VÝZNAM KOSTRY GRAFU PRE KONŠTRUKCIU KOMPOZIČNÝCH BÁZ ISTÝCH ČIASTOČNÝCH GRAFOV

ANTON KOTZIG, BRATISLAVA

Základné pojmy, definície a pomocné vety

K základným pojmom a definíciám z teórie grafov uvedených v mojej práci O istých rozkladoch grafu — Matematicko-fyzikálny časopis V, 3. — je potrebné pripojiť predovšetkým tieto:

Grafu G, ktorého všetky uzly sú párneho stupňa, hovorí sa *eulerovský graf*. Pod *nulovým grafom* budeme rozumieť graf, ktorý neobsahuje žiadnu hranu a žiadny uzol. Pre nulový graf prijmeme označenie N v celej práci.

Z citovanej práce podržíme aj označenie $\mathfrak{U}^{(1)} = \{\mathfrak{U}_1^{(1)}, \mathfrak{U}_2^{(1)}, \ldots, \mathfrak{U}_\alpha^{(1)}\}$ pre rozklad množiny uzlov $\mathfrak{U}$ grafu G na triedy súvisiacich uzlov. Ak graf G je súvislý, potom je zrejme $\alpha = 1$, čiže $\mathfrak{U}^{(1)} = \{\mathfrak{U}\}$. Čiastočný graf grafu G, ktorý obsahuje všetky uzly jednej z tried $\mathfrak{U}_i^{(1)}$ rozkladu $\mathfrak{U}^{(1)}$, ako aj všetky hrany tieto uzly spojujúce, nazýva sa komponentou grafu G (hovoríme, že hrana h spojuje uzly $u \neq v$, ak je h incidentná s u, v). Ak graf G je súvislý, potom sám graf G je jedinou komponentou grafu G.

Dôležitým čiastočným grafom grafu G je taký čiastočný graf G', ktorý má túto vlastnosť: každá kružnica grafu G obsahuje párny počet hrán grafu G'.

Množinu všetkých čiastočných grafov grafu G, ktoré majú uvedenú vlastnosť, budeme označovať znakom $\mathfrak{P}_G$.

Je známa táto veta[1]:

Lemma 1. *Ak $G' \in \mathfrak{P}_G$, $G' \neq N$, potom uzly súvislého grafu G dajú sa jediným spôsobom rozdeliť do dvoch tried tak, že uzly, s ktorými je incidentná ľubovoľná hrana h grafu G, patria do dvoch rôznych tried práve vtedy, ak h je hranou grafu G'. Takýto rozklad je možný len vtedy, keď $G' \in \mathfrak{P}_G$.*

Ináč povedané: ak zrušíme všetky hrany grafu $G' \in \mathfrak{P}_G$, $G' \neq N$, vznikne zo súvislého grafu G istý graf $\overline{G}$, v ktorom pre rozklad $\overline{\mathfrak{U}}^{(1)} = \{\overline{\mathfrak{U}}_1^{(1)}, \overline{\mathfrak{U}}_2^{(1)}, \ldots, \overline{\mathfrak{U}}_\alpha^{(1)}\}$ platí: $\alpha > 1$, pričom triedy $\overline{\mathfrak{U}}_1^{(1)}, \overline{\mathfrak{U}}_2^{(1)}, \ldots, \overline{\mathfrak{U}}_\alpha^{(1)}$ možno rozdeliť do dvoch systémov S_1, S_2 tak, že hrany grafu G' a len tieto hrany sú incidentné s uzlami patriacimi do dvoch tried, z ktorých jedna je triedou systému S_1, druhá je triedou systému S_2.

Definujeme si isté špeciálne čiastočné grafy takto: čiastočný graf G' súvislého grafu G budeme nazývať rezom grafu G, ak $G' \neq N$ má tieto dve vlastnosti:

(α) Ak zrušíme v grafe G všetky hrany grafu G', vznikne taký graf $\overline{G}$, v ktorom rozklad $\overline{\mathfrak{U}}^{(1)}$ má práve dve triedy.

(β) Ak zrušíme v grafe G všetky hrany grafu G' s výnimkou ľubovoľnej jednej jeho hrany, vznikne z grafu G graf súvislý.

Dokážeme si túto pomocnú vetu:

Lemma 2. *Každý rez G' grafu G je prvkom množiny $\mathfrak{P}_G$.*

Dôkaz. Keď zrušíme všetky hrany rezu G' vznikne z G podľa predpokladu graf $\overline{G}$, v ktorom $\overline{\mathfrak{U}}^{(1)} = \{\overline{\mathfrak{U}}_1^{(1)}, \overline{\mathfrak{U}}_2^{(2)}\}$. Je to zrejmé, že každá hrana rezu je incidentná v G s jedným uzlom $\in \mathfrak{U}_1^{(1)}$ a s jedným uzlom $\in \mathfrak{U}_2^{(1)}$. Ktorákoľvek iná hrana je incidentná s uzlami tej istej triedy. Preto podľa lemmy 1 je $G' \in \mathfrak{P}_G$.

Čiastočnému grafu G' súvislého grafu G, ktorý pozostáva zo všetkých hrán incidentných s ľubovoľným pevne zvoleným uzlom u a z uzlov, s ktorými sú tieto hrany incidentné, hovorí sa krík s centrom v uzle u. Platí:

Lemma 3. *Krík s centrom v ľubovoľnom uzle u grafu G je prvkom množiny $\mathfrak{P}_G$.*

Dôkaz. Každá kružnica v G, ktorá obsahuje hranu incidentnú s uzlom u, obsahuje práve ešte jednu hranu incidentnú s uzlom u. Teda každá kružnica v G obsahuje párny počet hrán kríku s centrom v uzle u. Čiže krík s centrom v uzle u je $\in \mathfrak{P}_G$.

O uzle u grafu G hovoríme, že je artikuláciou grafu G, ak existujú v grafe G také dve hrany, ktoré sa nevyskytujú súčasne v žiadnej kružnici grafu G a obe sú incidentné s uzlom u. Ako je známe, artikuláciu grafu možno definovať aj takto: uzol u je artikuláciou v G, ak existujú v G také dva uzly $v_1 \neq u \neq v_2$, že každá cesta z v_1 do v_2 prechádza cez u.[2]

Lemma 4. *Krík s centrom v uzle u je rezom grafu G, ak u nie je artikuláciou grafu G. Krík s centrom v artikulácii nie je rezom.*

Dôkaz. I. Nech u je artikulácia grafu G a nech h_1, h_2 sú také dve hrany incidentné s uzlom u, ktoré sa nevyskytujú spolu v žiadnej kružnici grafu G. Nech ďalej u_1, resp. u_2 je ten uzol grafu G, ktorý je rôzny od u a ktorý je incidentný s hranou h_1, resp. h_2.

Ak zrušíme všetky hrany grafu G incidentné s uzlom u, vznikne z G graf $\overline{G}$, v ktorom u nesúvisí so žiadnym iným uzlom grafu. Po prvé: je zrejme $u_1 \neq u_2$ (ináč by totiž u_1, h_1, u, h_2, u_1 bola kružnica v G obsahujúca obe hrany h_1, h_2, čo je proti predpokladu); po druhé: niet takej cesty v G, ktorá by spojovala uzly u_1, u_2 a neobsahovala by uzol u (ináč by táto cesta spolu s cestou u_1, h_1,

[1] Pozri König *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Leipzig 1936, 150. König používa pre graf $\in \mathfrak{P}_G$ názov p — Teilgraph, str. 149.

[2] Pozri König, c. d. str. 224.

u, h_2, u_2 tvorila kružnicu obsahujúcu aj h_1 aj h_2). Teda, ak zrušíme všetky hrany grafu G, ktoré sú incidentné s uzlom u, vznikne tak graf $\overline{G}$, v ktorom uzol u nesúvisí so žiadnym iným uzlom grafu $\overline{G}$ a v ktorom uzly u_1, u_2 nesúvisia. Preto rozklad $\overline{\mathfrak{U}}^{(1)}$ obsahuje najmenej tri triedy uzlov, a teda krík s centrom v u nie je rezom.

II. Nech u nie je artikuláciou grafu G a nech $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sú tie hrany, s ktorými je uzol u incidentný v grafe G. Nech u_i je ten uzol grafu G rôzny od u, ktorý je incidentný s hranou h_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Ak zrušíme všetky hrany kríku s centrom v u vznikne graf $\overline{G}$, v ktorom uzol u nesúvisí so žiadnym iným uzlom grafu $\overline{G}$ a všetky ostatné uzly spolu súvisia. Preto o rozklade $\overline{\mathfrak{U}}^{(1)} = \{\overline{\mathfrak{U}}_1^{(1)}, \overline{\mathfrak{U}}_2^{(1)}\}$ platí: buď $\overline{\mathfrak{U}}_1^{(1)}$ obsahuje jediný uzol u, alebo obsahuje všetky ostatné uzly a $\overline{\mathfrak{U}}_2^{(1)}$ obsahuje všetky tie uzly grafu, ktoré chýbajú v $\overline{\mathfrak{U}}_1^{(1)}$. Je preto zrejmé, že ak u nie je artikuláciou, vtedy krík s centrom v uzle u je rezom grafu G.

Kompozície a kompozičné bázy

Významnú úlohu pri skúmaní grafov má isté komutatívne a asociatívne spojovanie grafov nazývané *kompozíciou*. Pripomeňme si definíciu kompozície grafov:

Nech $\{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$ je ľubovoľná konečná množina čiastočných grafov istého grafu G. Ako kompozíciu $G_0 = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ týchto grafov definujeme čiastočný graf G_0 grafu G, ktorý pozostáva práve z tých hrán, ktoré sa vyskytujú v nepárnom počte komponovaných grafov a z tých uzlov, s ktorými sú tieto hrany incidentné.

Čiastočné grafy istého systému čiastočných grafov S sa nazývajú vzhľadom ku kompozícii *vzájomne nezávislé*, ak žiadny graf systému S nedá sa komponovať z istých ostatných grafov systému. Čiastočný systém $S^* \subset S$ sa nazýva *kompozičnou bázou* pre systém S, ak grafy z S^* sú vzhľadom na kompozíciu vzájomne nezávislé a každý graf systému S je kompozíciou istých grafov z S^*.

Známa je táto veta o kompozičných bázach pre systém všetkých kríkov.[3]

Lemma 5. *Ak v každej komponente grafu vyznačíme práve jeden uzol, potom kríky, ktorých centrá nie sú vyznačené, tvoria kompozičnú bázu systému všetkých kríkov grafu a každú takúto kompozičnú bázu dostaneme touto cestou.*

Je známa ďalej:

Lemma 6. *Každý čiastočný graf G' konečného grafu G sa dá komponovať*

[3] Pozri napr. König, c. d. str. 153, veta 16 — komponentu grafu nazýva König „zusammenhängender Bestandteil".

z kríkov práve vtedy, keď G' je prvkom množiny $\mathfrak{P}_G$. Kompozícia prvkov množiny $\mathfrak{P}_G$ je prvok množiny $\mathfrak{P}_G$.[4]

Práve citované vety zachovávajú svoju platnosť, keď namiesto o grafoch množiny $\mathfrak{P}_G$ budeme hovoriť o eulerovských grafoch a slovo krík, keď súčasne nahradíme slovom kružnica. Tak naposledy uvedeným vetám odpovedajú tieto vety o eulerovských grafoch a kružniciach:

Lemma 7. *Každý čiastočný graf G' grafu G dá sa komponovať z kružníc grafu G práve vtedy, keď G' je eulerovský graf. Kompozíciou eulerovských grafov je eulerovský graf.*[5]

Uvedené príklady istej analógie: Eulerove grafy — grafy množiny $\mathfrak{P}_G$; kružnica — krík, isteže nie sú vyčerpávajúce; na druhej strane treba vidieť, že nejde o úplnú analógiu. Na niektoré stránky tejto problematiky chceme poukázať v nasledujúcej časti nášho príspevku.

Kostry grafu a kompozičné bázy

Pri skúmaní budeme vychádzať zo známych viet o kostre grafu a tzv. fundamentálnom systéme kružníc.

Čiastočný graf S ľubovoľného súvislého grafu G sa nazýva *kostrou* grafu G, ak má tieto tri vlastnosti: 1. S je súvislý graf, 2. S má tie isté uzly ako G, 3. S neobsahuje žiadnu kružnicu.

Lemma 8. *Ak S je kostra grafu G a h ľubovoľná hrana z G, ktorá nepatrí do S, potom existuje práve jedna kružnica K_h v G, ktorá obsahuje hranu h a všetky ostatné jej hrany patria do S.*

Kružnice priradené takto jednotlivým hranám nepatriacim do kostry tvoria tzv. *fundamentálny systém kružníc F_s*. Každej kostre grafu odpovedá práve jeden fundamentálny systém.

Lemma 9.[6] *Každý fundamentálny systém kružníc grafu je kompozičnou bázou pre systém všetkých kružníc grafu.*

Ukážeme v ďalšom, že môžu existovať kompozičné bázy kružníc grafu G, ktoré nie sú fundamentálnym systémom kružníc žiadnej kostry grafu G, ako aj také kompozičné bázy kružníc, ktoré sú fundamentálnym systémom kružníc viacerých kostier. O tom hovorí táto veta:

Veta 1. *Nech $C = \{K_1, K_2, \ldots, K_n\}$ je systém kružníc tvoriaci kompozičnú bázu kružníc pre všetky kružnice istého konečného súvislého grafu G. Nech M_i je množina tých hrán kružnice K_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, ktoré sa nevyskytujú už v žiadnej inej kružnici systému C, μ_i počet hrán množiny M_i. Platí:*

[4] König, c. d. str. 149.

[5] Pozri König, c. d. str. 145, 146.

[6] König, c. d. str. 147.

a) Ak niektorá z množín M_i je prázdna, potom neexistuje v G kostra, ktorej fundamentálnym systémom kružníc by bol systém C.

b) Nech $M_i \neq 0$ pre všetky i. Vyberme z každej z množín M_i po jednej hrane (vybranú hranu z M_i označme h_i). Množina všetkých hrán grafu, ktoré neboli vybrané (t. j. hrany grafu, ktoré nepatria do množiny $M_0 = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$), je množinou hrán kostry S, ktorej fundamentálnym systémom kružníc je systém C.

c) O počte $\varkappa(C)$ rôznych kostier, ktorých fundamentálnym systémom kružníc je systém C, platí: $\varkappa(C) = \mu_1\mu_2 \ldots \mu_n$.

d) Ak $\varkappa(C) > 1$, potom v G existuje aspoň jedna množina hrán T_ε najmenej o dvoch prvkoch taká, že platí: každá kružnica grafu, ktorá obsahuje hranu z T_ε obsahuje všetky hrany z T_ε; t. j. ináč povedané: ak $\varkappa(C) > 1$, potom množina $H(2,3)$ v grafe G je neprázdna.[7]

Dôkaz:

a) Predpokladajme, že tvrdenie nemá všeobecnú platnosť, t. j., že pre isté $i = 1, 2, \ldots, n$ je $M_i = 0$ a pritom existuje kostra S, ktorej fundamentálnym systémom kružníc je systém C. Podľa definície fundamentálneho systému kruž- níc kostra S obsahuje všetky hrany kružnice K_i okrem jednej — označme ju znakom h. Podľa predpokladu h je hranou ešte aspoň jednej kružnice K_j sy- stému C. Pretože h nie je hranou kostry S, musia všetky ostatné hrany kružnice K_j (okrem h) byť hranami kostry S. Graf, ktorý obsahuje všetky hrany dvoch rôznych kružníc okrem jednej ich spoločnej hrany, obsahuje nutne kružnicu.[8] To je však spor, lebo kostra grafu nemôže obsahovať kružnicu. Preto ak $M_i = 0$, neexistuje kostra, ktorej fundamentálnym systémom kružníc je systém C.

b) Aby sme dokázali správnosť druhého tvrdenia vety, je potrebné dokázať, že čiastočný graf G', ktorý obsahuje všetky hrany grafu G s výnimkou hrán $h_1, h_2, \ldots, h_n$, má tieto dve vlastnosti:[9]

α) G' neobsahuje žiadnu kružnicu,

β) ak pridáme ku grafu G' ľubovoľnú hranu z hrán $h_1, h_2, \ldots, h_n$, vznikne tak graf G'', ktorý obsahuje kružnicu.

Vlastnosť *β)* graf G' zrejme má, lebo ak ku G' pridáme hranu h_i, vzniknutý graf obsahuje všetky hrany kružnice K_i. Ukážme teraz, že má aj vlastnosť *α)*: pretože ľubovoľná kružnica K grafu G je kompozíciou istých kružníc systému C (C je podľa predpokladu kompozičnou bázou pre kružnice grafu G) a každá z hrán h_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sa vyskytuje práve v jednej kružnici systému C, musí K obsahovať aspoň jednu hranu z hrán $h_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. Nemôže preto K byť čiastočným grafom grafu G'. Čiže: žiadna kružnica grafu G nie je čiastoč- ným grafom grafu G', teda G' neobsahuje kružnicu. Zo spôsobu voľby hrán h_i je ihneď zrejmé, že fundamentálnym systémom kružníc pre kostru G' je sy- stém C.

---

[7] Pozri Kotzig, *O istých rozkladoch grafu*, Matematicko-fyzikálny časopis 3, 1955, veta 5.

[8] Pozri König, c. d. str. 9, veta 9.

[9] Pozri König, c. d. str. 56.

c) Výber hrán $h_1, h_2, \ldots, h_n$ — ktoré treba zrušiť v grafe G, aby vznikla kostra, ktorej fundamentálnym systémom kružníc je systém C — možno vykonať v celku $\mu_1\mu_2 \ldots \mu_n$ rôznymi spôsobmi. Teda v grafe existuje najmenej $\varkappa(C) = \mu_1\mu_2 \ldots \mu_n$ rôznych kostier požadovaných vlastností. Takýchto kostier nemôže byť v G však viacej ako $\varkappa(C)$, lebo potom medzi hranami, ktoré treba zrušiť, vyskytovala by sa hrana, ktorá sa nevyskytuje v žiadnej kružnici grafu G (a kostra by nebola súvislým grafom, čo je spor; pozri definíciu kostry), alebo by sa medzi nimi vyskytovala hrana, ktorá je hranou viacerých kružníc z C (a to sme ukázali v časti a) dôkazu, že je nemožné). Teda $\varkappa(C) = \mu_1\mu_2 \ldots \mu_n$.

d) Predpokladajme, že $\varkappa(C) > 1$, potom aspoň o jednom čísle μ_i platí $\mu_i > 1$, predpokladajme teda, že existujú hrany $h_i(1), h_i(2), \ldots, h_i(\mu_i)$ kružnice K_i, ktoré sa nevyskytujú v žiadnej inej kružnici kompozičnej bázy C. Ľubovoľná kružnica, ktorá obsahuje ľubovoľnú hranu $h_i(j)$; $j = 1, 2, \ldots, \mu_i$, je kompozíciou istých kružníc z C. Medzi komponovanými kružnicami musí byť nutne kružnica K_i, pretože podľa predpokladu hrany $h_i(j)$ sa vyskytujú jedine v kružnici K_i; všetky krany $h_i(j)$ sú hranami kompozície. Čiže každá kružnica grafu G, ktorá obsahuje aspoň jednu hranu $h_i(j)$, obsahuje všetky tieto hrany. Množina hrán $\{h_i(1), h_i(2), \ldots, h_i(\mu_i)\}$ o μ_i prvkoch existuje a je množinou požadovaných vlastností.

Veta 2. *Nech S je kostra súvislého grafu G a h ľubovoľná hrana z S, potom existuje práve jeden rez R_h grafu G, ktorý obsahuje hranu h, a jeho ostatné hrany nepatria do S.*

Dôkaz. Ak by sme v kostre S zrušili hranu h, vznikne z kostry S graf S', ktorý má práve dve komponenty B_1, B_2. Označme znakom R_h čiastočný graf grafu G pozostávajúci z tých hrán, ktorých uzly, s ktorými je hrana incidentná, patria rôznym komponentám B_1, B_2. Je zrejmé, že R_h obsahuje okrem h už len hrany nepatriace do S, ďalej R_h je rezom lebo po prvé: zrušením hrán grafu R_h vznikne z grafu G graf o dvoch komponentách, po druhé: ak by sme zrušili všetky hrany okrem jednej, vznikol by graf súvislý, pretože by v ňom existovala hrana incidentná s uzlami oboch komponent B_1, B_2 grafu S'. Treba ešte dokázať, že existuje jediný rez, ktorý obsahuje okrem hrany h len hrany, ktoré nepatria do S.

Keby existovali dva rôzne rezy požadovaných vlastností R_h, R'_h, potom ich kompozícia G' by obsahovala len hrany, ktoré nepatria do S (pretože jediná hrana $h \in S$ je im spoločná). Kompozícia rôznych grafov $\in \mathfrak{P}_G$ je nenulový graf $\in \mathfrak{P}_G$, teda je $G' \in \mathfrak{P}_G$. Nech h' je ľubovoľná hrana z G'. Podľa lemmy 8 existuje v grafe G kružnica, ktorá okrem hrany h' obsahuje už len hrany z kostry. To je ale spor, pretože podľa definície grafov $\in \mathfrak{P}_G$ každá kružnica grafu obsahuje párny počet hrán grafu $\in \mathfrak{P}_G$. Teda R_h je jediný rez požadovaných vlastností.

Veta 2. nám hovorí, že každej hrane kostry možno priradiť práve jeden rez, ktorý už neobsahuje inú hranu kostry. Označme si znakom E_s systém všetkých rezov, ktoré v zmysle tohto priradenia odpovedajú jednotlivým hranám kostry S. Takémuto systému rezov budeme hovoriť fundamentálny systém rezov konštruovaný podľa kostry S. Ľubovoľnej kostre odpovedá prirodzene práve jeden fundamentálny systém rezov. Dokážme si teraz vetu o fundamentálnom systéme rezov:

Veta 3. *Nech E_s je fundamentálny systém rezov konštruovaný podľa ľubovoľnej kostry S súvislého grafu G. Potom E_s je kompozičnou bázou pre všetky rezy grafu G.*

Dôkaz. Najprv ukážme, že kompozícou istých rezov systému E_s nemožno dostať rez toho istého systému: pretože každý rez systému E_s obsahuje takú hranu z S, ktorá nie je hranou žiadneho iného rezu, a v kompozícii sa vyskytujú lèn hrany, ktoré sa v komponovaných grafoch vyskytujú nepárny počet krát, je táto vlastnosť systému zrejmá.

Treba teda ešte dokázať, že ľubovoľný rez R grafu G možno komponovať z rezov systému E_s. Nech R je ľubovoľný rez grafu G a nech $h_1, h_2, \ldots, h_\alpha$ sú tie hrany rezu R, ktoré sú hranami kostry S. Je zrejmé, že $\alpha > 0$, lebo rez nemôže obsahovať len hrany, ktoré nepatria do S (po zrušení všetkých hrán takého čiastočného grafu, ktorý neobsahuje hrany z S, by vznikol graf súvislý). Označme znakom R_i ten rez systému E_s, ktorý obsahuje hranu h_i ($i = 1, 2, \ldots, \alpha$), a utvorme kompozíciu:

$$Q = R \times R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_\alpha;$$

Q nemôže obsahovať žiadnu z hrán h_i, lebo táto sa vyskytuje pri dvoch rezoch v kompozícii (R, R_i), nemôže taktiež obsahovať žiadnu inú hranu kostry, lebo takáto sa nevyskytuje v žiadnom z komponovaných grafov. Q neobsahuje teda žiadnu hranu kostry S. Pretože kompozícia grafov $\in \mathfrak{P}_G$ je grafom $\in \mathfrak{P}_G$ a pretože graf $\in \mathfrak{P}_G$ nemôže obsahovať len isté hrany nepatriace do kostry, musí byť nutne nulovým grafom a teda:[10]

$$R = R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_\alpha$$

R je kompozíciou rezov $R_1, R_2, \ldots, R_\alpha$, čo bolo treba dokázať.

Veta 4. *Nech systém rezov $B = \{R_1, R_2, \ldots, R_n\}$ je kompozičnou bázou pre všetky rezy isteho súvislého grafu G a nech M_i je množina tých hrán rezu R_i, ktoré sa nevyskytujú v žiadnom inom reze systému, μ_i nech udáva ich počet ($i = 1, 2, \ldots n$).*

Platí:

a) *Ak niektorá z množín M_i je prázdna, potom neexistuje v G taká kostra, podľa ktorej konštruovaný fundamentálny systém rezov by bol systém B.*

b) *Nech $M_i \neq 0$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$. Vyberme z každej z množín M_i po jednej hrane h_i a utvorme z nich množinu $M_0 = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$. Graf pozostávajúci z hrán množiny M_0 je kostrou grafu G, podľa ktorej konštruovaný fundamentálny systém rezov je systém B.*

[10] Pozri König, c. d. str. 145.

c) *O počte $\varkappa(B)$ rôznych kostier, podľa ktorých konštruovaným fundamentálnym systémom rezov je systém B, platí:*

$$\varkappa(B) = \mu_1\mu_2 \ldots \mu_n.$$

d) *Ak $\varkappa(B) > 1$, potom v G existuje najmenej jedna dvojica uzlov u, v taká, že s oboma týmito uzlami sú incidentné najmenej dve hrany.*

Dôkaz.

a) Predpokladajme, že tvrdenie a) vety nemá všeobecnú platnosť, t. j. že pre isté $i = 1, 2, \ldots, n$ je $M_i = 0$ a pritom existuje kostra S, taká, že $E_s = B$. Podľa definície fundamentálneho systému rezov E_s existuje v S hrana h_i, ktorá je jedinou hranou z kostry S v reze R_i. Táto hrana je však hranou ešte aspoň jedného rezu R_j a to je v rozpore s definíciou fundamentálneho systému rezov. Preto ak $M_i = 0$ neexistuje taká kostra S, aby platilo $E_s = B$.

b) Nech G' je čiastočný graf grafu G pozostávajúci z hrán množiny M_0.

1. Dokážme najprv, že G' neobsahuje žiadnu kružnicu. Predpokladajme naopak, že v G' existuje istá kružnica K, jej hranou je istá hrana $h_i \in R_i$ incidentná s uzlami u, v. Ak zrušíme všetky hrany rezu R_i, vznikne z G graf G^* o dvoch komponentách, pričom každá hrana z R_i je incidentná v G s dvoma uzlami z rôznych komponent grafu G^*. Avšak z kružnice K bola pri vzniku grafu G^* zrušená iba jedna hrana, teda existuje cesta v G^*, ktorá spojuje uzly u, v. To je však spor, lebo u, v majú patriť do rôznych komponent grafu G^*. Teda G' neobsahuje kružnicu.

2. Dokážme teraz, že graf G' má tie isté uzly ako graf G. Kompozičná báza rezov v grafe G (resp. grafov $\in \mathfrak{P}$, resp. kríkov) má práve $\alpha_0 - 1$ rezov, ak α_0 je počet uzlov grafu G. Vieme, že v grafoch, ktoré nemajú kružnicu, rozdiel medzi počtom uzlov a počtom hrán udáva počet komponent.[11]

Označme znakom α_0' počet uzlov v G'; $\alpha_1' = \alpha_0 - 1$ počet hrán v G' a znakom ω počet komponent v G'. Platí:[12]

$$\alpha_0' - \alpha_1' = \omega,$$
$$\alpha_0' - \omega = \alpha_0 - 1.$$

Pretože $\omega \geqq 1 (-\omega \leqq -1)$ platí:

$$\alpha_0' - 1 \geqq \alpha_0 - 1; \alpha_0' \geqq \alpha_0.$$

Avšak počet uzlov v čiastočnom grafe nemôže byť väčší ako počet uzlov v celom grafe. Teda je $\alpha_0' = \alpha_0$.

Z uvedeného ($\alpha_0' - \omega = \alpha_0 - 1$) vyplýva tiež, že G' je súvislý graf (má jedinú komponentu).

Teda (zhrňujem):

a) G' neobsahuje kružnicu, b) G' má tie isté uzly ako G, c) G' je súvislý. Čiastočný graf G' s týmito troma vlastnosťami je nutne kostrou grafu G[13].

[11] Pozri König, c. d. str. 51.

[12] Pozri König, c. d. str. 51, veta 9, 10.

[13] Pozri König, c. d. str. 57, veta 23.

c) Naznačeným postupom možno konštruovať vcelku $\mu_1\mu_2 \dots \mu_n$ rôznych množín M_0 požadovaných vlastností. Je tiež zrejmé, že iným spôsobom konštruovať množinu M_0 nemožno; platí teda:

$$\varkappa(B) = \mu_1\mu_2 \dots \mu_n$$

d) Nech $\varkappa(B) > 1$, t. j. nech aspoň jedno číslo μ_i je väčšie ako 1. Nech h, h' sú dve hrany rezu R_i, také, ktoré sa nevyskytujú v žiadnom inom, reze kompozičnej bázy rezov B. To však znamená, že každý graf $\in \mathfrak{P}_G$, ktorý obsahuje hranu h, obsahuje aj hranu h'. Nech u, v sú uzly, s ktorými je incidentná hrana h. Krík s centrom v uzle u a taktiež krík s centrom v uzle v (pretože krík je graf $\in \mathfrak{P}_G$) obsahuje nielen hranu h, ale aj hranu h'. Čiže s oboma uzlami u, v sú incidentné najmenej dve hrany h, h', čo bolo treba dokázať.

Fundamentálny systém rezov grafu javí určité obdobné vlastnosti ako fundamentálny systém kružníc grafu vzhľadom na kostry grafu. I keď sú zrejmé niektoré rozdiely (napr. tvrdenie d) vo vetách 1, 4, alebo skutočnosť, že rezy priraďujeme pri konštrukcii fundamentálneho systému ku hranám kostry, kdežto kružnice priraďujeme ku hranám, ktoré nepatria do kostry) ukazuje sa značná obdoba vo vlastnostiach oboch fundamentálnych systémov, ktorú nie je dobre možno docieliť, ak v kompozičnej báze grafov $\in \mathfrak{P}_G$ sa obmedzujeme iba na kríky.

Došlo 14. IV. 1955.

ЗНАЧЕНИЕ ОСНОВЫ ГРАФА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ КОМПОЗИЦИОННЫХ БАЗ НЕКОТОРЫХ ПОДГРАФОВ

АНТОН КОЦИГ

Выводы

В настоящей работе автор исходит из известных теорем об основе графа и о так называемой фундаментальной системе окружностей, о которых говорится, например, в работе Кенига „Теория конечных и бесконечных графов“ (König „Theorie der endlichen und unendlichen Graphen“, Leipzig 1936) и исследует возможно ли существование композиционных баз окружностей графа, не являющихся фундаментальной системой окружностей ни одной основы графа, а также возможно ли существование композиционных баз окружностей, которые являются фундаментальной системой окружностей нескольких основ. Доказывается следующая теорема:

Пусть $C = \{K_1, K_2, \dots K_n\}$ — система окружностей, образующая композиционную базу для всех окружностей конечного связного графа G. Пусть M_i — множество таких ребер окружности $K_i \in C$, которые не встречаются ни в какой иной окружности системы C, μ_i — число ребер множества M_i.

Доказывается

а) Если какое-либо из множеств M_i пустое, то в G не имеется основы, фундаментальной системой окружностей, которой была бы система C.

б) Пусть $M_i \neq 0$ для всех i. Выберем их каждого множества по одному ребру и обозначим ребро, выбранное из M_i символом h_i. Множество всех ребер графа, которые не были выбраны, т. е. ребра графа, не принадлежащие множеству $M_0 = \{h_1, h_2 \dots, h_n\}$, представляет собой множество ребер основы S, фундаментальной системой окружностей которой является система C.

в) Если $\varkappa(C)$ есть число различных основ, фундаментальной системой которых является C, то имеет место:

$$\varkappa(C) = \mu_1\mu_2 \dots \mu_n$$

г) Если $\varkappa(C) > 1$, то в G существует по крайней мере одно такое множество ребер H_ε самое меньшее с двумя элементами, что каждая окружность графа, содержащая ребро из H_ε, содержит все ребра из H_ε.

Подобным образом исследуются композиционные базы так называемых разрезов графа. Под разрезом связного графа G понимается подграф R, обладающий следующими свойствами:

(α) если в связном графе G устранить все ребра графа R, то получится граф, имеющий точно две компоненты,

(β) если в связном графе G устранить все ребра из R, кроме одного любого ребра, то получится связный граф.

Прежде всего доказывается, что если S является основой связного графа G, а h — произвольным ребром из S, то существует только один разрез R_h графа G, который содержит ребро h, а остальные ребра не принадлежат к S. Таким образом для данной основы S к каждому ребру основы относится только один разрез графа. Система всех разрезов, которые в смысле предыдущего положения соответствуют отдельным ребрам основы, называется фундаментальной системой разрезов, построенной на основе S. Доказывается, что фундаментальная система разрезов, построенная на произвольной основе, является композиционной базой всех разрезов графа. Дается доказательство следующей теоремы (аналогичное приведенной выше теореме о композиционных базах окружностей):

Пусть система разрезов $B = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ является композиционной базой для всех разрезов связного графа G, и пусть M_i представляет множество таких ребер разреза R_i, которые не входят ни в какой другой разрез системы, а μ_i — число таких ребер ($i = 1, 2, \dots, n$). Удовлетворяются следующие условия:

(а) Если одно из множеств M_i пустое, то в G не существует такой основы, построенная по которой фундаментальная система была бы системой B.

(б) Пусть $M_i \neq 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Выберем из такого множества M_i по одному ребру h_i и составим из них множество $M_0 = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$. Граф, состоящий из ребер множества M_0 и инцедентных им вершин, является такой основой графа G, что построенная на ней система разрезов есть система B.

(в) Если $\varkappa(B)$ есть число различных основ, построенная по которой фундаментальная система разрезов является системой B, то имеет место: $\varkappa(B) = \mu_1\mu_2 \dots \mu_n$.

(г) Если $\varkappa(B) > 1$, то в G существует пара таких вершин u, v и по крайней мере два разных ребра, из которых каждое инцедентно обеим вершинам.