MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK VI
ČÍSLO 3

EULEROVSKÉ ČIARY A ROZKLADY PRAVIDELNÉHO GRAFU PÁRNEHO STUPŇA NA DVA FAKTORY ROVNAKÉHO STUPŇA

ANTON KOTZIG, Bratislava

Článok sa zaoberá rozkladmi pravidelného grafu $2n$-tého stupňa na dva faktory n-tého stupňa pomocou tzv. striedavého zatrieďovania hrán eulerovskej čiary grafu. Poukazuje na možnosť zobrazenia systému všetkých eulerovských čiar súvislého pravidelného grafu párneho stupňa na systém všetkých jeho rozkladov na dva faktory rovnakého stupňa.

Je známa táto veta: *Hrany súvislého eulerovského grafu*[1] *s párnym počtom* $2p > 0$ *hrán možno rozdeliť do dvoch tried* H_1, H_2 *tak, že ľubovoľný uzol je incidentný s tým istým počtom hrán z triedy* H_1 *ako z triedy* H_2. Špeciálne pre súvislé pravidelné grafy $2n$-tého stupňa s párnym počtom hrán vyplýva z uvedenej vety existencia rozkladu takýchto grafov na dva faktory n-tého stupňa.

Veta sa dokazuje takto: v eulerovskom grafe G, ktorý je súvislý, existuje aspoň jedna eulerovská čiara. Nech postupnosť:

$$P(E) = u_1, h_{1,2}, u_2, h_{2,3}, \ldots, u_{2p}, h_{2p,1}, u_1$$

(kde $h_{i,i+1}$ sú hrany a u_i sú uzly grafu G, pričom hrana $h_{i,i+1}$ je incidentná s uzlami $u_i \neq u_{i+1}$) popisuje ľubovoľnú eulerovskú čiaru E grafu G. Zaraďme hrany $h_{2i-1,2i}$ do triedy H_1, ostatné hrany grafu do triedy H_2. Ak ľubovoľný uzol u grafu G je $2r$-tého stupňa, potom existuje práve r indexov $i_1 < i_2 < \ldots < i_r (i_x \in \{1, 2, \ldots, 2p\})$ takých, že je $u_{i_x} = u$ a teda vzhľadom na to, že sme hrany v poradí, v akom sa vyskytujú v postupnosti $P(E)$, striedavo zatrieďovali do tried H_1, H_2, je uzol u incidentný práve s r hranami triedy H_1 (resp. H_2).

Z dôkazu uvedenej vety vyplýva, že každej eulerovskej čiare grafu s párnym počtom $2p > 0$ hrán možno uvedeným spôsobom priradiť práve jeden taký rozklad $R = \{H_1, H_2\}$ hrán grafu na dve triedy, že práve polovica tých hrán, s ktorými je ľubovoľný uzol incidentný, patrí do triedy H_1 (resp. H_2). Týmto priradením je definované isté zobrazenie φ množiny $\mathfrak{E}$ všetkých eulerovských čiar grafu do množiny $\mathfrak{R}$ všetkých rozkladov množiny hrán grafu na dve triedy s uvedenou vlastnosťou.

[1] Pod eulerovským grafom rozumie sa graf, v ktorom všetky uzly sú párneho stupňa.

Pri skúmaní vlastností systému všetkých eulerovských čiar grafu natíska sa otázka, či každý rozklad $R \in \mathfrak{R}$ je obrazom aspoň jednej eulerovskej čiary $E \in \mathfrak{E}$ v zobrazení φ. Odpoveďou na uvedenú otázku je táto veta:

Veta 1. *Nech G je ľubovoľný (súvislý) eulerovský graf s párnym počtom $2p > 0$ hrán a nech R je ľubovoľný taký rozklad množiny hrán grafu G na dve triedy H_1, H_2, že práve polovica hrán, s ktorými je ľubovoľný uzol incidentný, patrí do H_1 (resp. H_2); potom existuje eulerovská čiara E grafu G, o ktorej platí $\varphi(E) = R$.*

Dôkaz. Nech E_i je ľubovoľná eulerovská čiara grafu G a nech $P(E_i)$ je postupnosť prvkov grafu G popisujúca eulerovskú čiaru E_i:

$$P(E_i) = u_1(i), h_{1,2}(i), u_2(i), \ldots, u_{2p}(i), h_{2p,2p+1}(i), u_{2p+1}(i) = u_1(i).$$

Označme znakom $X[P(E_i)]$ množinu všetkých tých indexov $x \in \{1, 2, \ldots, 2p\}$, o ktorých platí: hrana $h_{x-1,x}(i)$ patrí do tej istej triedy rozkladu R ako hrana $h_{x,x+1}(i)$ (kladieme $h_{0,1}(i) = h_{2p,2p+1}(i)$). Označme znakom ξ_i počet prvkov množiny $X[P(E_i)]$.

A. Tvrdím: ak $P'(E_i)$ je ľubovoľná iná postupnosť (než postupnosť $P(E_i)$) popisujúca eulerovskú čiaru E_i a číslo ξ_i' udáva počet prvkov množiny $X[P'(E_i)]$, potom platí $\xi_i' = \xi_i$.

Dôkaz tvrdenia. Iné popisy eulerovskej čiary E_i dostaneme z postupnosti $P(E_i)$, ak položíme $u_j'(i) = u_{k+j}(i)$; $h'_{j,j+1}(i) = h_{k+j,k+j+1}(i)$, pričom kladieme $u'_{2p+x}(i) = u'_x(i)$; $h'_{2p+x,2p+x+1}(i) = h'_{x,x+1}(i)$ pre $x > 0$. Ak dosadzujeme postupne $k = 1$, $k = 2, \ldots, k = 2p$ a ďalej, ak všetky členy takto vzniknutých postupností píšeme v obrátenom poradí, každá takáto zmena dá nám postupnosť, ktorá taktiež popisuje eulerovskú čiaru E_i. Počet takých dvojíc za sebou idúcich hrán, v ktorých hrany patria do tej istej triedy rozkladu R, je voči týmto zmenám zrejme invariantný, teda je $\xi_i' = \xi_i$ pre ľubovoľnú postupnosť $P'(E_i)$ popisujúcu eulerovskú čiaru E_i.

B. Tvrdím: ak pre eulerovskú čiaru E_i platí $\xi_i < 0$, potom existuje eulerovská čiara E_j taká, že je $\xi_j = \xi_i - 2$.

Dôkaz tvrdenia. Nech množina $X[P(E_i)]$ je neprázdna a nech a je najmenší index tejto množiny. Uzol $u_a(i)$ nemôže byť uzlom druhého stupňa v G, lebo hrany, s ktorými je uzol druhého stupňa incidentný, patria do rôznych tried rozkladu R. Teda uzol $u_a(i)$ vzhľadom na to, že G je eulerovský graf, je najmenej štvrtého stupňa. Existuje preto ešte aspoň jeden index $b'(b' > a + 1)$ taký, že platí $u_{b'}(i) = u_a(i)$, ba musí existovať aj taký index $b(b > a + 1)$, že jednak $u_b(i) = u_a(i)$ a okrem toho hrany $h_{a-1,a}(i), h_{a,a+1}(i)$ patria do inej triedy rozkladu R než hrany $h_{b-1,b}(i)$, $h_{b,b+1}(i)$. Dokážme to. Nech uzol $v = u_a(i)$ je $2n$-tého stupňa ($n \geqq 2$), potom podľa predpokladu je incidentný v G s n hranami triedy H_1 a s n hranami triedy H_2. Nech $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ je množina tých indexov $a_x \in \{1, 2, \ldots, 2p\}$, pre ktoré platí $u_{a_x} = v$ a nech $p_1(a)$ [resp. $p_2(a)$, resp. $p_3(a)$] je počet tých indexov $a_x \in A$, o ktorých platí: hrany $h_{a_x-1,a_x}(i)$, $h_{a_x,a_x+1}(i)$ patria obe do triedy H_1 (resp. obe patria do triedy H_2, resp. patria do rôznych tried z R). O počte q_1 (resp. q_2) hrán triedy H_1 (resp. H_2), s ktorými je incidentný uzol v, platí:

$$n = q_1 = 2p_1(a) + p_3(a);\; n = q_2 = 2p_2(a) + p_3(a);\; \text{čiže: } q_1 - q_2 = 0 = 2p_1 - 2p_2.$$

Teda ak existuje index $a \in A$ taký, že obe hrany $h_{a-1,a}(i)$, $h_{a,a+1}(i)$ patria do jednej z tried $\in R$, existuje aj index $b \in A$taký, že obe hrany $h_{b-1,b}(i)$, $h_{b,b+1}(i)$ patria do druhej z tried rozkladu R. Index a bol najmenší index $\in A$ a pretože nemôže byť $b = a + 1$ (je totiž $u_{a+1}(i) \neq u_a(i)$), je index b indexom požadovaných vlastností.

Utvorme postupnosť $P(E_j)$ podľa postupnosti $P(E_i)$ takto: poradie členov $u_1(i), h_{1,2}(i), \ldots$, až $u_a(i)$ a práve tak členov $u_b(i), h_{b,b+1}(i), \ldots$ až $u_{2p+1}(i)$ ponechajme bezo zmeny a členy $h_{a,a+1}(i), u_{a+1}(i), \ldots, u_{b-1}(i), h_{b-1,b}(i)$ zaraďme opäť medzi členov $u_a(i)$ a $u_b(i)$, ale v obrátenom poradí, t. j. nech $P(E_j) = u_1(i)$, $h_{1,2}(i), \ldots, u_a(i), h_{b-1,b}(i), (u)_{b-1}(i), \ldots, u_{a+1}(i), h_{a,a+1}(i), u_b(i), h_{b,b+1}(i), \ldots, u_{2p+1}(i)$.

Pretože $P(E_j)$ obsahuje opäť všetky hrany grafu G a o každej z hrán postupnosti $P(E_j)$ platí, že susedné členy hrany postupnosti sú dva rôzne uhly, s ktorými je hrana incidentná v grafe G, je $P(E_j)$ postupnosť popisujúca istú eulerovskú čiaru E_j grafu G. Uvážme ďalej, že dvojica hrán, ktoré sú susednými členmi člena $u_x(i)$ v postupnosti $P(E_j)$, je tá istá ako v postupnosti $P(E_i)$ pri všetkých členoch $u_x(i)$ s výnimkou členov $u_a(i)$, $u_b(i)$. Zatiaľ čo v postupnosti $P(E_i)$ obe hrany dvojice pri uzle $u_a(i)$ patrili do jednej z tried rozkladu R a obe hrany dvojice pri uzle $u_b(i)$ patrili do druhej z tried rozkladu R, v postupnosti $P(E_j)$ patria hrany takýchto dvojíc pri uzloch $u_a(i)$, $u_b(i)$ do rôznych tried rozkladu R. Teda je $\xi_j = \xi_i - 2$, čo bolo obsahom tvrdenia.

C. Tvrdím: v grafe G existuje eulerovská čiara E_k taká, že je $\xi_k = 0$.

Dôkaz tvrdenia. Podľa tvrdenia B, ak v grafe G existuje eulerovská čiara E_i, kde $\xi_i > 0$, potom existuje v G eulerovská čiara E_j, pričom $\xi_j = \xi_i - 2$. Z dôkazu tvrdenia je tiež zrejmé, že je $\xi_i \equiv 0 \pmod 2$. Ak teda platí $\xi_i = 2s$ $(s > 0)$, existuje postupnosť eulerovských čiar $E_i = E_0, E_1, \ldots E_s = E_k$ taká, že platí $\xi_s = \xi_k = 0$.

D. Tvrdím: ak o eulerovskej čiare E_k platí $\xi_k = 0$, potom je $\varphi(E_k) = R$.

Dôkaz tvrdenia. Nech postupnosť prvkov grafu G:

$$P(E_k) = u_1(k), h_{1,2}(k), u_2(k), \ldots, u_{2p+1}(k)$$

(kde hrana $h_{x,x+1}(k)$ je incidentná s uzlami $u_x(k) \neq u_{x+1}(k)$; $u_{2p+1}(k) = u_1(k)$) popisuje eulerovskú čiaru E_k. Ak hrana $h_{1,2}(k)$ je hranou triedy H_1 (resp. H_2), potom hrana $h_{2,3}(k)$ je nutne hranou triedy H_2 (resp. H_1) a hrana $h_{3,4}(k)$ je potom nutne opäť hranou triedy H_1 (resp. H_2) atď. Teda hrany $h_{2x-1,2x}(k)$ $(x = 1, 2, \ldots, p)$ sú všetky buď hranami triedy H_1, alebo sú všetky hranami triedy H_2 a ostatné hrany grafu patria do inej z tried rozkladu R. Teda je $\varphi(E_k) = R$.

Existuje preto eulerovská čiara E v grafe G, o ktorej platí $\varphi(E) = R$. Tým je dôkaz vety 1 vykonaný.

Priamym dôsledkom vety 1 je táto veta o rozkladoch súvislých pravidelných grafov $2n$-tého stupňa na dva faktory n-tého stupňa:

Veta 2. *Nech G je súvislý pravidelný graf $2n$-tého stupňa ($n > 0$), ktorý sa dá rozložiť na dva faktory n-tého stupňa ($n > 0$) a nech R je rozklad množiny hrán grafu G odpovedajúci ľubovoľnému rozkladu grafu G na dva faktory n-tého stupňa, potom existuje eulerovská čiara E taká, že je $\varphi(E) = R$.*

Dôkaz. Podľa vety 1 je veta 2 správna, ak G má párny počet hrán. Avšak rozklad pravidelného grafu $2n$-tého stupňa na dva faktory n-tého stupňa je možný iba vtedy, keď G má párny počet hrán. Teda G má párny počet hrán a podľa vety 1 existuje v G eulerovská čiara požadovaných vlastností.

Došlo 4. V. 1955.

ЛИНИИ ЭЙЛЕРА И РАЗЛОЖЕНИЕ РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА СТЕПЕНИ $2n$ НА ДВА ФАКТОРА СТЕПЕНИ n

АНТОН КОЦИГ

Выводы

В настоящей статье автор исходит из известной теоремы о связных графах Эйлера: Если связный граф Эйлера G имеет четное число ребер, то множество его ребер можно разложить на два класса H_1, H_2 так, что ровно половина тех ребер, которым инцидентна любая его вершина u принадлежит H_1 (или H_2). (Под графом Эйлера понимается граф, в котором все вершины четной степени.) Разложение $R = \{H_1, H_2\}$ можно найти так, что в любой линии Эйлера E графа G по очереди относят ребра к H_1 и к H_2. Таким образом определяется известное изображение φ множества $\mathfrak{E}$ всех линий Эйлера графа G в множество $\mathfrak{R}$ всех разложений $R = \{H_1, H_2\}$ множества ребер графа G на два класса с требуемым свойством.

В статье показывается, что φ является изображением множества $\mathfrak{E}$ на множество $\mathfrak{R}$, т. е. что для каждого разложения $R \in \mathfrak{R}$ существует аргумент в множестве $\mathfrak{E}$ при изображении (функции) φ. Из этого следует специально для связных регулярных графов степени $2n$: если связный регулярный граф G степени $2n$ можно разложить на два фактора G_1, G_2 степени n, то существует такая линия Эйлера E в графе G, что ребра $\in G_1$ и $\in G_2$ чередуются в последовательности ребер линии Эйлера E.