POZNÁMKY
K U-AXIÓME V TOPOLOGICKÝCH GRUPÁCH

LADISLAV MIŠÍK
Katedra matematiky Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave

K 75. narodeninám akademika Jura Hronca

Množinu L nazývame priestorom s konvergenciou, ak pre každú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvkov z L je definované, či má limitu, t. j. je jej priradený nejaký prvok z L, a či nemá limitu, t. j. nie je jej priradený žiadny prvok z L. V takomto priestore postupnosti, ktoré majú limitu, nazývame konvergentnými, postupnosti, ktoré nemajú limitu, divergentnými. Limitu konvergentnej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. To, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná a má za limitu prvok a, označujeme tiež $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \to a$. Priestor L s konvergenciou nazývame $\mathfrak{L}^*$-priestorom ([1], str 83—84), ak platí:

i) každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde pre $n = 1, 2, 3, \dots$ je $a_n = a$ a $a \in L$, je konvergentná a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$;

ii) pre každú rastúcu postupnosť $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ prirodzených čísel a pre každú konvergentnú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pričom $a_n \in L$, je postupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, tzv. vybraná postupnosť z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, konvergentná a $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

iii) pre každú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in L$, ktorá nemá za limitu prvok a, existuje rastúca postupnosť $\{i_n\}_{n=1}^{\infty}$ prirodzených čísel, že pre žiadnu rastúcu postupnosť $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ prirodzených čísel postupnosť $\{a_{i_{k_n}}\}_{n=1}^{\infty}$ nemá za limitu prvok a.

$\mathfrak{L}^*$-priestor L nazývame topologickou $\mathfrak{L}$-grupou ([2]), ak každej dvojici prvkov $x, y \in L$ je tak priradený jeden a len jeden prvok $z \in L$, ktorý nazývame súčtom prvkov x a y a označujeme $z = x + y$, že sú splnené nasledovné podmienky:

1) pre každé prvky $x, y, z \in L$ platí $(x + y) + z = x + (y + z)$;

2) v L existuje taký prvok, ktorý označíme 0, že pre každý prvok $x \in L$ platí $x + 0 = 0 + x = x$;

3) pre každý prvok $x \in L$ existuje v L taký prvok, ktorý označíme $-x$, že $x + (-x) = -x + x = 0$;

4) ak postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in L$ a $y_n \in L$, sú konvergentné, potom

aj postupnosti[1] $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{x_n - y_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú konvergentné a platí $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Topologická $\mathfrak{L}$-grupa nazýva sa komutatívnou, ak pre každé dva prvky $x, y \in L$ platí $x + y = y + x$.

Nech $A \subset L$, kde L je $\mathfrak{L}^*$-priestor, potom $\bar{A}$ je množina prvkov $a \in L$, pre ktoré existuje aspoň jedna konvergentná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in A$, ktorá má za limitu prvok a. Ak pre každú množinu $A \subset L$ platí $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$, hovoríme, že $\mathfrak{L}^*$-priestor L splňuje tretiu Kuratowského axiómu alebo U-axiómu. Množina $H \subset L$ volá sa hustou v L, ak $\bar{H} = L$. Ak $B \subset L$, kde L je $\mathfrak{L}^*$-priestor, potom B splňuje U-axiómu, ak pre $A \subset B$ platí $\bar{A} \cap B = \overline{\bar{A} \cap B} \cap B$ a B nesplňuje U-axiómu, ak existuje aspoň jedno $A \subset B$, že platí $\bar{A} \cap B \neq \overline{\bar{A} \cap B} \cap B$.

Nech $\delta(x, y)$ je reálna funkcia definovaná pre každé $x, y \in L$ a nech má vlastnosti:

I. pre $x, y \in L$ je $\delta(x, y) \geqq 0$ a $\delta(x, y) = 0$ vtedy a len vtedy, keď $x = y$;

II. pre $x, y \in L$ je $\delta(x, y) = \delta(y, x)$;

III. pre $x, y, z \in L$ je $\delta(x, z) \leqq \delta(x, y) + \delta(y, z)$, potom funkcia $\delta(x, y)$ nazýva sa metrikou pre L. Ak $H \subset L$ a $\delta(x, y)$ je metrika pre L, potom H je hustá pri $\delta(x, y)$, ak ku každému $\varepsilon > 0$ a každému $a \in L$ existuje $b \in H$, že $\delta(a, b) < \varepsilon$. Hovoríme, že topologická $\mathfrak{L}$-grupa L má vlastnosť (d) pri metrike $\delta(x, y)$ pre L, ak platí: ak $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in L$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \to x$, $y_n \in L$ a $\{\delta(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty} \to 0$, potom postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná a má za limitu x ([3], str. 234).

Je zrejmé, že v každom $\mathfrak{L}^*$-priestore splňujúcom U-axiómu, každá jeho podmnožina splňuje U-axiómu. Ak $\mathfrak{L}^*$-priestor L nesplňuje U-axiómu, potom zrejme existujú aj také podmnožiny, ktoré splňujú U-axiómu. Ak L je komutatívna topologická $\mathfrak{L}$-grupa nesplňujúca U-axiómu, potom každá množina $H \subset L$, ktorá je tiež grupou vzhľadom na operáciu súčtu definovanú v L a ku ktorej existuje taká metrika $\delta(x, y)$ pre L, že L má pri nej vlastnosť (d) a H je pri nej hustá v L, nesplňuje U-axiómu (veta z [3], str. 234). V tejto práci sú uvedené najprv dve vety súvisiace s U-axiómou v komutatívnych topologických $\mathfrak{L}$-grupách a potom je udaný príklad takej komutatívnej topologickej $\mathfrak{L}$-grupy *nesplňujúcej U-axiómu, u ktorej existuje taká hustá podmnožina, ktorá je súčasne podgrupou a splňuje U-axiómu.*

V $\mathfrak{L}^*$-priestore L dvojnou postupnosťou nazývame funkciu definovanú pre všetky dvojice (n, k) prirodzených čísel, pričom každej takej dvojici priradený prvok je z množiny L. Ak ten prvok označíme $a_{n,k}$, potom tú dvojnú postupnosť označíme nasledovne $\{a_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$. Každú postupnosť $\{a_{n_i,k_i}\}_{i=1}^{\infty}$, kde $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ a $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ sú rastúce postupnosti prirodzených čísel, nazývame diagonálnou postupnosťou utvorenou z dvojnej postupnosti $\{a_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$. Bod $a \in L$ nazývame bodom s vlastnosťou ϱ([4], str. 3), ak existuje taká dvojná postupnosť $\{a_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$,

[1] $x + (-y)$ budeme tiež značiť $x - y$.

$a_{n,k} \in L$, že pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ je postupnosť $\{a_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergentná a má za limitu prvok a, ale žiadna z nej utvorená diagonálna postupnosť nemá za limitu prvok a. Komutatívna topologická $\mathfrak{L}$-grupa L splňuje U-axiómu vtedy a len vtedy, keď žiaden jej bod nemá vlastnosť ϱ ([4], str. 8, veta 3).[2]

Veta 1. *Nech L je komutatívna topologická $\mathfrak{L}$-grupa nesplňujúca U-axiómu a nech H je hustá podmnožina, ktorá je súčasne podgrupou. Potom nutná a postačujúca podmienka, aby H nesplňovala U-axiómu, je nasledovná: ku každému $x \in L$ existuje taká dvojná postupnosť $\{x_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$, $x_{n,k} \in H$, že pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ je postupnosť $\{x_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergentná a má za limitu x, ale žiadna diagonálna postupnosť z nej utvorená nemá za limitu x.*

Dôkaz. Dokážeme, že podmienka je nutná. Nech H nesplňuje U-axiómu. Keďže H nesplňuje U-axiómu, existuje taká dvojná postupnosť $\{x_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$, taká postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a taký prvok $x \in H$, $x_{n,k} \in H$ a $x_n \in H$, že $\{x_{n,k}\}_{k=1}^{\infty} \to x_n$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to x$ a žiadna diagonálna postupnosť utvorená z $\{x_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$ nemá za limitu x. Ale z toho vyplýva, pretože H je podgrupa L, že existuje taká dvojná postupnosť $\{a_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$, $a_{n,k} \in H$, že pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ je $\{a_{n,k}\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ a žiadna diagonálna postupnosť utvorená z $\{x_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$ nemá za limitu 0. Nech $y \in L$, potom existuje taká postupnosť $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $y_n \in H$, že $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \to y$. Ale potom dvojná postupnosť $\{y_k + a_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$ má tieto vlastnosti: pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ je postupnosť $\{y_k + a_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergentná a má za limitu y, $y_k + a_{n,k} \in H$, a žiadna diagonálna postupnosť utvorená z $\{y_k + a_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$ nemá za limitu y.

Dokážeme, že podmienka je postačujúca. Nech $\{a_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$ je taká dvojná postupnosť, že $a_{n,k} \in H$, pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ postupnosť, $\{a_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ je konvergentná a má za limitu 0, ale žiadna diagonálna postupnosť z nej utvorená nemá za limitu 0. Ďalej je zrejmé, že ku prvku $x \in H$ musí existovať taká prostá postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvkov rôznych od x z H, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to x$. Uvažujme teraz množinu A všetkých tých prvkov $x_n + a_{n,n+k-1}$, ktoré sú rôzne od prvku x. Zrejme je $x_n \in \bar{A}$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Keby prvok x bol $\bar{A}$, potom by musela existovať taká postupnosť prvkov z A, ktorá by konvergovala k x, čiže by existovala postupnosť $\{x_{n_i} + a_{n_i,n_i+k_i-1}\}_{i=1}^{\infty}$, že $\{x_{n_i} + a_{n_i,n_i+k_i-1}\}_{i=1}^{\infty} \to x$. Množina členov postupnosti $\{n_i + k_i - 1\}_{i=1}^{\infty}$ musí byť zrejme nekonečná. Je teda možné vybrať tú postupnosť dokonca tak, aby $\{n_i + k_i - 1\}_{i=1}^{\infty}$ bola rastúca postupnosť prirodzených čísel. Z toho, že postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je prostá postupnosť prvkov rôznych od prvku x, vyplýva, že množina členov postupnosti $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ musí byť tiež nekonečná. Teda je možné tú postupnosť $\{x_{n_i} + a_{n_i,n_i+k_i-1}\}_{i=1}^{\infty}$ tak vybrať, že postupnosti $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ a $\{n_i + k_i - 1\}_{i=1}^{\infty}$ sú rastúce postupnosti prirodzených čísel a $\{x_{n_i} + a_{n_i,n_i+k_i-1}\}_{i=1}^{\infty} \to x$. Ale potom platí $\lim_{i\to\infty} a_{n_i,n_i+k_i-1} = \lim_{i\to\infty} [(x_{n_i} + a_{n_i,n_i+k_i-1}) - x_{n_i}] = \lim_{i\to\infty} (x_{n_i} + a_{n_i,n_i+k_i-1}) - \lim_{i\to\infty} x_{n_i} = 0$, čiže existuje diagonálna postupnosť konvergujúca k 0 utvorená z $\{a_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$ a to je spor. Teda $x \,\bar{\in}\, \bar{A}$.

Tým sme ale zistili, že existuje $A \subset H$ a $x \in H$, že platí $x \,\bar{\in}\, \bar{A} \cap H$ a $x \in \overline{\bar{A} \cap H} \cap H$, čiže $\bar{A} \cap H \neq \overline{\bar{A} \cap H} \cap H$ a z toho vyplýva, že H nesplňuje U-axiómu.

[2] V práci [4] je pojem diagonálnej postupnosti utvorenej z dvojnej postupnosti definovaný trocha ináč. Ale definície bodu s vlastnosťou ϱ sú ekvivalentné pri použití týchto dvoch rôznych definícií diagonálnej postupnosti.

Veta 2. *Nech L je komutatívna topologická $\mathfrak{L}$-grupa, ktorá nesplňuje U-axiómu, potom neexistuje taká metrika $\delta(x, y)$ pre L, pre ktorú by platilo: 1. ak $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k x, potom $\{\delta(x, x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k 0; 2. topologická $\mathfrak{L}$-grupa L má vlastnosť (d) pri metrike $\delta(x, y)$.*

Dôkaz. Nech L je komutatívna topologická $\mathfrak{L}$-grupa, pre ktorú existuje taká metrika $\delta(x, y)$, že 1. ak $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má za limitu prvok x, potom $\{\delta(x_n, x)\}_{n=1}^{\infty}$ má za limitu číslo 0 a 2. Topologická $\mathfrak{L}$-grupa L má pri metrike $\delta(x, y)$ vlastnosť (d). Nech $\{x_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$ je taká dvojná postupnosť, že $x_{n,k} \in L$ a pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ postupnosť $\{x_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ je konvergentná a má za limitu x. Potom dvojná postupnosť $\{\delta(x_{n,k}, x)\}_{n,k=1}^{\infty}$ reálnych čísel je taká, že pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ je $\lim_{k\to\infty} \delta(x_{n,k}, x) = 0$. Ale množina reálnych čísel pri obvyklej konvergencii splňuje U-axiómu, čiže číslo 0 nemôže byť bodom s vlastnosťou ϱ. Musí teda existovať taká diagonálna postupnosť $\{\delta(x_{n_i,k_i}, x)\}_{i=1}^{\infty}$, že konverguje k 0. Z toho, že postupnosť $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ je $y_n = x$, je konvergentná a má za limitu x, a z predchádzajúceho vyplýva na základe vlastnosti (d) topologickej $\mathfrak{L}$-grupy L pri metrike $\delta(x, y)$, že postupnosť $\{x_{n_i,k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ je konvergentná a má za limitu x. Z tejto úvahy je zrejmé, že v komutatívnej topologickej $\mathfrak{L}$-grupe L neexistujú body s vlastnosťou ϱ a teda podľa už citovanej vety 3. z práce [4] komutatívna topologická $\mathfrak{L}$-grupa L splňuje U-axiómu. Tým je veta 2. dokázaná.

Nech R je teleso racionálnych čísel, nech $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sú nejaké reálne čísla, potom nech $R(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ je najmenšie teleso nad telesom racionálnych čísel, ktoré vznikne z neho adjunkciou čísel $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Nech $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ je taká rastúca postupnosť prirodzených čísel, že $R_n = R(2^{\frac{1}{p_1}}, \ldots, 2^{\frac{1}{p_n}}) \neq R(2^{\frac{1}{p_1}}, \ldots, 2^{\frac{1}{p_{n+1}}}) = R_{n+1}$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$.[3] Nech reálne číslo x je z množiny L_0 vtedy a len

[3] Taká postupnosť musí existovať aspoň jedna. Prídeme k nej napríklad takto: Nech $p_1 = 2$. Nech $p_1, \ldots, p_n$ sú už také prirodzené čísla, že pre $i < j \leq n$ je $p_i < p_j$ a $R_i = R\left(2^{\frac{1}{p_1}}, \ldots, 2^{\frac{1}{p_i}}\right) \neq R\left(2^{\frac{1}{p_1}}, \ldots, 2^{\frac{1}{p_j}}\right) = R_j$. V telese $R_n = R\left(2^{\frac{1}{p_1}}, \ldots, 2^{\frac{1}{p_n}}\right)$ podľa Abelovej vety ([5], veta 22., str. 174) o primitívnom elemente, musí existovať primitívny element $\delta \in R_n$, ktorého rád vzhľadom na teleso racionálnych čísel nech je r. Podľa inej Abelovej vety ([5], veta 3., str. 287) je rovnica $x^p - 2 = 0$, kde p je prvočíslo, ireducibilná nad telesom racionálnych čísel a rád čísla $2^{\frac{1}{p}}$ nad telesom racionálnych čísel je rovný p. Nech $p_{n+1} > p_n$ je také prvočíslo, ktoré je vačšie ako r, potom číslo $2^{\frac{1}{p_{n+1}}}$ nie

vtedy, keď existuje konečne mnoho racionálnych čísel $r_1, \dots, r_s$ a konečne mnoho členov $p_{i_1}, \dots, p_{i_{s-1}}$ z postupnosti $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, že platí $x = r_1 \cdot 2^{\frac{1}{p_{i_1}}} + \dots + r_{s-1} \cdot 2^{\frac{1}{p_{i_{s-1}}}} + r_s$. Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in L_0$, je konvergentná a má za limitu $x \in L_0$ vtedy a len vtedy, keď existuje také prirodzené číslo k, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\} \subset R_k$ (pričom pod znakom $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$ budeme rozumieť množinu členov tej postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$) a keď k tomu číslu x konverguje postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ aj pri obvyklej konvergencii v množine reálnych čísel.

Veta 3. *Priestor L_0 s konvergenciou, ktorú sme práve uviedli, je $\mathfrak{L}^*$-priestor a vzhľadom k súčtu reálnych čísel je komutatívnou topologickou $\mathfrak{L}$-grupou, ktorá nesplňuje U-axiómu. Množina všetkých racionálnych čísel je v L_0 hustou podmnožinou, ktorá je podgrupa a splňuje U-axiómu.*

Dôkaz. Keďže pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pri ktorej je $a_n = a$ pre $n = 1, 2, 3, \dots$ a $a \in L_0$, vždy existuje také prirodzené číslo k, že je $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n\} \subset R_k$ a keďže $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ v tomto prípade vždy konverguje v obvyklom zmysle k číslu a, konverguje uvažovaná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ v L_0 k číslu a.

Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in L_0$, konverguje v L_0 k číslu a a ak pre prirodzené číslo k je $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n\} \subset R_k$, potom pre každú rastúcu postupnosť $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ prirodzených čísel je postupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentná v L_0 k číslu a, pretože $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_{k_n}\} \subset R_k$ a $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje aj v obvyklom zmysle k číslu a.

Ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nekonverguje v L_0 k číslu a, potom je buď $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n\} - R_k$ pre každé prirodzené číslo k neprázdna množina alebo postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nekonverguje k číslu a v obvyklom zmysle. V prvom prípade je zrejmé, že existujú také dve rastúce postupnosti $\{i_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ prirodzených čísel, že pre $k < k_n$ je $a_{i_n} \bar{\in} R_k$ a $a_{i_n} \in R_{k_n}$. Z definície postupnosti $\{a_{i_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je zrejmé, že pre každú rastúcu postupnosť $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ prirodzených čísel a pre každé prirodzené číslo k je množina $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_{i_{r_n}}\} - R_k$ neprázdna množina. V druhom prípade existuje taká vybraná postupnosť $\{a_{i_n}\}_{n=1}^{\infty}$, že z nej každá vybraná postupnosť nekonverguje v obvyklom zmysle k číslu a. Teda z toho vyplýva, že v oboch prípadoch existuje taká vybraná postupnosť $\{a_{i_n}\}_{n=1}^{\infty}$, ktorej každá vybraná postupnosť nekonverguje v L_0 k číslu a.

Tým sme zistili, že L_0 je $\mathfrak{L}^*$-priestor.

---

je z telesa R_n (to vyplýva napr. z [5] vety 24., str. 176). Na základe úplnej indukcie je z toho zaručená existencia aspoň jednej takej postupnosti.

Ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v L_0 k číslu a a postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v L_0 k číslu b a ak pre prirodzené číslo k_1 je $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n\} \subset R_{k_1}$ a pre prirodzené číslo k_2 je $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{b_n\} \subset R_{k_2}$, platia pre prirodzené číslo $k = \max(k_1, k_2)$ vzťahy $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n + b_n\} \subset R_k$ a $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n - b_n\} \subset R_k$. Z tohto a z vlastností obvyklej konvergencie postupností reálnych čísel vyplýva, že $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v L_0 k číslu $a + b$ a $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v L_0 k číslu $a - b$. Keďže L_0 je pri operácii súčtu komutatívnou grupou, vyplýva z tohto na základe predchádzajúcej úvahy, že L_0 je komutatívnou topologickou $\mathfrak{L}$-grupou vzhľadom k operácii súčtu.

Uvažujme dvojnú postupnosť $\left\{\frac{1}{k} \cdot 2^{\frac{1}{p_n}}\right\}_{n,k=1}^{\infty}$. U nej pre $n = 1, 2, 3, \dots$ postupnosť $\left\{\frac{1}{k} \cdot 2^{\frac{1}{p_n}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje v L_0 k číslu 0. Pre každé prirodzené číslo i a každú diagonálnu postupnosť $\left\{\frac{1}{k_s} \cdot 2^{\frac{1}{p_{n_s}}}\right\}_{s=1}^{\infty}$ utvorenú z dvojnej postupnosti $\left\{\frac{1}{k} \cdot 2^{\frac{1}{p_n}}\right\}_{n,k=1}^{\infty}$ platí, že množina $\bigcup_{s=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{k_s} \cdot 2^{\frac{1}{p_{n_s}}}\right\} - R_i$ je neprázdna množina. Z tohto vyplýva, že žiadna diagonálna postupnosť utvorená z dvojnej postupnosti $\left\{\frac{1}{k} \cdot 2^{\frac{1}{p_n}}\right\}_{n,k=1}^{\infty}$ nekonverguje v L_0 k číslu 0. Číslo 0 je teda v L_0 bodom s vlastnosťou ϱ a podľa vety 3. z [4] nesplňuje U-axiómu.

Je zrejmé z definície konvergencie v L_0, že množina všetkých racionálnych čísel je hustá v L_0 a tiež je zrejmé, že je podgrupou L_0. Zrejme tiež platí, že postupnosť racionálnych čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v L_0 k číslu $a \in L_0$ vtedy a len vtedy, keď konverguje k tomuto číslu v obvyklom zmysle. Ak dvojná postupnosť $\{a_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$ je taká, že jej členy sú len racionálne čísla a pre $n = 1, 2, 3, \dots$ postupnosť $\{a_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje v L_0 k číslu a, potom existuje aspoň jedna diagonálna postupnosť, ktorá konverguje v L_0 k číslu a (toto vyplýva z tej skutočnosti, že v množine reálnych čísel pri obvyklej konvergencii žiadne reálne číslo nie je bodom s vlastnosťou ϱ). Toto má za následok podľa vety 1., že množina racionálnych čísel splňuje U-axiómu.

LITERATÚRA

1. Kuratowski C., Topologie I, Warszawa, 1952, 3. vyd. 2. Dantzig, D. van, Zur topologischen Algebra, Math. Ann., 107 (1932). 3. Mišík, L. Ob odnom svojstve prostranstva polynomov, opredelennych na intervale < 0,1 >, Čech. mat. žurnal, t. 2 (77), 1952. 4. Novák J. — Mišík, L., O L-priestoroch spojitých funkcií, Matematicko-fyzikálny sborník SAV I, 1, 1951, 5. Čebotarev, N., Grundzüge der Galois'schen Theorie, Groningen 1950.

Došlo 17. XI. 1955.

ЗАМЕТКИ О U-АКСИОМЕ В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУППАХ

ЛАДИСЛАВ МИШИК

Выводы

Топологической $\mathfrak{L}$-группой называется такое множество L, которое является $\mathfrak{L}^*$-пространством и группой, в котором групповая операция является непрерывной функцией двух аргументов, и в котором операция строения обратного элемента является непрерывной функцией своего аргумента.

Если $A \subset L$, потом $\overline{A}$ состоит из тех элементов $a \in L$, для которых $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $a_n \in A$. Говорим, что множество $A \subset L$ выполняет U-аксиому, если для всякого множества $B \subset A$ справедливо равенство $\overline{\overline{B} \cap A} \cap A = \overline{B} \cap A$. Множество $H \cap L$ плотно в L, если $\overline{H} = L$.

Когда $\{x_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$ является двойною последовательностью, потом всякую последовательность $\{x_{n_i k_i}\}_{i=1}^{\infty}$, где $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, возрастающие последовательности натуральных чисел, называем диагональной последовательностью построенною из $\{x_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$.

Пусть $\delta(x, y)$ будет метрика определенная в топологической $\mathfrak{L}$-группе L и пусть всякая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов из L, для которой существует последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов из L сходящаяся к элементу $x \in L$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(x_n y_n) = 0$, сходится тоже к элементу x. Потом говорим, что L обладает свойством (d) при метрике $\delta(x, y)$.

В статье доказываются следующие две теоремы:

Пусть L коммутативная топологическая $\mathfrak{L}$-группа не выполняющая U-аксиому, и пусть H плотная подгруппа. Для того, чтобы H не выполняла U-аксиому, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $x \in L$ существовала такая двойная последовательность $\{x_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$ элементов из H, что для всякого n последовательность $\{x_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$ сходится к x но x не является пределом для никоторой диагональной последовательности построенной из $\{x_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$.

Пусть для топологической $\mathfrak{L}$-группы L существует метрика $\delta(x, y)$ обладающая свойствами:

1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $x_n \in L$ и $x \in L$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(x_n, x) = 0$.

2. Топологическая L-группа L обладает свойством (d) при метрике $\delta(x, y)$.

Потом L не выполняет U-аксиому.

На конец в статье дан пример топологической L-группы не выполняющей U-аксиому, в которой существует плотная подгруппа выполняющая U-аксиому.