LINEÁRNE SYSTÉMY PROJEKTÍVNYCH PRÍBUZNOSTÍ NA PRIAMKE

VÁCLAV MEDEK

Katedra deskriptívnej geometrie Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave

1. Uvažujme reálnu projektívnu priamku P_1 a na nej príbuznosti π bodov určené rovnicami

$$\varrho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad \varrho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \qquad \varrho\,(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2) \neq 0, \tag{1}$$

kde x_1, x_2, x_1', x_2' sú projektívne súradnice vzoru a obrazu v týchto príbuznostiach.

V ďalšom budeme predpokladať, že všetky čísla sú reálne.

Je zrejmé, že príbuznosť π sa nezmení, ak miesto čísel a_{ij} dosadíme do rovníc (1) čísla ka_{ij} $(k \neq 0)$. Môžeme teda priradiť každej príbuznosti π bod reálneho projektívneho trojrozmerného priestoru P_3, a to jednoznačne.

Ak predpokladáme

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0,$$

všetky príbuznosti π sú projektívnymi príbuznosťami priamky P_1.

Ak naopak

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0, \tag{2}$$

potom tieto príbuznosti budeme značiť π_0 a budeme im hovoriť singulárne projektivity priamky P_1. Z podmienky (1) vyplýva, že potom má determinant sústavy (1) hodnosť práve rovnú 1.

Označme

$$y_1 = a_{11}, \quad y_2 = a_{12}, \quad y_3 = a_{21}, \quad y_4 = a_{22}. \tag{3}$$

Potom všetky singulárne projektivity π_0 priamky P_1 sa zobrazia na body kvadriky Q o rovnici

$$y_1 y_4 - y_2 y_3 = 0.$$

Kvadrika Q je regulárna, priamková kvadrika.

Identická projektivita π_1 priamky P_1 je určená rovnicami

$$x_1' = a_{11}x_1, \quad x_2' = a_{11}x_2, \quad a_{11} \neq 0$$

a zobrazí sa teda do bodu $E\,(1, 0, 0, 1)$.

Dohovor: V ďalšom, vzhľadom na rovnice (3), nebudeme robiť rozdiel medzi bodmi priestoru P_3 a príbuznosťami π priamky P_1. Tak napríklad budeme hovoriť o súradniciach príbuznosti π a pod.

2. **Definícia 1.** *Pod zväzkom príbuzností π budeme rozumieť všetky tie príbuznosti π, ktoré sa zobrazujú na body priamky priestoru P_3. Podobne pod sieťou príbuzností π budeme rozumieť všetky tie príbuznosti π, ktoré sa zobrazia na body roviny priestoru P_3.*

Veta 1. *Všetky projektívne príbuznosti zväzku ${}^E\Sigma$, ktorý obsahuje identickú projektivitu, sú rovnakého typu (s výnimkou identickej projektivity).*

Dôkaz. Zväzok ${}^E\Sigma$ projektivít určíme neidentickou projektivitou ${}^1\pi$ o súradniciach ${}^1y_i$ a projektivitou π_1. Projektivity zväzku ${}^E\Sigma$ majú súradnice $(\lambda_1 + \lambda_2{}^1y_1, \lambda_2{}^1y_2, \lambda_2{}^1y_3, \lambda_1 + \lambda_2{}^1y_4)$, kde $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$. Typ projektivity určíme pomocou koreňov charakteristickej rovnice

$$\begin{vmatrix} \lambda - \lambda_1 - \lambda_2{}^1y_1 & \lambda_2{}^1y_2 \\ \lambda_2{}^1y_3 & \lambda - \lambda_1 - \lambda_2{}^1y_4 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Pre $\lambda_2 = 0$ dostávame identickú projektivitu. Predpokladajme, že $\lambda_2 \neq 0$ a označme

$$\lambda - \lambda_1 = \lambda'. \tag{5}$$

Potom rovnica (4) má tvar

$$\begin{vmatrix} \lambda' - \lambda_2{}^1y_1 & \lambda_2{}^1y_2 \\ \lambda_2{}^1y_4 & \lambda' - \lambda_2{}^1y_4 \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Táto rovnica môže mať alebo dva od seba rôzne korene (hyperbolická projektivita), alebo jeden koreň, pre ktorý hodnosť charakteristického determinantu bude rovná 1 (parabolická projektivita), alebo nemá žiaden koreň (eliptická projektivita). Jednotlivé možnosti dostávame podľa typu projektivity ${}^1\pi$. Z rovníc (5) a (6) potom priamo vyplýva, že všetky projektivity zväzku ${}^E\Sigma$ sú rovnakého typu.

Veta 2. *Ak neidentická projektivita π je hyperbolická (parabolická, eliptická), potom zväzok projektivít ${}^E\Sigma$, určený projektivitou π a identickou projektivitou π_1, sa zobrazí na priamku ${}^EP_1$, ktorá má s kvadrikou Q spoločné dva body (jeden, žiaden).*

Dôkaz. Súradnice priesečníka priamky ${}^EP_1$ s kvadrikou Q dostaneme riešením rovnice

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 + \lambda_2{}^1y_1 & \lambda_2{}^1y_2 \\ \lambda_2{}^1y_3 & \lambda_1 + \lambda_2{}^1y_4 \end{vmatrix} = \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2\,({}^1y_1 + {}^1y)_4 + \lambda_2^2\,({}^1y_1{}^1y_4 - {}^1y_2{}^1y_3) = 0. \tag{7}$$

Diskriminant tejto rovnice je zrejme ten istý ako diskriminant rovnice (6) a z toho už tvrdenie vety vyplýva priamo.

Veta 3. *Parabolické projektivity priamky P_1 sa zobrazujú na body kvadratickej kužeľovej plochy K tangent kvadriky Q, prechádzajúcich bodom E (s výnimkou bodu E a dotykových bodov na kvadrike Q). Hyperbolické (eliptické) projektivity sa zobrazia do vonkajších (vnútorných) bodov kužeľovej plochy K (s výnimkou bodov kvadriky Q).*

Dôkaz. Bod E neleží na kvadrike Q a kvadrika Q je regulárna, preto existuje nedegenerovaná kvadratická kužeľová plocha tangent zostrojených z bodu E ku kvadrike Q. Nech je bod H obrazom hyperbolickej projektivity ${}^H\pi$. Bod H zrejme nemôže ležať na kužeľovej ploche K (podľa vety 2). Spojnica h bodov EH nech pretína polárnu rovinu ε bodu E vzhľadom na kvadriku Q v bode H'. Polárna rovina $\varkappa'$ bodu H' vzhľadom na kvadriku Q splýva s polárnou rovinou bodu H' vzhľadom na kužeľovú plochu K. Pretože bod H je vonkajším bodom kužeľovej plochy K, je ním aj bod H'. Rovina $\varkappa'$ má teda s kužeľovou plochou K spoločné dve priamky. Priesečnica h' rovín $\varepsilon\varkappa'$ je združenou polárou k priamke h vzhľadom na kvadriku Q. Pretože priamka h' pretína kvadriku Q v dvoch bodoch, pretína ju v dvoch bodoch aj priamka h. Podobným spôsobom by sme urobili dôkaz aj pre eliptické projektivity.

Definícia 2. *Budeme rozlišovať dva druhy singulárnych projektívnych príbuzností. Singulárna projektivita I. druhu má jeden bod (singulárny bod 1. druhu), ktorému nezodpovedá žiaden bod priamky P_1, a jeden bod (singulárny bod 2. druhu), ktorý zodpovedá všetkým ostatným bodom priamky P_1 a je rôzny od predchádzajúceho bodu. Pre singulárnu projektivitu II. druhu obidva tieto body splývajú.*

Veta 4. *Singulárne projektivity I. druhu sa zobrazujú na tie body kvadriky Q, ktoré neležia súčasne aj v polárnej rovine ε bodu E vzhľadom na kvadriku Q. Singulárne projektivity II. druhu sa zobrazujú na body kužeľosečky e rezu roviny ε s kvadrikou Q.*

Dôkaz. Polárna rovina ε bodu E vzhľadom na kvadriku Q má rovnicu

$$y_1 + y_4 = 0.$$

Body, ktoré samy sebe zodpovedajú v singulárnej projektivite, dostaneme riešením rovníc

$$(a_{11} - \varrho)x_1 + a_{12}x_2 = 0, \qquad a_{21}x_1 + (a_{22} - \varrho)x_2 = 0.$$

Príslušná charakteristická rovnica je

$$\varrho^2 - (a_{11} + a_{22})\varrho + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

Pretože ide o singulárne projektivity, je absolútny člen tejto rovnice rovný nule a rovnica sa redukuje na rovnicu

$$\varrho^2 - (a_{11} + a_{22})\,\varrho = 0.$$

Jej korene sú $\varrho_1 = 0$, $\varrho_2 = a_{11} + a_{22}$. Koreň $\varrho_1 = 0$ dáva bod o súradniciach $x_1 : x_2 = -a_{12} : a_{11} = -a_{22} : a_{21}$, ktorý je singulárnym 1. druhu. Koreň ϱ_2 môže byť rôzny alebo rovný nule. Je rovný nule, ak sa singulárna projektivita zobrazí na rovinu ε. Keď $\varrho_2 \neq 0$, potom existuje bod o súradniciach $x_1 : x_2 = a_{12} : a_{22} = a_{11} : a_{21}$, ktorý je singulárnym 2. druhu. Ak $\varrho_2 = 0$, potom neexistuje na priamke P_1 žiaden bod, ktorý by sám sebe zodpovedal, a všetkým bodom priamky P_1 zodpovedá bod o súradniciach $x_1 : x_2 = -a_{12} : a_{11}$.

Z toho už tvrdenie vety ľahko vyplýva.

Pomocná veta. *Nech bod P_0 a pravá kužeľosečka k ležia v rovine P_2 a nech bod P_0 je vonkajším bodom kužeľosečky k; nech p_0 je polára bodu P_0 vzhľadom na kužeľosečku k. Nech ${}^a p$ je priamka prechádzajúca bodom P_0 taká, že pretína kužeľosečku k v dvoch od seba rôznych bodoch ${}^aP\,{}^aP'$; potom všetky body P_a, pre ktoré platí*

$$(P_aP_0{}^aP{}^aP') = \delta_1 : \delta_2, \ \textit{resp.}\ (P_aP_0{}^aP'{}^aP) = \delta_1 : \delta_2, |\delta_1| \neq |\delta_2|, \tag{8}$$

ležia na pravej kužeľosečke k_δ, ktorá je perspektívne kolineárna s kužeľosečkou k pre stred kolineácie v bode P_0 a os kolineácie v priamke p_0.

Dôkaz. Zvoľme v rovine P_2 súradnicový systém tak, že bod P_0 bude mať súradnice (0,0,1) a priesečníky PP' poláry p_0 s kužeľosečkou k budú mať súradnice (0,1, 0), (1,0,0). Nech kužeľosečka k má potom rovnicu $x_1x_2 - x_3^2 = 0$. Priamka ${}^ap$ má rovnicu

$$a_1x_1 + a_2x_2 = 0, \overline{a_1^2 + a_2^2 \neq 0}.$$

Priesečníky priamky ${}^ap$ s kužeľosečkou k majú potom súradnice $x_1 : x_2 : x_3 = \mp a_2\sqrt{-a_1} : \pm a_1\sqrt{-a_1} : a_1\sqrt{a_2}$. Nájdime na priamke ${}^ap$ bod P_a, o ktorom platí jedna z rovníc (8). Jednoduchým výpočtom zistíme, že súradnice tohto bodu sú

$$x_1 : x_2 : x_3 = \mp a_2\sqrt{-a_1}\,(\delta_2 - \delta_1) : \pm a_1\sqrt{-a_1}\,(\delta_2 - \delta_1) : a_1\sqrt{a_2}\,(\delta_1 + \delta_2).$$

Všetky takéto body vyhovujú rovnici

$$(\delta_1 + \delta_2)^2x_1x_2 - (\delta_1 - \delta_2)^2x_3^2 = 0.$$

To je zrejme rovnica kužeľosečky zväzku určeného týmito degenerovanými kužeľosečkami: 1. kužeľosečkou rozpadajúcou sa v priamky $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, 2. kužeľosečkou rozpadajúcou sa v dvojnásobne počítanú priamku $x_3 = 0$. Tieto kužeľosečky dostaneme 1. pre $\delta_1 = \delta_2$, 2. pre $\delta_1 = -\delta_2$. Kužeľosečku k dostávame pre $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 1$, resp. $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 0$. Pre každú inú neusporiadanú homogénnu dvojicu (δ_1, δ_2) dostávame teda pravú kužeľosečku k_δ. Pretože dvoma tangentami s bodmi dotyku a ďalším bodom je kužeľosečka jednoznačne určená a perspektívna kolineácia, opísaná vo vete, tiež každému bodu priraďuje jedinú kužeľosečku, obidve kužeľosečky splynú, a tým je veta dokázaná.

Veta 5. *Hyperbolické projektivity s daným charakteristickým dvojpomerom $|\delta| \neq 1$ sa zobrazujú na regulárnu priamkovú kvadriku Q_δ, perspektívne koli-*

neárnu ku kvadrike Q, pre stred kolineácie v bode E a rovinu kolineácie v rovine ε (s výnimkou kužeľosečky e). Involutórne projektivity sa zobrazujú na rovinu ε (s výnimkou kužeľosečky e).

Dôkaz. Zväzok projektivít určíme bodom E a bodom ${}^1P({}^1y_1, {}^1y_2, {}^1y_3, {}^1y_4)$, kde ${}^1y_1{}^1y_4 - {}^1y_2{}^1y_3 \neq 0$. Priesečníky spojnice $p \equiv PE$ s kvadrikou Q určíme riešením rovnice (7). Parametre λ_1, λ_2 môžeme chápať ako projektívne súradnice na priamke p a potom súradnice priesečníkov ${}^aP^aP'$ priamky p s kvadrikou Q sú

$$^{34}\lambda_1 : {}^{34}\lambda_2 = [-({}^1y_1 + {}^1y_4) \pm \sqrt{({}^1y_1 + {}^1y_4)^2 - 4({}^1y_1{}^1y_4 - {}^1y_2{}^1y_3)}] : 2.$$

Súradnice bodu P sú ${}^1\lambda_1 = 0, {}^1\lambda_2 = 1$ a bodu E sú ${}^2\lambda_1 = 1, {}^2\lambda_2 = 0$. Dvojpomer bodov PE^aP^aP' potom je

$$(PE^aP^aP') = \frac{-({}^1y_1 + {}^1y_4) + \sqrt{({}^1y_1 + {}^1y_4)^2 - 4({}^1y_1{}^1y_4 - {}^1y_2{}^1y_3)}}{-({}^1y_1 + {}^1y_4) - \sqrt{({}^1y_1 + {}^1y_4)^2 - 4({}^1y_1{}^1y_4 - {}^1y_2{}^1y_3)}}, \tag{9}$$

čo je zároveň hodnota charakteristického dvojpomeru príslušnej projektivity. Ak vymeníme body ${}^aP^aP'$, zmení sa hodnota dvojpomeru (9) na recipročnú. Ak teraz zostrojíme všetky možné rezy kvadriky Q rovinami prechádzajúcimi bodom E tak, aby tieto roviny mali s kužeľosečkou e vždy dva od seba rôzne body spoločné, vyplýva tvrdenie vety priamo z pomocnej vety.

Poznámka. Zrejme každá perspektívna kolineácia so stredom kolineácie v bode E a rovinou kolineácie v rovine ε priraďuje kvadrike Q nejakú kvadriku Q_δ.

Veta 6. *Projektivity, ktoré majú spoločné samodružné body, prislúchajú zväzku, obsahujúcemu identickú projektivitu; singulárne projektivity tohto zväzku majú tieto samodružné body za svoje singulárne body 1. a 2. druhu.*

Dôkaz. Nech ${}^1\pi$ je hyperbolická projektivita so samodružnými bodmi XY. Nech obrazom projektivity ${}^1\pi$ je bod ${}^1P$. Všetky projektivity zväzku $E{}^1P$ majú súradnice $(\lambda_1 + \lambda_2{}^1y_1, \lambda_2{}^1y_2, \lambda_2{}^1y_3, \lambda_1 + \lambda_2{}^1y_4)$. Charakteristická rovnica pre tieto projektivity má tvar

$$\varrho^2 - [2\lambda_1 + \lambda_2({}^1y_1 + {}^1y_4)]\,\varrho + \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2({}^1y_1 + {}^1y_4) + \lambda_2^2({}^1y_1{}^1y_4 - {}^1y_2{}^1y_3) = 0. \tag{10}$$

Jej korene sú

$$\varrho_{12} = \lambda_1 + \lambda_2\frac{{}^1y_1 + {}^1y_4 \pm \sqrt{({}^1y_1 + {}^1y_4)^2 - 4({}^1y_1{}^1y_4 - {}^1y_2{}^1y_3)}}{2}.$$

Z toho vidieť, že súradnice samodružných bodov vôbec nezávisia od voľby parametrov $\lambda_1\lambda_2$. Bez újmy na obecnosti môžeme za projektivitu ${}^1\pi$ voliť tú involúciu, ktorá má samodružné body XY. Potom

$$\varrho_{12} = \lambda_1 \pm \lambda_2\sqrt{{}^1y_2{}^1y_3 - {}^1y_1{}^1y_4}, \tag{11}$$

a samodružné body XY majú súradnice

$$x_1 : x_2 = -{}^1y_2 : {}^1y_1 \mp \sqrt{{}^1y_2{}^1y_3 - {}^1y_1{}^1y_4}.$$

Singulárne projektivity nášho zväzku dostaneme pre tie hodnoty parametrov $\lambda_1\lambda_2$, pre ktoré absolútny člen rovnice (10) je rovný nule. To sú hodnoty

$$\lambda_1 : \lambda_2 = \pm\sqrt{{}^1y_2{}^1y_3 - {}^1y_1{}^1y_4} : 1. \tag{12}$$

Potom, dosadením do rovnice (11), dostávame

$$\varrho_1 = \pm 2\sqrt{{}^1y_2{}^1y_3 - {}^1y_1{}^1y_4},\ \varrho_2 = 0.$$

Singulárne body 2. druhu dostaneme riešením rovnice

$$(\lambda_1 + \lambda_2 a_{11} - \lambda_1)x_1 + \lambda_2 a_{12}x_2 = 0$$

pre hodnoty parametrov λ z rovnice (12) a dostávame tie isté body XY. Podobne singulárne body 1. druhu dostávame riešením rovnice

$$(\lambda_1 + \lambda_2 a_{11})x_1 + \lambda_2 a_{12}x_2 = 0,$$

ktorá pre hodnoty parametrov λ podľa rovnice (12) tiež dáva tie isté body XY, len v opačnom poradí.

Veta 7. *Všetky singulárne projektivity, ktoré majú spoločný singulárny bod 1. druhu, zobrazia sa na priamku 1. systému priamok kvadriky Q; všetky singulárne projektivity, ktoré majú spoločný singulárny bod 2. druhu, zobrazia sa na priamku 2. systému priamok kvadriky Q.*

Dôkaz. Singulárny bod 1. druhu dostaneme riešením rovníc

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0.$$

Potom zrejme obrazy všetkých singulárnych projektivít o pevnom singulárnom bode 1. druhu so súradnicami x_1, x_2 ležia na priamke ${}^xp_1$ o rovniciach

$$y_1x_1 + y_2x_2 = 0,\ y_3x_1 + y_4x_2 = 0.$$

Pre rôzne voľby bodu (x_1, x_2) dostávame tak dva projektívne si priradené zväzky rovín, ktorých priesečnice tvoria 1. systém priamok kvadriky Q.

Singulárny bod 2. druhu dostávame riešením rovníc

$$-a_{22}x_1 + a_{12}x_2 = 0,\ a_{21}x_1 - a_{11}x_2 = 0.$$

Obrazy všetkých singulárnych projektivít s pevným singulárnym bodom 2. druhu o súradniciach x_1, x_2 ležia na priamke ${}^xp_2$ o rovniciach

$$y_4x_1 - y_2x_2 = 0,\ y_3x_1 - y_1x_2 = 0.$$

Pre rôzne voľby bodu (x_1, x_2) dostávame opäť dva projektívne si priradené zväzky rovín, ktorých priesečnice tvoria 2. systém priamok kvadriky Q.

Veta 8. *Nech p je priamka roviny ε, ktorá nie je tangentou kužeľosečky e; potom samodružné body hyperbolických involúcií zväzku, ktorý sa zobrazuje na priamku p, sú pármi involúcie, ktorá sa zobrazuje do pólu P priamky p vzhľadom na kužeľosečku e.*

Dôkaz. Samodružné body hyperbolickej involúcie sú určené kvadratickou rovnicou

$$a_{21}x_1^2 + (a_{22} - a_{11})x_1x_2 - a_{12}x_2^2 = 0.$$

Potom samodružné body zväzku involúcií (pokiaľ existujú) sú určené rovnicou

$$(\lambda_1 a_{21} + \lambda_2 b_{21})x_1^2 + (\lambda_1 a_{22} + \lambda_2 b_{22} - \lambda_1 a_{11} - \lambda_2 b_{11})x_1 x_2 - (\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 b_{12})x_2^2 = 0 \quad (13)$$

alebo

$$\lambda_1[a_{21}x_1^2 + (a_{22} - a_{11})x_1x_2 - a_{12}x_2^2] + \lambda_2[b_{21}x_1^2 + (b_{22} - b_{11})x_1x_2 - b_{12}x_2^2] = 0.$$

Rovnica (13) určuje involúciu.

Involúcie zväzku sa zobrazia na priamku p určenú bodmi $A(a_1, a_2, a_3, a_4)$, $B(b_1, b_2, b_3, b_4)$. Polárne roviny bodov AB vzhľadom na kvadriku Q sú

$$\alpha \equiv a_4y_1 - a_3y_2 - a_2y_3 + a_1y_4 = 0, \qquad \beta \equiv b_4y_1 - b_3y_2 - b_2y_3 + b_1y_4 = 0.$$

Spoločný bod P rovín $\alpha\beta\varepsilon$ je pólom priamky p vzhľadom na kužeľosečku e. Jeho súradnice sú

$$p_1 : p_2 : p_3 = (a_3b_2 - a_2b_3) : -(a_2b_4 - a_4b_2 - a_2b_1 + a_1b_2) : (-a_4b_3 + a_3b_4 + a_1b_3 - \\ -a_3b_2) : -(a_3b_2 - a_2b_3).$$

Bod P reprezentuje involúciu, ktorej samodružné body sú určené rovnicou

$$(-a_4b_3 + a_3b_4 + a_1b_3 - a_3b_1)x_1^2 + 2(a_2b_3 - a_3b_2)x_1x_2 + (a_2b_4 - a_4b_2 - a_2b_1 + \\ + a_1b_2)x_2^2 = 0. \quad (14)$$

Z podmienky pre apolaritu dvoch dvojíc bodov priamym výpočtom zistíme, že všetky dvojice určené rovnicou (13) sú apolárne k dvojici (14).

Dôsledok. Ak bod P' na priamke p reprezentuje hyperbolickú involúciu, potom spojnica EP' reprezentuje zväzok projektivít so spoločnými samodružnými bodmi. Potom samodružné body všetkých hyperbolických projektivít, ktoré sa zobrazujú na rovinu určenú bodom E a priamkou p, tvoria páry involúcie, ktorá sa zobrazuje do bodu P.

Veta 9. *Zmeňme na priamke P_1 súradnicový systém tak, že medzi starými a novými súradnicami bodov budú platiť vzťahy*

$$\varrho x_1 = b_{11}\bar{x}_1 + b_{12}\bar{x}_2, \; \varrho x_2 = b_{21}\bar{x}_1 + b_{22}\bar{x}_2, \; b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \neq 0; \quad (15)$$

každej príbuznosti π budú potom priradené v priestore P_3 dva body $P\bar{P}$, jeden pre starý a druhý pre nový súradnicový systém na priamke P_1; potom medzi bodmi P a $\bar{P}$ je regulárna kolineácia B so samodružným bodom E, pričom kvadriky Q, Q_δ a rovina ε sa transformujú samy na seba.

Dôkaz. Príbuznosť π nech je vyjadrená v starých súradniciach rovnicami (1). Zmenou súradnicového systému pomocou rovníc (15) prechodia rovnice príbuznosti na tvar

$$\left.\begin{aligned} \varrho\bar{x}_1' &= (a_{11}b_{11}b_{22} + a_{12}b_{21}b_{22} - a_{21}b_{11}b_{21} - a_{22}b_{12}b_{21})\bar{x}_1 + \\ &\quad + (a_{11}b_{12}b_{22} + a_{12}b_{22}^2 - a_{21}b_{12}^2 - a_{22}b_{12}b_{22})\,\bar{x}_2, \\ \varrho\bar{x}_2' &= (-a_{11}b_{11}b_{21} - a_{12}b_{21}^2 + a_{21}b_{11}^2 + a_{22}b_{11}b_{21})\bar{x}_1 + \\ &\quad + (-a_{11}b_{12}b_{21} - a_{12}b_{21}b_{22} + a_{21}b_{11}b_{12} + a_{22}b_{11}b_{22})\bar{x}_2. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Z rovníc (16) priamo vidieť, že bod $P\,(y_1, y_2, y_3, y_4)$ ako obraz príbuznosti π sa transformuje do bodu $\bar{P}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \bar{y}_4)$, kde

$$\varrho\bar{y}_1 = b_{11}b_{22}y_1 + b_{21}b_{22}y_2 - b_{11}b_{12}y_3 - b_{12}b_{21}y_4,$$

$$\varrho\bar{y}_2 = b_{12}b_{22}y_1 + b_{22}^2y_2 - b_{12}^2y_3 - b_{12}b_{22}y_4$$
$$\varrho\bar{y}_3 = -b_{11}b_{21}y_1 - b_{21}^2y_2 + b_{11}^2y_3 + b_{11}b_{21}y_4,$$
$$\varrho\bar{y}_4 = -b_{12}b_{21}y_1 - b_{21}b_{22}y_2 + b_{11}b_{12}y_3 + b_{11}b_{22}y_4.$$

Ide tu teda o kolineárnu transformáciu, a pretože determinant z jej koeficientov má hodnotu $(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})^4$, vyplýva z rovníc (15) regulárnosť tejto kolineácie. Označíme ju B.

Ľahko sa presvedčíme, že bod E je samodružným bodom kolineácie B. Ďalej zo vzťahu

$$\varrho(\bar{y}_1 + \bar{y}_4) = (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})(y_1 + y_4)$$

ihneď vyplýva, že rovina ε sa transformuje sama na seba. Podobne zo vzťahu

$$\varrho^2(\bar{y}_1\bar{y}_4 - \bar{y}_2\bar{y}_3) = (b_{11}^2b_{22}^2 + b_{12}^2b_{21}^2)(y_1y_4 - y_2y_3)$$

vyplýva, že kvadrika Q tiež sa transformuje sama na seba. Ľahko nahliadneme, že výraz $b_{11}^2b_{22}^2 + b_{12}^2b_{21}^2$ nie je rovný nule, ak je splnená podmienka (15).

Nech kvadrika Q_δ vznikne z kvadriky Q perspektívnou kolineáciou K_δ (o strede E a samodružnej rovine ε). Nech kolineácia K_δ priraďuje bodu P kvadriky Q bod P_δ kvadriky Q_δ. Nech kolineácia B priraďuje bodu P bod $\bar{P}$ a bodu P_δ bod $\bar{P}_\delta$. Pretože kolineácia K_δ je perspektívna, ležia body EPP_δ na priamke p, a preto aj body $\bar{E} \equiv E\bar{P}\bar{P}_\delta$ musia ležať na zodpovedajúcej priamke $\bar{p}$. Bod $\bar{P}$ musí ležať na kvadrike Q, pretože tá kolineáciou B prechádza sama v seba. Kolineácia B indukuje na priamkach $p\bar{p}$ projektívnu príbuznosť, ktorá je perspektivitou, lebo ich priesečník E sám sebe zodpovedá. Stred tejto perspektivity musí ležať v rovine ε, lebo táto rovina sa tiež transformuje sama na seba, a teda jej priesečník s priamkou p zodpovedá jej priesečníku s priamkou $\bar{p}$. Bod $\bar{P}_\delta$ dostaneme teda takto: Nájdeme priesečník O spojnice $P\bar{P}$ s rovinou ε a potom spojnica OP_δ vytne už na priamke $\bar{p}$ hľadaný bod $\bar{P}_\delta$. Touto konštrukciou sme však vlastne zostrojili v kolineácii K_δ bod zodpovedajúci bodu $\bar{P}$, a teda bod $\bar{P}_\delta$ podľa vety 5 leží tiež na kvadrike Q_δ. Ak bod P splynie s bodom $\bar{P}$, potom zrejme aj bod P_δ splynie s bodom $\bar{P}_\delta$. Tým je veta dokázaná.

3. Na podklade predchádzajúcich viet môžeme urobiť klasifikáciu zväzkov a sietí príbuzností π.

Celkove sú štyri hlavné druhy zväzkov: I. druh sa zobrazuje na priamky prechádzajúce bodom E, II. druh sa zobrazuje na priamky kvadrík Q_δ alebo na priamky roviny ε, III. druh sa zobrazuje na priamky kvadriky Q a IV. druh tvoria všetky ostatné zväzky.

I. druh: Na podklade viet 2 a 3 môžeme rozdeliť zväzky I. druhu na tri skupiny:

1. Zväzok sa zobrazí na spojnicu bodu E s vonkajším bodom kužeľovej plochy K. Tento zväzok tvoria projektivity s pevnými dvoma, od seba rôznymi, samodružnými bodmi XY, ďalej dve singulárne projektivity 1. druhu, ktoré

majú body XY za singulárne body 1., resp. 2. druhu, a identická projektivita.

2. Zväzok sa zobrazí na priamku kužeľovej plochy K. Tento zväzok tvoria projektivity s jedným pevným samodružným bodom X, singulárna projektivita 2. druhu so singulárnym bodom v bode X, a identická projektivita.

3. Zväzok sa zobrazí na spojnicu bodu E s vnútorným bodom kužeľovej plochy K. Tento zväzok tvoria, okrem identickej projektivity, eliptické projektivity charakterizované jedinou eliptickou involúciou obsiahnutou vo zväzku.

II. druh:

1. Zväzok sa zobrazí na priamku kvadriky Q_δ. Tvoria ho projektivity s jedným pevným samodružným bodom a danou hodnotou charakteristického dvojpomeru; okrem toho obsahuje tento zväzok vždy jednu singulárnu projektivitu 2. druhu, ktorá sa zobrazí do priesečníka uvažovanej priamky s rovinou ε.

2. Zväzok sa zobrazí na priamku p roviny ε. Zväzok potom obsahuje výlučne involutórne projektivity a prípadne singulárne projektivity 2. druhu. Podľa polohy tejto priamky vzhľadom na kužeľosečku e môžu nastať tri prípady:

a) priamka p má s kužeľosečkou e spoločné dva, od seba rôzne, body. Pretože vnútorné (vonkajšie) body kužeľosečky e sú zároveň vnútornými (vonkajšími) bodmi kužeľovej plochy K, obsahuje tento zväzok, okrem dvoch singulárnych projektivít 2. druhu, eliptické a hyperbolické involúcie. Samodružné body hyperbolických involúcií tohto zväzku tvoria involúciu, ktorá sa zobrazuje do pólu priamky p vzhľadom na kužeľosečku e;

b) priamka p má s kužeľosečkou e spoločný práve jeden bod. Zväzok obsahuje jednu singulárnu projektivitu 2. druhu a hyperbolické involúcie s jedným pevným samodružným bodom;

c) priamka p nemá s kužeľosečkou e spoločný žiaden bod. Zväzok obsahuje len hyperbolické involúcie. Samodružné body týchto involúcií tvoria opäť involúciu, ktorá sa zobrazuje do pólu priamky p vzhľadom na kužeľosečku e.

III. druh:

1. Zväzok sa zobrazí na priamku 1. systému priamok kvadriky Q. Zväzok obsahuje, okrem jednej singulárnej projektivity 2. druhu, singulárne projektivity 1. druhu s pevným singulárnym bodom 1. druhu.

2. Zväzok sa zobrazí na priamku 2. systému priamok kvadriky Q. Zväzok obsahuje, okrem jednej singulárnej projektivity 2. druhu, singulárne projektivity 1. druhu s pevným singulárnym bodom 2. druhu.

IV. druh:

1. Zväzok sa zobrazí na priamku, ktorá má s kužeľovou plochou K dva body spoločné. Zväzok obsahuje hyperbolické, eliptické a dve parabolické projektivity (tieto môžu byť nahradené singulárnymi projektivitami — typy a), b), c)). Samodružné body hyperbolických projektivít zväzku tvoria hyperbolickú involúciu, ktorá sa zobrazí do pólu roviny určenej uvažovanou priamkou a bodom E.

2. Zväzok sa zobrazí na priamku, ktorá sa dotýka kužeľovej plochy K. Zväzok tvoria hyperbolické projektivity a jedna parabolická. Typ a) obsahuje miesto parabolickej projektivity singulárnu projektivitu 2. druhu a typ b) obsahuje dve singulárne projektivity 1. druhu, ktorých singulárny bod 1., resp. 2. druhu, splýva so samodružným bodom parabolickej projektivity.

3. Zväzok sa zobrazí na priamku, ktorá nemá s kužeľovou plochou K žiaden bod spoločný. Zväzok obsahuje okrem prípadných singulárnych projektivít 1. druhu (typy a), b), c)) samé hyperbolické projektivity. Samodružné body týchto projektivít tvoria eliptickú involúciu, ktorá sa zobrazí do pólu roviny určenej uvažovanou priamkou a bodom E.

Celkove je teda 17 projektívne rozličných druhov zväzkov príbuzností π.

Pomocou predchádzajúcich viet môžeme taktiež klasifikovať siete príbuzností π. Existujú tri hlavné druhy sietí: 1. druh sietí sa zobrazuje na rovinu, ktorá prechádza bodom E, II. druh tvorí rovina ε a III. druh sú všetky ostatné siete.

I. druh:

1. Sieť sa zobrazí na takú rovinu bodom E, ktorá, okrem bodu E, nemá s kužeľovou plochou K žiaden bod spoločný. Táto sieť obsahuje, okrem identickej projektivity a singulárnych projektivít 1. druhu, len hyperbolické projektivity; ich samodružné body tvoria eliptickú involúciu, ktorá sa zobrazí do pólu uvažovanej roviny vzhľadom na kvadriku Q.

2. Sieť sa zobrazí na tangenciálnu rovinu kužeľovej plochy K. Tvoria ju, okrem zväzku druhu I 2 a dvoch zväzkov singulárnych projektivít 1. druhu, hyperbolické projektivity s jedným pevným samodružným bodom.

3. Sieť sa zobrazí na takú rovinu bodom E, ktorá pretína kužeľovú plochu K vo dvoch, od seba rôznych, priamkach. Sieť obsahuje dva zväzky druhu I 2, singulárne projektivity 1. druhu, 2 singulárne projektivity 2. druhu, eliptické projektivity a hyperbolické projektivity. Samodružné body hyperbolických projektivít tvoria eliptickú involúciu, ktorá sa zobrazí do pólu uvažovanej roviny vzhľadom na kvadriku Q.

II. druh tvoria všetky involutórne projektivity a všetky singulárne projektivity 2. druhu.

III. druh:

1. Sieť sa zobrazí na rovinu α, ktorá pretína kužeľosečku e v dvoch, od seba rôznych, bodoch. Potom existuje taká kvadrika Q_δ, ktorá sa dotýka roviny α. Sieť obsahuje všetky typy príbuzností π (s výnimkou identity). Obsahuje aj dva zväzky druhu II 1.

2. Sieť sa zobrazí na rovinu α, ktorá má s kužeľosečkou e spoločný práve jeden bod. Sieť obsahuje, okrem identity a eliptickej involúcie, všetky druhy príbuzností π, ale neobsahuje žiaden zväzok druhu II 1.

3. Sieť sa zobrazí na rovinu α, ktorá nemá s kužeľosečkou e spoločný žiaden

bod. Sieť neobsahuje identitu, singulárne projektivity 2. druhu, eliptické involúcie a taktiež neobsahuje žiaden zväzok typu II 1.

Došlo 20. VI. 1955.

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРЯМОЙ ЛИНИИ

В. МЕДЕК

Выводы

В статье автор занимается линейными системамы преобразований вида (1) проективной прямой линии P_1. Преобразования (1) отображает на проективное пространство P_3; сингулярные преобразования отображаются на регулярную линейчатую поверхность второго порядка Q. Замена проективных координат на P_1. Определяет коллинеацию B пространства P_3, которая преобразует поверхность Q саму в себя. Коллинеация В позволяет классифицировать пучки и сетьи преобразований (1). Существует 17 проективно отдельных пучков и 7 проективно отдельных сетей преобразований (1).