a) V tomto případě máme

$$\varrho(x, y) = 1 + \frac{1}{|x - y| - 1} < 1 + \frac{1}{2 - 1} = 2,$$

$$\varrho(x, z) = 1 + \frac{1}{|x - z| - 1} > 1,$$

$$\varrho(z, y) = 1 + \frac{1}{|z - y| - 1} > 1,$$

tedy

$$\varrho(x, y) < \varrho(x, z) + \varrho(z, y).$$

b) Protože je

$$|x - y| = |y - z| + |z - x|,$$

je

$$|x - y| \geqq |z - x|, \text{ tedy } 1 + \frac{1}{|x - y| - 1} \leqq 1 + \frac{1}{|x - z| - 1},$$

tedy

$$\varrho(x, y) \leqq \varrho(x, z) \leqq \varrho(x, z) + \varrho(z, y).$$

c) Je

$\varrho(x, y) \leqq 2$, ale $\varrho(x, z) + \varrho(z, y) = |x - z| + |z - y| = |x - y| > 2$, tedy

$$\varrho(x, y) < \varrho(x, z) + \varrho(z, y).$$

d) Je

$$\varrho(x, y) = |x - y|, \ \varrho(x, z) = |x - z|, \ \varrho(y, z) = |y - z|$$

a tedy

$$\varrho(x, y) = \varrho(x, z) + \varrho(z, y).$$

II. Budiž $x \leqq y \leqq z$.

Potom

$$|x - z| = z - x = z - y + y - x = |z - y| + |y - x|.$$

Nastává vždy jeden z těchto případů

a) $|x - z| > 2$, $\quad |x - y| > 2$, $\quad |y - z| > 2$,
b) $|x - z| > 2$, $\quad |x - y| > 2$, $\quad |y - z| \leqq 2$,
c) $|x - z| > 2$, $\quad |x - y| \leqq 2$, $\quad |y - z| > 2$,
d) $|x - z| > 2$, $\quad |x - y| \leqq 2$, $\quad |y - z| \leqq 2$,
e) $|x - z| \leqq 2$.

a) V tomto případě jest $\varrho(x, y) < 2$, $\varrho(x, z) > 1$, $\varrho(z, y) > 1$, tedy

$$\varrho(x, y) \leqq \varrho(x, z) + \varrho(z, y).$$

b) Podle věty o přírůstku funkce pro $a \geqq 0$, $b > 2$ platí

$$\frac{1}{a + b - 1} - \frac{1}{b - 1} = -a \frac{1}{(\xi - 1)^2},$$

kde

$$b \leqq \xi \leqq a + b,$$

tedy

$$\frac{1}{(\xi - 1)^2} < 1,$$

a proto

$$\frac{1}{a + b - 1} - \frac{1}{b - 1} > -a.$$

Položíme-li $a = |z - y|$, $b = |x - y|$, dostaneme za předpokladů v případě b)

$$1 + \frac{1}{|x - z| - 1} = 1 + \frac{1}{|z - y| + |y - x| - 1} = 1 + \frac{1}{|y - x| - 1} +$$
$$+ \left(\frac{1}{|z - y| + |y - x| - 1} - \frac{1}{|y - x| - 1}\right) > 1 + \frac{1}{|y - x| - 1} -$$
$$- |z - y| = \varrho(x, y) - \varrho(z, y).$$

Odtud dostaneme

$$\varrho(x, y) < \varrho(x, z) + \varrho(z, y).$$

c) V tomto případě je $\varrho(x, z) > 1$, $\varrho(y, z) > 1$, $\varrho(x, y) = |x - y| \leqq 2$, tedy

$$\varrho(x, y) < \varrho(x, z) + \varrho(z, y).$$

d) V tomto případě máme

$$\varrho(x, z) + \varrho(z, y) = 1 + \frac{1}{|x - z| - 1} + |z - y| = 1 + \frac{1}{|x - y| + |y - z| - 1} +$$
$$+ |y - z| \geqq 1 + \frac{1}{2 + |y - z| - 1} + |y - z| = 1 + \frac{1}{1 + |y - z|} +$$
$$+ |y - z| = 1 + \frac{1 + |y - z| + |y - z|^2}{1 + |y - z|} \geqq 2.$$

Naproti tomu je

$$\varrho(x, y) = |x - y| \leqq 2,$$

takže

$$\varrho(x, y) \leqq \varrho(x, z) + \varrho(z, y).$$

c) V tomto případě máme $|x - z| \leqq 2$, tedy též $|x - y| \leqq 2$, $|y - z| \leqq \leqq 2$ a dostaneme

$$\varrho(x, y) = |x - y| \leqq |x - z| + |z - y| = \varrho(x, z) + \varrho(z, y).$$

Tím jsme dokázali pro funkci ϱ trojúhelníkovou nerovnost ve všech případech, které mohou nastat a zároveň jsme tím dokončili důkaz věty 1.

V dalším budeme uvažovat posloupnosti reálných čísel, konvergující jednak podle metriky ϱ, jednak podle euklidovské metriky. Budeme proto psát $x_n \to x$, jestliže x_n konverguje k x ve smyslu euklidovské metriky, $x_n \rightrightarrows x$, jestliže x_n konverguje k x ve smyslu metriky ϱ.

Pro metriku ϱ zřejmě platí

$\varrho(x, y) \leqq 2$,

$\varrho(x, y) \leqq 1$ tehdy a jen tehdy, je-li $|x - y| \leqq 1$ a pak $\varrho(x, y) = |x - y|$.

Odtud ihned plyne:

Posloupnost $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ je konvergentní podle metriky ϱ tehdy a jen tehdy, je-li konvergentní podle euklidovské metriky a má pak v obou případech touž limitu.

Posloupnost $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ je cauchyovská podle metriky ϱ tehdy a jen tehdy, je-li cauchyovská podle euklidovské metriky.

Odtud plyne:

Věta 2. *Prostor R s metrikou ϱ je úplný.*

Věta 3. *Prostor R s metrikou ϱ při obyčejné definici sčítání a násobku je metrický lineární prostor, t. j. platí:*

I. *Pro libovolná reálná čísla x, y, a je*

$$\varrho(x, y) = \varrho(x + a, y + a).$$

II. *Jestliže $x_n \rightrightarrows x$, $\alpha_n \to \alpha$, pak $\alpha_n x_n \rightrightarrows \alpha x$.*

Důkaz. I. plyne z toho, že $\varrho(x, y)$ je pouze funkcí $|x - y|$.

II. Protože $x_n \rightrightarrows x$, je též $x_n \to x$, tedy $\alpha_n x_n \to \alpha x$, tedy $\alpha_n x_n \rightrightarrows \alpha x$.

Podíváme se, jak vypadají koule v prostoru R s metrikou ϱ. Otevřená koule o středu x_0 a poloměru a, $0 < a \leqq 1$, je množina bodů x, pro něž platí $|x - x_0| < a$. Otevřená koule o poloměru $a > 2$ je celý prostor. Otevřená koule o poloměru a, $1 < a \leqq 2$, a o středu x_0 je množina bodů, pro něž platí buď

$$|x - x_0| < a,$$

nebo

$$|x - x_0| > 2, \quad 1 + \frac{1}{|x - x_0| - 1} < a.$$

Poslední podmínku můžeme upravit na podmínku

$$|x - x_0| > \frac{1}{a - 1} + 1.$$

Tedy v tomto případě otevřená koule o poloměru a je množina bodů, pro něž je buď

$$|x - x_0| < a \quad \text{nebo} \quad |x - x_0| > \frac{1}{a - 1} + 1.$$

Analogické podmínky dostaneme pro koule uzavřené.

Definice 2. *Množinu M v prostoru R nazveme ohraničenou, jestliže existuje číslo α tak, že pro každé $x \in M$ platí*

$$-\alpha < x < \alpha.^*$$

Sjednocení konečného počtu ohraničených množin je zřejmě ohraničená množina.

Věta 4. *Budiž K uzavřená koule o středu x_0 a poloměru a, $1 < a < 2$; pak množina $R - K$ je ohraničená.*

Důkaz. Pro $x \in R - K$ zřejmě platí

$$x_0 - \frac{1}{a - 1} + 1 < x < x_0 + \frac{1}{a - 1} + 1$$

a položíme-li

$$\alpha = \max\left(\left|x_0 - \frac{1}{a - 1} + 1\right|, \left|x_0 + \frac{1}{a - 1} + 1\right|\right),$$

máme

$$-\alpha < x < \alpha.$$

Věta 5. *Je-li M ohraničená množina a b číslo takové, že $1 < b < 2$, pak existuje uzavřená koule K o poloměru a, $1 < a < b$, která neobsahuje žádný bod množiny M.*

Důkaz. Budiž α číslo takové, že pro $x \in M$ platí $-\alpha < x < \alpha$. Za střed koule K zvolíme číslo $x_0 = \alpha + 2$. Protože $\lim\limits_{a \to 1+} \frac{1}{a - 1} + 1 = \infty$, můžeme zvolit a tak, aby $1 < a < b$, $\frac{1}{a - 1} + 1 > 2\alpha + 2$. Koule o středu x_0 a poloměru a má pak zřejmě žádané vlastnosti.

Věta 6. *V prostoru R s metrikou ϱ existuje posloupnost uzavřených koulí K_1, $K_2, \ldots, K_n, \ldots$ taková, že pro $n = 1, 2, \ldots$ je $K_{n+1} \subset K_n$, ale průnik $\prod\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ je prázdný.*

---

* Rozlišuji množinu ohraničenou a množinu omezenou. Množina M se nazývá omezená, jestliže $\sup\limits_{\substack{x \in M \\ y \in M}} \varrho(x, y) < \infty$.

Důkaz. Definujme $A_n = \langle -n, n \rangle$, K_1 uzavřená koule o středu 0 a poloměru $r_1 = \frac{3}{2}$. Pro $n = 2, 3, \ldots$ definujme K_n jako uzavřenou kouli o středu x_n a poloměru r_n takovou, aby $1 < r_n < r_{n+1}$ a aby K_n neobsahovala žádný bod ohraničené množiny $(R - K_{n-1}) + A_n$. Existence takové koule je zaručena větou 5. Posloupnost $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ má zřejmě všechny vlastnosti požadované ve větě 6.

Došlo 15. XII. 1955.

ЗАМЕТКА О ПОЛНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

МИЛОСЛАВ ЮЗА

Выводы

Пусть R множество вещественных чисел, в котором определим метрику ϱ следующим образом:

a) $\varrho(x, y) = |x - y|$, если $|x - y| \leq 2$;

b) $\varrho(x, y) = 1 + \dfrac{1}{|x - y| - 1}$, если $|x - y| > 2$.

Множество R с метрикой ϱ является полным линейным метрическим пространством, в котором существует монотонная последовательность замкнутых сфер без общей точки.