MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK VI ČÍSLO 2

O KONVERGENCII V LINEÁRNYCH PRIESTOROCH

JÁN JAKUBÍK
Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie Vysokej školy technickej v Košiciach

Výrazom lineárny priestor budeme označovať konvergenčný lineárny priestor, t. j. modul nad okruhom reálnych čísel, v ktorom je definovaná konvergencia postupností, majúca určité vlastnosti (pozri 1.4). Nech P je lineárny priestor, nech (P) je modul (uvažovaný bez konvergencie) prislušný k lineárnemu priestoru P. Nech $\mathfrak{P}$ je množina všetkých lineárnych priestorov P_i, pre ktoré platí $(P_i) = (P)$. Ak $P_1, P_2 \in \mathfrak{P}$ a ak každá postupnosť $\{x_n\}$, ktorá v lineárnom priestore P_1 konverguje k prvku x, konverguje aj v lineárnom priestore P_2 k prvku x, budeme písať $P_1 \leqq P_2$. Tým je na množine $\mathfrak{P}$ definované čiastočné usporiadanie. V článku sú odvodené niektoré vlastnosti čiastočne usporiadanej množiny $\mathfrak{P}$. Ďalej sa vyšetrujú niektoré „patologické“ vlastnosti konvergencie v lineárnych priestoroch.

1.

Najprv pripomenieme základné pojmy, ktoré sú v ďalšom potrebné. E_1 značí v ďaľšom množinu všetkých reálnych čísel, grécke písmená označujú prvky množiny E_1.

1.1. *Nech M je neprázdna množina (jej prvky označujeme malými latinskými písmenami), nech pre ľubovoľné a, b a ľubovoľné α je definovaný súčet $a + b \in M$ a násobok $\alpha a \in M$ tak, že platí*

$$(A)\quad (a + b) + c = a + (b + c), \qquad a + b = b + a,$$
$$a + x = a + y \Rightarrow x = y,$$
$$(B)\quad (\alpha\beta)a = \alpha(\beta a), \quad \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$$
$$(\alpha + \beta)\, a = \alpha a + \beta a,\ 1a = a.$$

Potom množinu M nazývame modulom.

Z vlastností (A), (B) vyplýva, že modul M obsahuje nulový prvok o, pre ktorý $a + o = a$, $\alpha o = o$ pre každé $a \in M$, $\alpha \in E_1$.

1.2. *Množina $B \subset M$ je algebraickou bázou modulu M, ak sa každý prvok $a \in M$, $a \neq o$ dá vyjadriť, a to jediným spôsobom v tvare*

$$a = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n (b_i \in B, \alpha_i \cdot b_i \neq o, i = 1, \ldots, n, b_i \neq b_k \text{ pre } i \neq k)$$

(pre rôzne a môže byt n rôzne).(Pozri [4].)

1.3. *Každý modul má algebraickú bázu.*

Dôkaz je jednoduchý (transfinitnou indukciou; používame axiómu výberu). Ak modul M má (aspoň jednu) konečnú bázu, hovoríme, že M má konečný počet dimenzií; v opačnom prípade hovoríme, že M má nekonečný počet dimenzií.

1.3.1. *Nech B je báza v M, nech B má nekonečne mnoho prvkov, nech všetky prvky prostej postupnosti $\{x_n\}$ patria do B. Utvorme postupnosť $\{y_n\}$ takto: $y_1 = x_1$, $y_n = x_n - x_1$ pre $n > 1$. Potom existuje báza B' v M taká, že všetky členy postupnosti $\{y_n\}$ patria do B'.*

Dôkaz je jednoduchý.

1.4. (Pozri[1].) *Nech M je modul. Nech je v M definovaná konvergencia postupností (v označení $x_n \to x$), pre ktorú platí*

1) $\alpha_n \to \alpha \Rightarrow \alpha_n x \to \alpha x$.

2) $x_n \to x \Rightarrow \alpha x_n \to \alpha x$.

3) $x_n \to x$, $y_n \to y \Rightarrow x_n + y_n \to x + y$.

4) *Ak postupnosť $\{x_n\}$ konverguje k prvku x, potom každá jej čiastočná postupnosť konverguje k prvku x.*

5) *Postupnosť nemôže konvergovať k dvom rôznym prvkom.*

Modul M s takouto konvergenciou budeme volať lineárnym priestorom a označovať znakom P (prípadne s indexmi). Píšeme $(P) = M$.

Postupnosť $\{x_n\}$ je nulová v lineárnom priestore P, ak $x_n \to o$. Zrejme $x_n \to x$
$\Leftrightarrow x_n - x \to o$. Z toho plynie, že konvergencia v P je jednoznačne určená, ak je
daná množina všetkých postupností, ktoré sú v lineárnom priestore P nulové.
Ak $A = \{a_n\}$, $B = \{b_n\}$, označíme výrazom $\alpha A + \beta B$ postupnosť, ktorej vše-
obecný člen je $\alpha a_n + \beta b_n$. Znakom A' budeme označovať čiastočnú postupnosť
postupnosti A. Výraz $x_n \xrightarrow{i} x$ značí konvergenciu v lineárnom priestore P_i. Ak
$(P_1) = (P_2)$ a platí $x_n \xrightarrow{1} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{2} x$, považujeme lineárne priestory P_1, P_2 za
totožné. Pojem izomorfizmu dvoch lineárnych priestorov je jasný.

1.5. *Nech P_1, P_2 sú lineárne priestory, nech P_3 je množina všetkých dvojíc (x, y), $x \in P_1$, $y \in P_2$, pre ktoré je definované sčítanie rovnicou $(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1)$ a násobok reálnym číslom rovnicou $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$. Definujme v P_3 konvergenciu takto: $(x_n, y_n) \xrightarrow{3} (x, y) \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{1} x$, $y_n \xrightarrow{2} y$. P_3 nazývame priamym súčinom priestorov P_1, P_2 a označujeme $P_1 \times P_2$. Zrejme je P_3 lineárny priestor.*

2.

2.1. *Nech $(P_1) = (P_2)$, nech $x_n \xrightarrow{1} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{2} x$. Potom píšeme $P_1 \leqq P_2$ alebo $P_2 \geqq P_1$.*

Budeme považovať za známe základné pojmy a vety z teórie čiastočne usporiadaných množín (pozri [2]). Nech P je pevne zvolený lineárny priestor, nech $\mathfrak{P}$
je množina všetkých lineárnych priestorov P_i, pre ktoré platí $(P_i) = (P)$.
Ľahko sa zistí, že relácia $\leqq$, definovaná 2.1, určuje čiastočné usporiadanie
množiny $\mathfrak{P}$; všade ďalej uvažujeme množinu $\mathfrak{P}$ s týmto čiastočným usporiada-
ním.

2.2 *Nech $\mathfrak{P}_1$ je neprázdna podmnožina množiny $\mathfrak{P}$. V čiastočne usporiadanom systéme $\mathfrak{P}$ existuje prvok $P_0 = \inf \mathfrak{P}_1$.*

Dôkaz. Položme $x_n \xrightarrow{0} x$ (1) vtedy a len vtedy, keď pre každé $P_i \in \mathfrak{P}_1$ platí
$x_n \xrightarrow{i} x$. Ľahko sa preverí, že konvergencia, definovaná výrazom (1), má vlast-
nosti, žiadané definíciou 1.4; nech P_0 je príslušný lineárny priestor. Zrejme je
$P_0 \leqq P_i$ pre každé $P_i \in \mathfrak{P}_1$. Ak $P \leqq P_i$ pre všetky $P_i \in \mathfrak{P}_1$, potom z podmienky
$x_n \to x$ v lineárnom priestore P vyplýva $x_n \xrightarrow{i} x$ v každom $P_i \in \mathfrak{P}$, teda $x_n \xrightarrow{0} x$,
$P \leqq P_0$.

Dôsledok. *Množina $\mathfrak{P}$ má najmenší prvok; označíme ho znakom P_m. Zrejme P_m závisí len od modulu (P).*

Naskytuje sa otázka, či sa dá konštruktívnym spôsobom definovať konver-
gencia v P_m. Ak príslušný modul má konečný počet dimenzií, je riešenie jed-
noduché:

2.3. *Nech $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ je báza modulu (P). Nech*

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{in} b_i, \quad x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i b_i.$$

Položme $x_n \xrightarrow{1} x$ (1) vtedy a len vtedy, keď $\alpha_{in} \to \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, k)$. Konvergencia (1) má vlastnosti žiadané v 1.4 a príslušný lineárny priestor je rovný P_m.

Dôkaz je zrejmý.

2.4. *Nech $(P) = M$ má nekonečný počet dimenzií. Položme $x_n \xrightarrow{1} x$ (1) vtedy
a len vtedy, keď existuje čiastočný modul M_1 modulu M tak, že platí 1) M_1 má
konečný počet dimenzií, 2) $x \in M_1$, $x_n \in M_1$, $n = 1, 2, \ldots$, 3) ak $\mathfrak{P}_1$ je množina
všetkých lineárnych priestorov P_i, $(P_i) = M_1$ a P_0^1 je najmenší prvok množiny $\mathfrak{P}_1$,
potom $x_n \to x$ v lineárnom priestore P_0^1. Potom konvergencia (1) vyhovuje pod-
mienkam definície 1.4 a príslušný lineárny priestor je rovný P_m.*

Postup dôkazu je zrejmý.

2.5. *Nech $\mathfrak{P}_1$ je reťazec v $\mathfrak{P}$. Potom v čiastočne usporiadanom systéme $\mathfrak{P}$ existuje prvok $P_1 = \sup \mathfrak{P}_1$.*

Dôkaz. Položme $x_n \xrightarrow{1} x$ (1) vtedy a len vtedy, keď existuje $P_i \in \mathfrak{P}_1$ taký, že platí $x_n \xrightarrow{i} x$. Ľahko sa preverí, že konvergencia, definovaná vzťahom (1), vy-

hovuje podmienkam definície 1.4; príslušný lineárny priestor označme P_1.
Ľahko sa zistí, že platí $P_1 = sup\ \mathfrak{P}_1$.

2.6. *Čiastočne usporiadaný systém $\mathfrak{P}$ obsahuje maximálny prvok.*

Dôkaz plynie z 2.5 a z Zornovej vety (používame teda axiómu výberu). Pritom maximálny prvok nemusí byť najväčším prvkom v $\mathfrak{P}$ (pozri [2]).

Naskytuje sa otázka (analogická k otázke vyslovenej pred 2.3), ako definovať maximálny lineárny priestor „vnútorným" spôsobom (t. j. v termínoch konvergencie v tomto lineárnom priestore, bez toho, aby sme museli uvažovať všetky lineárne priestory systému $\mathfrak{P}$).

2.7. *Nutná a postačujúca podmienka, aby lineárny priestor P bol maximálny, je: v lineárnom priestore P neexistuje postupnosť s nasledujúcou vlastnosťou:*
(C)1) postupnosť $\{x_n\}$ je v lineárnom priestore P divergentná;
2) každá lineárna kombinácia konečného počtu čiastočných postupností postupnosti $\{x_n\}$ je v lineárnom priestore P alebo divergentná alebo nulová.

Dôkaz. a) Nech lineárny priestor P nie je maximálny, t. j. existuje lineárny priestor $P_1 \in \mathfrak{P}, P < P_1$. Podľa poznámky za 1.4 existuje postupnosť $\{x_n\}$ ktorá je nulová v P_1 a divergentná v P. Ak $\{y_n\}$ je lineárna kombinácia čiastočných postupností postupnosti $\{x_n\}$ a ak v P platí $y_n \to y$, musí platiť zároveň $y_n \xrightarrow{1} y$, $y_n \xrightarrow{1} o$, teda $y = o$. Vyslovená podmienka je postačujúca pre maximálnosť lineárneho priestoru P.

b) Nech v lineárnom priestore P existuje postupnosť $\{x_n\}$, ktorá má vlastnosť (C). Položme $y_n \xrightarrow{1} y$ (1) vtedy a len vtedy, keď $\{y_n\} = A + B$ (2), pričom postupnosť A konverguje v lineárnom priestore P k prvku y a B je lineárna kombinácia čiastočných postupností postupnosti $\{x_n\}$. Modul (P) s konvergenciou (1) označme P_1. Konvergenciu v P označme znakom $\to$. Konvergencia (1) má zrejme vlastnosti 1—4 z definície 1.4. Zostáva dokázať jednoznačnosť.

Najprv dokážeme: Ak $z_n \to o$, $z_n \xrightarrow{1} z$ (3), potom $z = o$. Zo vzťahu (3) totiž vyplýva

$$z_n = z_n^1 + x_n',$$

kde $\{x_n'\}$ je lineárna kombinácia čiastočných postupností postupnosti $\{x_n\}$ a $z_n^1 \to z$. Potom by platilo

$$x_n' = z_n - z_n^1 \to -z.$$

Podľa predpokladu o postupnosti $\{x_n\}$ musí byť $z = o$.

Predpokladajme ďalej, že okrem rovnice (2) platí zároveň $\{y_n\} = A_1 + B_1$, nech postupnosť A_1 konverguje v P k prvku y_1, nech postupnosť B_1 je lineárnou kombináciou čiastočných postupností postupnosti $\{x_n\}$. Potom postupnosť

$$(A + B) - (A_1 + B_1) = (A - A_1) + (B - B_1)$$

má všetky členy rovné o, teda je nulová v P, a zároveň v konvergencii (1) konverguje k prvku $y - y_1$. Musí teda byť $y = y_1$. Konvergencia (1) spĺňuje teda

všetky vlastnosti žiadané definícou 1.4. a P_1 je lineárny priestor. Zrejme $P \leqq P_1$. Keďže $x_n \xrightarrow{1} o$, platí $P < P_1$, teda priestor P je nie maximálny.

2.8. *Nech $P \in \mathfrak{P}$, nech $\mathfrak{P}(P)$ je množina všetkých $P_i \in \mathfrak{P}$, pre ktoré platí $P_i \leqq P$. Množina $\mathfrak{P}(P)$ je úplný sväz.*

Dôkaz. Nech $\mathfrak{P}_1 \subset \mathfrak{P}(P)$, nech $\mathfrak{P}_1$ je neprázdna množina. Podľa 2.2 existuje v čiastočne usporiadanom systéme $\mathfrak{P}(P)$ prvok inf $\mathfrak{P}_1$. Nech $\mathfrak{P}_2$ je množina všetkých $P_j \in \mathfrak{P}(P)$, pre ktoré $P_i \in \mathfrak{P}_1 \Rightarrow P_i \leqq P_j$. Množina $\mathfrak{P}_2$ je neprázdna, keďže $P \in \mathfrak{P}_2$. Existuje teda v $\mathfrak{P}(P)$ prvok $P_s = \inf \mathfrak{P}_2$. Zo základných vlastností čiastočne usporiadaných systémov vyplýva, že $P_s = \sup \mathfrak{P}_1$.

Konštrukciu lineárneho priestoru $P_s = \sup \mathfrak{P}_1$ môžeme vykonať nasledovne (označenia sú rovnaké ako v predošlom):

2.9 *V lineárnom priestore $P_s = \sup \mathfrak{P}_1$ platí $x_n \xrightarrow{s} o$ vtedy a len vtedy, keď existujú lineárne priestory $P_1, \ldots, P_k \in \mathfrak{P}_1$ také, že sa postupnosť $\{x_n\}$ dá vyjadriť v tvare $\{x_n\} = \sum_{i=1}^{k} A_i$ (1), kde postupnosť A_i je nulová v priestore P_i $(i = 1, \ldots, k)$. (Pre rôzne postupnosti $\{x_n\}$ môžu byť príslušné čísla k rôzne.)*

Dôkaz.

a) Nech je splnená podmienka (1). Potom zrejme $x_n \xrightarrow{s} o$.

b) Položme $y_n \xrightarrow{s} y$ vtedy a len vtedy, keď postupnosť $\{x_n\} = \{y_n - y\}$ sa dá vyjadriť v tvare (1). Podmienky 1—4 z definície 1.4 sú zrejme splnené. Jednoznačnosť zistíme takto: Nech $y_n \xrightarrow{s} y$, $y_n \xrightarrow{s} y'$. Postupnosti $\{y_n - y\}$, $\{y_n - y'\}$ sa dajú vyjadriť v tvare (1). Keďže $P_i \in \mathfrak{P}_1 \Rightarrow P_i \leqq P_s$, v lineárnom priestore P_s platí $y_n - y \to o$, $y_n - y' \to o$, teda $y = y'$. Lineárny priestor, príslušný ku konvergencii $y_n \xrightarrow{s} y$ označme P_S. Zrejme je $P_S \leqq P_s$, $P_S \geqq P_i$, $P_i \in \mathfrak{P}_1$, teda $P_S = P_s$.

V inej formulácii môžeme tvrdenie 2.9 vysloviť takto (s pridaním analogického tvrdenia pre prenik):

2.10 *Označme znakom $O(P)$ množinu všetkých nulových postupností lineárneho priestoru P, nech $\mathfrak{P}_1$ je neprázdna podmnožina čiastočne usporiadaného systému $\mathfrak{P}$.*

a) $O(\inf \mathfrak{P}_1) = \cap\, O(P_i)$ $(P_i \in \mathfrak{P}_1)$,

b) *ak množina $\mathfrak{P}_1$ je zhora ohraničená v systéme $\mathfrak{P}$ (t. j. existuje $P \in \mathfrak{P}$ tak, že $P_i \in \mathfrak{P}_1 \Rightarrow P_i \leqq P$), potom $O(\sup \mathfrak{P}_1)$ je množina všetkých postupností, ktoré sa dajú vyjadriť v tvare $\sum_{i=1}^{n} A_i$, kde A_i je nulová postupnosť v niektorom lineárnom priestore P_i, $P_i \in \mathfrak{P}_1$.*

Dôkaz vyplýva z 2.8 a 2.9.

Vlastnosť (C), zavedená v 2.7, dá sa zovšeobecniť takto: (C_1) Množina postupností $\mathfrak{A} = \{A_i\}$ má v lineárnom priestore P vlastnosť (C_1), keď platí:

1) každá postupnosť A_i je divergentná v P,

2) každá lineárna kombinácia čiastočných postupností postupností z množiny $\mathfrak{A}$ je alebo divergentná, alebo nulová v P.

2.11 *Nech neprázdna množina postupností $\mathfrak{A}$ má v lineárnom priestore P vlastnosť (C_1). Potom existuje jediný lineárny priestor $P_1 > P$, pre ktorý platí: $O(P_1)$ je množina všetkých postupností, ktoré sa dajú vyjadriť v tvare $A + B$, kde $A \in O(P)$ a B je lineárna kombinácia čiastočných postupností postupností z množiny $\mathfrak{A}$.*

Dôkaz existencie lineárneho priestoru P_1 s uvedenou vlastnosťou sa vykoná rovnakou konštrukciou ako v dôkaze 2.7, b). Jednoznačnosť je zrejmá. Lineárny priestor P_1 budeme označovať tiež znakom $P(\mathfrak{A})$.

2.12 *Nech $P_1 > P$, nech $\mathfrak{A} = O(P_1) - O(P)$. Množina $\mathfrak{A}$ má vlastnosť C_1 v lineárnom priestore P a platí $P(\mathfrak{A}) = P_1$.*

Prvé tvrdenie plynie priamo z podmienky $P < P_1$. Dôkaz druhého tvrdenia vyplýva jednoduchým postupom z predošlých viet.

2.12.1. *Nech $\mathfrak{A}_0$ je množina postupností z modulu M. Nutná a postačujúca podmienka, aby existoval lineárny priestor P, pre ktorý platí $(P) = M, O(P) = \mathfrak{A}_0$, je:*

1) $\alpha_n \to 0 \Rightarrow \{\alpha_n x\} \in \mathfrak{A}_0$, 2) $A \in \mathfrak{A}_0 \Rightarrow \alpha A \in \mathfrak{A}_0$,
3) $A, B, \in \mathfrak{A}_0 \Rightarrow A + B \in \mathfrak{A}_0$, 4) $A \in \mathfrak{A}_0 \Rightarrow A' \in \mathfrak{A}_0$,
5) $x_n = x \neq o$ $(n = 1, 2, \ldots) \Rightarrow \{x_n\} \,\bar{\in}\, \mathfrak{A}_0$.

2.13. *Nech modul (P) má nekonečný počet dimenzií, nech $B = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je algebraická báza modulu (P), nech P_m je minimálny prvok v $\mathfrak{P}$. Postupnosť $\{x_n\}$ má vlastnosť (C) v lineárnom priestore P_m.*

Dôkaz. a) Nech postupnosť $A = \{a_n\}$ je lineárnou kombináciou čiastočných postupností postupnosti $\{x_n\}$. Potom sa a_n dá vyjadriť v tvare $a_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_{r(n,i)}$, kde $\{r(n, i)\}$ je (pri pevnom i, $i = 1, \ldots, k$) rastúca postupnosť prirodzených čísel. Teda k ľubovoľnému prirodzenému číslu N_1 existuje také prirodzené číslo N_2, že pre $n > N_2$ platí $r(n, i) > N_1$ $(i = 1, \ldots, k)$.

b) Nech postupnosť $A = \{a_n\}$ je konvergentná v P_m. Potom existuje prirodzené číslo N tak, že platí $a_n = \sum_{i=1}^{N} \beta_i x_i$. Pritom číslo N nezávisí od n a x_i sú prvky bázy B (pozri 2.4).

c) Nech postupnosť $A = \{a_n\}$ je konvergentná v P_m a zároveň lineárnou kombináciou čiastočných postupností postupnosti $\{x_n\}$. Nech N má význam ako v b). Zvoľme si číslo $N_1 > N$ a nájdime príslušné N_2 podľa a). Pre $n > N_2$ musí platiť podľa a) a b) $a_n = o$, teda $a_n \xrightarrow{m} o$. Tým je tvrdenie dokázané. Lineárny priestor, zostrojený z lineárneho priestoru P_m pomocou postupnosti $\{x_n\}$ rovnakou konštrukciou ako v 2.7 b, označme P_I.

2.13.1. Konštrukcia z predošlého odseku sa dá použiť doslovne len vtedy,

keď modul (P) má spočítateľnú bázu. Pre moduly nesplňujúce tento predpoklad môžeme predošlý postup zovšeobecniť takto:

Nech modul (P) má nekonečný počet dimenzií, nech B je jeho báza, nech $A_1 = \{x_n\}$ je prostá postupnosť, ktorej členy patria do B. Postupnosť A_1 má v lineárnom priestore P_m vlastnosť (C).

Dôkaz: Nech A_2 je množina všetkých prvkov bázy B, ktoré nie sú členmi postupnosti A_1. Ak množina A_2 je prázdna, je dôkaz vykonaný v 2.13. Predpokladajme, že množina A_2 je neprázdna. Nech Q_1 (Q_2) je množina všetkých prvkov modulu (P), ktoré sa dajú vyjadriť ako lineárne kombinácie niektorých členov postupnosti A_1 (prvkov množiny A_2). Zrejme Q_1, Q_2 sú moduly a každý prvok $z \in P$ sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare $z_1 + z_2$, $z_1 \in Q_1$, $z_2 \in Q_2$. Utvorme lineárny priestor $(Q_2)_m$ a lineárny priestor $(Q_1)_I$ konštrukciou ako v 2.13 (pomocou postupnosti A_1). Položme $z_n \xrightarrow{I} z$ (1) vtedy a len vtedy, keď

$$z_n = z_n^1 + z_n^2, \quad z_n^1 \xrightarrow{I} z^1, \quad z_n^2 \xrightarrow{m} z^2, \quad z = z^1 + z^2.$$

Ľahko sa zistí, že podmienky 1—5 z definície 1.4 sú splnené [a že príslušný lineárny priestor je izomorfný s lineárnym priestorom $(Q_1)_I \times (Q_2)_m$]. Z toho vyplýva, že postupnosť A_1 má v lineárnom priestore P_m vlastnosť (C).

2.14. *Nech modul (P) má nekonečný počet dimenzií. Potom počet maximálnych prvkov čiastočne usporiadaného systému $\mathfrak{P}$ je väčší alebo rovný ako c.*

Dôkaz:

a) Predpokladajme, že modul (P) má spočítateľnú bázu $\{x_n\}$. Zvoľme si ľubovoľné číslo $\alpha \neq 0$ a položme $x_1' = \alpha x_1$, $x_n' = x_n$ pre $n = 2, 3, \ldots$; potom $\{x_n'\}$ je zrejme tiež báza modulu (P). Uvažujme postupnosť $\{y_n\}$, zostrojenú z postupnosti $\{x_n'\}$ konštrukciou podľa 1.3.1. Podľa 2.13 postupnosť $\{y_n\}$ má vlastnosť (C) v lineárnom priestore P_m. Utvorme lineárny priestor $P_\alpha > P_m$, v ktorom $y_n \to o$. Keďže pre $n \geq 2$ $y_n = x_n' - x_1' = x_n - \alpha x_1$, platí v lineárnom priestore P_α $x_n \to \alpha x_1$.

b) Ak báza modulu (P) je nekonečná a nie je spočítateľná, použijeme k dôkazu analogický postup opierajúci sa o tvrdenie 2.13.1.

2.15. *Sväz $\mathfrak{P}(P)$ je modulárny.*

Dôkaz. Predpokladajme, že by navzájom rôzne prvky $P_i \in \mathfrak{P}(P)$ $(i = 1, \ldots, 5)$ boli čiastočne usporiadané tak, že

$$P_2 \cap P_4 = P_3 \cap P_4 = P_1, \quad P_2 \cup P_4 = P_3 \cup P_4 = P_5, \quad P_2 < P_3.$$

Označme znakom A_i postupnosť, ktorá je nulová v P_i $(i = 1, \ldots, 5)$. Podľa 2.9 každá postupnosť A_5 sa dá vyjadriť v tvare $A_5 = A_3 + A_4$ (1) a zároveň v tvare $A_5 = A_2 + A_4'$ (2). (A opačne, každá postupnosť, ktorá sa dá vyjadriť v tvare $A_3 + A_4$ alebo v tvare $A_2 + A_4$, je nulová v P_5.) Z toho plynie $A_3 = A_2 + (A_4' - A_4)$ (3). Nech $\mathfrak{A}_0$ je množina všetkých postupností $A_4'' = A_4' - A_4$, kde A_4', A_4 vyhovujú rovniciam 1,2 pre vhodné A_2, A_3, A_5. Ak každá postupnosť A_4'' patrí do $O(P_1)$, potom podľa rovnice (3) $P_2 = P_3$, čo je spor s predpokladom. Predpokladajme, že nie všetky postupnosti A'_ν patria do $O(P_1)$. Ľahko sa zistí, že množina $\mathfrak{A}_0$ má vlastnosti žiadané v 2.12.1; označme $P_6 = P(\mathfrak{A}_0)$. Zrejme je potom $P_1 < P_6 \leqq P_4$. Z rovnice $A_3 - A_2 = A''_4$ vyplýva [keďže ľavá strana patrí do $O(P_3)$] $P_6 \leqq P_3$, teda $P_3 \cap P_4 \geqq P_6 > P_1$, čo je spor s predpokladom.

2.16. *Na príkladoch sa dá dokázať, že sväz $\mathfrak{P}(P)$ je nie distributívny.*

3.

V tomto odseku vyšetríme niektoré „patologické“ vlastnosti konvergencie definovanej v 1.4, t. j. také vlastnosti, ktoré sa nevyskytujú pri konvergencii v E_1. Uvažujme o platnosti nasledujúcich výrokov o konvergencii v lineárnom priestore P:

6) $\alpha_n \to \alpha$, $x_n \to x \Rightarrow \alpha_n x_n \to \alpha x$.

7) $x \neq o$, $\alpha_n x \to \alpha x \Rightarrow \alpha_n \to \alpha$.

8) Ak $x_n \to x$, $y_n \to x$ a ak každý člen postupnosti $\{z_n\}$ je členom postupnosti $\{x_n\}$ alebo $\{y_n\}$, potom $z_n \to x$.

3.1. *Nech P_I má rovnaký význam ako v 2.13. Nech $\{\alpha_n\}$ je prostá nulová postupnosť. Postupnosť* $\{\alpha_n x_n\}$ je divergentná v P_I.

Dôkaz. Nepriamo. Predpokladajme, že by sa táto postupnosť dala vyjadriť v tvare

$$\{\alpha_n x_n\} = A_0 + A,$$

kde A_0 je konvergentná postupnosť v P_m a A je lineárna kombinácia čiastočných postupností postupnosti $\{x_n\}$. Myslíme si členy ľavej i pravej strany vyjadrené pomocou bázy B. Podľa 2.4 existuje také prirodzené číslo N, že všetky členy postupnosti A_0 sú lineárne kombinácie prvkov $x_1, \ldots, x_N$. Množina koeficientov prvkov $x_{N+1}, \ldots$ na pravej strane rovnice je konečná; množina týchto koeficientov prvkov na ľavej strane je nekonečná, čím sme dospeli k sporu a tvrdenie je dokázané.

3.2. Predošlý príklad ukazuje, že podmienka 6 vo všeobecnosti pre lineárne priestory neplatí. Ľahko sa zistí, že podmienka 6 platí pre normované lineárne priestory. V práci [3] je dokázané, že podmienka 6 platí aj pre všeobecnejšiu triedu lineárnych priestorov, označovanú v citovanej práci ako priestory B_0.

3.3 *Nech x je reálne číslo, $x > 1$, nech N je konečná množina reálnych čísel, $0 \in N$, nech k je prirodzené číslo. Nech $\{a_n\}$ je postupnosť, ktorej každý člen sa dá vyjadriť v tvare*

$$a_n = \Sigma\, \alpha_i^{(n)} x^{r(n,i)}, \tag{1}$$

pričom sumačné znamienko sa vzťahuje na $i = 1, \ldots, k$ a platí:

1) $\alpha_i^{(n)} \in N$ $(i = 1, \ldots, k,\ n = 1, 2, \ldots)$,

2) *$\{r(n, i)\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel $(i = 1, \ldots, k)$. Potom postupnosť $\{a_n\}$ je alebo divergentná, alebo nulová.*

Dôkaz. Pre $k = 1$ je správnosť tvrdenia zrejmá. Predpokladajme, že naše tvrdenie je dokázané pre $1, \ldots, k - 1$. Predpokladajme, že postupnosť $\{a_n\}$ je konvergentná. Skupiny členov za sumačným znamienkom v rovnici (1), ktoré sa navzájom rušia, vynechajme.

a) Ak po vynechaní dostávame nekonečne mnoho indexov n, pre ktoré je za sumačným znamienkom menej ako k členov, ľahko sa zistí, že podľa indukčného predpokladu musí byť $a_n \to 0$.

b) V opačnom prípade sa dá z postupnosti (1) vybrať čiastočná postupnosť tak že sa nijaké skupiny členov za sumačnými znamienkami nerušia. Ďalej vyšetrujeme túto čiastočnú postupnosť. Označme

$$n' = \min r(n, i)\ (i = 1, \ldots, k),\quad r(n, i) - n' = m(n, i). \tag{2}$$

Potom

$$a_n x^{-n'} = (\Sigma\, \alpha_i^{(n)} x^{m(n,i)} + \alpha_n) \to 0, \tag{3}$$

kde sumácia sa vzťahuje na členy, pre ktoré $m(n, i) > 0$ a α_n je súčet tých koeficientov $\alpha_i^{(n)}$, pre ktoré $m(n, i) = 0$. Nech k_1 je najmenšie celé nezáporné číslo, pre ktoré platí: z postupnósti (3) sa dá vybrať čiastočná postupnosť, v ktorej každé sumačné znamienko zahrňuje presne k_1 nenulových sčítancov. V ďalšom uvažujeme o takýmto spôsobom vybranej čiastočnej postupnosti a ponechávame pre ňu označenie (3). Z tejto postupnosti vyberáme ďalšie čiastočné postupnosti nasledovne:

1) Ak je postupnosť $m(n, 1)$ ohraničená (neohraničená), vyberieme z postupnosti (3) čiastočnú postupnosť tak, aby príslušná čiastočná postupnosť postupnosti $m(n, 1)$ bola stacionárna (rastúca), 2) v získanej postupnosti vykonáme to isté pre $m(n, 2), \ldots, k_1)$ v získanej postupnosti vykonáme to isté pre $m(n, k_1)$. Dostávame postupnosť tvaru

$$\Sigma\, \alpha_i^{(n)} x^{m(n,i)} + \beta_n \to 0 \tag{4}$$

v ktorej sumačné znamienko zahrňuje k_2 členov, $0 \leqq k_2 \leqq k_1 \leqq k - 1$ a platí 1) ak $i = 1, \ldots, k_2$, potom $m(n, i) \to \infty$, 2) množina všetkých čísel β_n je konečná a neobsahuje nulu (ak $\beta_n = 0$, niektoré členy za sumačným znamienkom v pôvodnej postupnosti by sa rušili, čo je spor s predpokladom). Z postupnosti (4) vyberme čiastočnú postupnosť tak, aby príslušná čiastočná postupnosť $\{\beta_n\}$ bola stacionárna: $\beta_n = \beta$. Podľa predošlého je $\beta \neq 0$. Ak $k_2 = 0$, dostávame $\beta_n = \beta \neq 0$, $\beta_n \to 0$, čo je nie možné. Ak $k_2 > 0$, vyplýva zo (4)

$$\Sigma\, \alpha_i^{(n)} x^{m(n,i)} \to -\beta \neq 0,$$

pričom sumačné znamienko na ľavej strane zahrňuje k_2 členov, $k_2 < k$ a príslušná postupnosť vyhovuje predpokladom dokazovanej vety. Podľa indukčného predpokladu musí byť $\beta = 0$, čím sme dospeli ku sporu. Prípad b) teda nemôže nastať. Tým je dôkaz vykonaný.

Označme znakom $\mathfrak{P}$ množinu všetkých lineárnych priestorov P_i, pre ktoré platí $(P_i) = E_1$; konvergenciu v P_i označme $x_n \xrightarrow{i} x$, „obvyklú" konvergenciu v E_1 znakom $x_n \to x$; príslušný lineárny priestor s takouto (obyčajnou) konvergenciou označme P_0. Zrejme platí:

3.4. *Lineárny priestor P_0 je minimálny v $\mathfrak{P}$.*

3.5. *Lineárny priestor P_0 je nie maximálny v $\mathfrak{P}$.*

Dôkaz. Nech $x \in P_0$, $x > 1$. Postupnosť $\{x^n\}$ má v P_0 podľa 3.3 vlastnosť C. Tým je podľa 2.6 tvrdenie dokázané.

Nech P_1 je príslušný lineárny priestor, v ktorom $x^n \xrightarrow{1} 0$, zostrojený podľa 2.7 (dôkaz, časť b) z lineárneho priestoru P_0 pomocou postupnosti $\{x^n\}$.

3.6. *Vlastnosť 7 vo všeobecnosti pre lineárne priestory neplatí (ani pre priestory, ktorých modul má konečný počet dimenzií).*

Dôkaz. Uvažujme priestor P_1 definovaný v 3.5. Platí $x^n \,.\, 1 \xrightarrow{1} 0.1$, neplatí však $x^n \to 0$.

3.7. *Vlastnosť 7 vyplýva z vlastnosti 6.*

Dôkaz. Nech lineárny priestor P (s konvergenciou, označovanou $x_n \to x$) nemá vlastnosť 7. Existuje teda postupnosť $\{\alpha_n\}$ a prvok $x \in P$, $x \neq 0$ taký, že $\alpha_n x \to \alpha x$ a neplatí $\alpha_n \to \alpha$. Označme $\beta_n = \alpha_n - \alpha$. Je teda $\beta_n x \to o$, a neplatí $\beta_n \to 0$. Z postupnosti $\{\beta_n\}$ sa dá vybrať alebo čiastočná postupnosť $\{\beta'_n\}$, $\beta'_n \to c \neq 0$, alebo čiastočná postupnosť $\{\beta''_n\}$, $|\beta''_n| \to \infty$. V prvom prípade platí $\beta'_n x \to cx \neq o$, čo je spor s predpokladom. V druhom prípade platí $(\beta''_n)^{-1} \to 0$, $\beta''_n x \to o$, ale postupnosť $(\beta''_n)^{-1}\, \beta''_n x = x$ je nie nulová, teda lineárny priestor P nesplňuje vlastnosť 6.

Ľahko sa dokáže správnosť tvrdenia:

3.8. *Minimálny lineárny priestor P_m má vlastnosť 6) a 7). Maximálny lineárny priestor nemá vlastnosť 7).*

3.9. Nech P_I má rovnaký význam ako v 2.13. Postupnosť $x_1, x_1, x_2, x_2, x_3, x_3, \ldots$ (1) je divergentná v P_I.

Dôkaz. Predpokladajme, že postupnosť (1) je konvergentná v P_I. Označme jej všeobecný člen znakom y_n. Potom platí

$$y_n = x_n^1 + x_n^2, \tag{2}$$

kde $\{x_n^1\}$ je konvergentná postupnosť v P_m a $\{x_n^2\}$ je lineárna kombinácia čiastočných postupností postupnosti $\{x_n\}$. Myslíme si pravú i ľavú stranu rovnice (2) vyjadrenú pomocou bázy $B = \{x_n\}$. Existuje prirodzené číslo N_1 tak, že všetky členy postupnosti $\{x_n^1\}$ sú lineárne kombinácie prvkov $x_1, \ldots, x_{N_1}$. Vo vyjadrení prvku x_n^2 pomocou prvkov bázy B vystupujú len členy x_i, $i \geqq n$. Zvoľme si číslo $n > N_1$.

V rovnici

$$y_{2n} = x_{2n}^1 + x_{2n}^2$$

je ľavá strana rovná x_n, pravá strana je lineárnou kombináciou prvkov $x_1, \ldots, x_{N_1}$ ($N_1 < n$) a niektorých prvkov x_i, $i \geqq 2n$, čím sme dospeli ku sporu.

Dôsledok. Vlastnosť 8 vo všeobecnosti pre lineárne priestory neplatí.

LITERATÚRA

1. Люстерник Л. А. и Соболев В. И., Элементы функционального анализа, Москва 1951. 2. Birkhoff G., Lattice theory, New York 1948 (Теория структур, Москва 1952). 3. Mazur—Orlicz, Sur les espaces métriques linéaires, Studia Math. 10 (1948), 184—208. 4. Katětov M., O normovaných vektorových prostorech, Rozpravy II. tř. České akademie, LIII, 45.

Došlo 2. III. 1955.

О СХОДИМОСТИ В ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ЯН ЯКУБИК

Выводы

Пусть E_1 — кольцо всех вещественных чисел, пусть M — модуль (линейная система)
над кольцом E_1. Линейное пространство мы определими как в книге [1]. Если P — линей-
ное пространство, соответствующую линейную систему (в которой не рассматривается
сходимость) мы обозначим через (P). Пусть $\mathfrak{P}$ — множество всех линейных пространств
P_i, для которых имеет место (P_i) = M. Если $P_1, P_2 \in \mathfrak{P}$ и если каждая последователь-
ность $\{x_n\}$, которая в линейном пространстве P_1 сходится к элементу x, в линейном про-
странстве P_2 тоже сходится к элементу x, мы пишем $P_1 \leqq P_2$. Этим мы определили ча-
стичное упорядочение множества $\mathfrak{P}$. В работе доказываются некоторые свойства частично
упорядоченного множества $\mathfrak{P}$; далее рассматриваются некоторые „патологические" свой-
ства сходимости в линейных пространствах. Некоторые результаты:
Множество $\mathfrak{P}$ содержит наименьший элемент P_0 и (хоть один) максимальный эле-
мент P_m. Дано и более конструктивное определение линейных пространств P_0, P_m.
Если модуль M имеет бесконечную размерность, тогда множество всех максимальных
элементов P_m в $\mathfrak{P}$ имеет мощность большую или равную c (c — мощность контину-
ума). Если $P \in \mathfrak{P}$, мы обозначим через $\mathfrak{P}$ (P) множество всех $P_i \in \mathfrak{P}$, для которых
$P_i \leqq P$. Тогда $\mathfrak{P}$ (P) является дедекиндовой структурой. Пусть $x, x_n \in M$, $\alpha, \alpha_n \in E_1$.
На примерах доказывается: Если $\alpha_n \to \alpha$, $x_n \to x$, может случиться, что последователь-
ность $\{\alpha_n x_n\}$ расходится. Если x не является нулевым элементом в M и если $\alpha_n x \to \alpha x$,
может случиться, что не имеет место $\alpha_n \to \alpha$. Если $x_1, x_2, x_3 \ldots$ — сходящаяся последо-
вательность, может случиться, что последовательность $x_1, x_1, x_2, x_2, x_3, x_3 \ldots$ расходится.