MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, VI, 2 — 1956

O OKRAJOVEJ ÚLOHE ODPOROVEJ GEOELEKTRIKY PRE PRETIAHNUTÝ ROTAČNÝ ELIPSOID

T. KOLBENHEYER

Katedra baníckeho meračstva a geofyziky Vysokej školy technickej v Košiciach

Okrajovú úlohu o homogénnom pretiahnutom rotačnom elipsoide v homogénne vodivom neohraničenom priestore pri sýtení bodovým zdrojom vyriešili K. L. Cook a R. G. v. Nostrand [1]. Riešenie tejto úlohy má z hľadiska aplikovanej geoelektriky svoj význam v tom, že umožňuje napr. vypracovať vhodnejší teoretický model synklinály, než je model s nekonečným hruhovým polvalcom [2, str. 100—102]; vypočítať vplyv pretiahnutého telesa na umelé geoelektrické prúdové pole a pod.

V citovanej práci [1] autori uvádzajú vzorce pre potenciál prúdového poľa bez odvodenia a nezaoberajú sa otázkou konvergencie nekonečných radov, vyjadrujúcich tento potenciál. V tejto štúdii odvodíme najskôr základné vzťahy pre homogénny pretiahnutý rotačný elipsoid a dokážeme konvergenciu príslušných radov.

1. Niektoré pomocné vzorce a vety

Okrajovú úlohu pre pretiahnutý rotačný elipsoid budeme riešiť v sféroidálnej súradnicovej sústave. Budeme pritom používať symboliku zavedenú v [3, str. 138—174] aj tam uvedené definície Legendrových funkcií oboch druhov. Rovnica uvažovaného elipsoidu v pomocnej kartézskej súradnicovej sústave nech je

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

kde z je vzdialenosť ľubovoľného bodu na ploche elipsoidu od jeho rovníkovej roviny, r vzdialenosť tohože bodu od rotačnej osi elipsoidu. Pre ľubovoľný bod možno zaviesť sféroidálne súradnice ξ a η, súvisiace s jeho kartézskymi súradnicami podľa vzťahov

$$z = e\xi\eta, \quad r = e\sqrt{(1 - \xi^2)(\eta^2 - 1)}, \tag{2}$$

pričom treťou sféroidálnou súradnicou je azimut φ meraný od niektorej pevne zvolenej poludníkovej roviny. V rovniciach (2) je

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad -1 \leqq \xi \leqq 1, \quad \eta \geqq 1. \tag{3}$$

Súradnice ξ a η dajú sa vyjadriť pomocou z a r vzťahmi

$$\xi = \pm \frac{1}{e\sqrt{2}}\left[r^2 + z^2 + e^2 - \sqrt{(r^2 + e^2 + z^2)^2 - 4e^2z^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$
$$\eta = + \frac{1}{e\sqrt{2}}\left[r^2 + z^2 + e^2 + \sqrt{(r^2 + e^2 + z^2)^2 - 4e^2z^2}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Plochy η = konšt. sú pretiahnuté, rotačné elipsoidy konfokálne s elipsoidom (1), ktorý tiež budeme nazývať *základným* elipsoidom a rovnica ktorého v sféroidálnej sústave je

$$\eta = \frac{a}{e} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} = E.$$

Plochy ξ = konšt. tvoria polovice dvojdielnych rotačných hyperboloidov taktiež konfoká nych s elipsoidom (1).

Štvorec elementu dĺžky sa dá v sféroidálnej súradnicovej sústave vyjadriť kvadratickým tvarom

$$ds^2 = h_1^2\, d\xi^2 + h_2^2\, d\eta^2 + h_3^2\, d\varphi^2 + h^2, \tag{5a}$$

v ktorom

$$h_1 = e\sqrt{\frac{\eta^2 - \xi^2}{1 - \xi^2}}, \quad h_2 = e\sqrt{\frac{\eta^2 - \xi^2}{\eta^2 - 1}}, \quad h_3 = r = e\sqrt{(1 - \xi^2)(\eta^2 - 1)}. \tag{5b}$$

V dôsledku toho Laplaceova diferenciálna rovnica pre ľubovoľnú harmonickú funkciu V má v tejto súradnicovej sústave tvar

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[(1 - \xi^2)\frac{\partial V}{\partial \xi}\right] + \frac{\partial}{\partial \eta}\left[(\eta^2 - 1)\frac{\partial V}{\partial \eta}\right] + \frac{\eta^2 - \xi^2}{(1 - \xi^2)(\eta^2 - 1)}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{6}$$

[4, str. 340] a dá sa riešiť Fourierovou metódou pomocou Legendrových funkcií prvého a druhého druhu. V skutočnosti, ak kladieme ako obvykle

$$V(\xi, \eta, \varphi) = X(\xi)Y(\eta)\begin{matrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{matrix}, (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{7}$$

potom z rovnice (6) vyplýva najsamprv

$$\frac{1}{X(\xi)}\frac{d}{d\xi}[(1 - \xi^2)X'(\xi)] - \frac{m^2}{1 - \xi^2} =$$
$$= \frac{1}{Y(\eta)}\frac{d}{d\eta}\left[(1 - \eta^2)Y'(\eta) - \frac{m^2}{1 - \eta^2}\right] = k = \text{konšt.}$$

A ak ďalej kladieme $k = -n(n + 1)$, pričom volíme $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, vidíme, že $X_{(\xi)}$ a $Y_{(\eta)}$ sa dajú vyjadriť pomocou pridružených Legendrových funkcií prvého a druhého druhu [3, str. 153]:

$$X(\xi) = A_n^m P_n^m(\xi) + B_n^m Q_n^m(\xi),$$
$$Y(\eta) = C_n^m P_n^m(\eta) + D_n^m Q_n^m(\eta), \tag{7a}$$

kde A_n^m, B_n^m, C_n^m a D_n^m sú konštanty.

Funkcie $Q_n^m(u)$ odvodzujeme z funkcií $Q_n(u)$ takým istým spôsobom ako funkcie $P_n^m(u)$ z Legendrových polynómov $P_n(u)$, t. j.

$$Q_n^m(u) = |1 - u^2|^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_n(u)}{du^m}.$$

Z toho vyplýva, že všetky tieto funkcie sú nespojité pri $u = \pm 1$ a nadobúdajú pri týchto hodnotách svojho argumentu nekonečne veľkú hodnotu, lebo sama funkcia $Q_n(u)$ má tvar

$$Q_n(u) = \frac{1}{2}P_n(u)\, ln\left|\frac{1 + u}{1 - u}\right| + R_n(u)$$

[3, str. 150—151], v ktorom $R_n(u)$ je polynóm stupňa $n-1$. Preto vo všetkých prípadoch, keď body rotačnej osi o súradniciach $\xi = \pm 1, \eta > 1$ majú byť regulárnymi bodmi poľa, kladieme pri riešení okrajovej úlohy pre pretiahnutý rotačný elipsoid $B_n^m = 0$. Súradnica η nadobúda hodnotu 1 v každom bode úsečky spojujúcej obe ohniská základného elipsoidu, čo vyplýva zo vzťahov (2) a (3). Pretože táto úsečka leží vo vnútri každého elipsoidu konfokálnej sústavy, je zrejmé, že pri všetkých funkciách $V(\xi, \eta, \varphi)$, ktoré sú harmonické všade vo vnútri niektorého z týchto elipsoidov, včítane oboch ohnísk, je aj $D_n^m = 0$.

Pri $u \to \infty$ vzrastá $P_n^m(\mu)$, k nekonečnu ako u^n, zatiaľ čo $Q_n^m(u)$ konverguje k nule ako u^{-n-1} [3, str. 155]. Ak teda požadujeme, žeby funkcia V mala konečnú hodnotu i pri $u \to \infty$, musí byť aj $C_n^m = 0$.

Funkcie $V(\xi, \eta, \varphi)$ definované vzťahmi (7) a (7a) nazývame harmonickými funkciami pretiahnutého rotačného elipsoidu (sféroidu). Z práve rozvedenej úvahy možno usúdiť, že funkcie harmonické všade vo vnútri niektorého elipsoidu konfokálnej sústavy môžeme napísať vo forme nekonečného radu

$$V = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} P_n^m(\xi)P_n^m(\eta)(A_n^m \cos m\varphi + B_n^m \sin m\varphi), \tag{8a}$$

funkcie harmonické všade zvonka uvažovaného elipsoidu a v nekonečnu regulárne vo forme radu

$$V = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} P_n^m(\xi)Q_n^m(\eta)(C_n^m \cos m\varphi + D_n^m \sin m\varphi), \tag{8b}$$

pričom A_n^m, B_n^m, C_n^m a D_n^m sú opäť konštanty. Podrobnejšie sa rozoberá táto otázka v [5, str. 396—403].

Pri riešení okrajovej úlohy pre pretiahnutý rotačný elipsoid treba potenciál neporušeného primárneho poľa rozložiť v rad podľa sféroidálnych harmonických funkcií. Pri bodovom sýtení je tento potenciál

$$V_0 = \frac{I\varrho}{4\pi R} = \frac{q}{R}, \tag{9}$$

kde I je intenzita sýtneho prúdu, ϱ špecifický odpor prostredia, v ktorom sa nachádza zdroj. Rad pre harmonickú funkciu 1/R odvodený je napr. v [5, str. 399]. Ak súradnice zdroja sú ξ_0, η_0, φ_0, a súradnice bodu, v ktorom uvažujeme primárny potenciál, ξ, η, φ, platí pri našom označovaní

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m (2n+1)(2 - \delta_m^0) \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right]^2 P_n^m(\xi_0) P_n^m(\xi) Q_n^m(\eta_0) P_n^m(\eta) \cos m(\varphi - \varphi_0) \tag{10a}$$

alebo

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m (2n+1)(2 - \delta_m^0) \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right]^2 P_n^m(\xi_0) P_n^m(\xi) P_n^m(\eta_0) Q_n^m(\eta) \cos m(\varphi - \varphi_0) \tag{10b}$$

podľa toho, či je $\eta_0 > \eta$ alebo $\eta_0 < \eta$. V rovniciach (10a, b) je δ_m^0 Kroneckerov symbol, t. j. $\delta_m^0 = 0$ pri $m = 1, 2, 3, \ldots$, zatiaľ čo $\delta_0^0 = 1$.

2. Riešenie okrajovej úlohy pri bodovom sýtení

Majme základný elipsoid o rovnici

$$\eta = E = \text{konšt.},$$

vo vnútri ktorého nech je špecifický odpor všade ϱ_2, zatiaľ čo homogénne prostredie vyplňujúce celú vonkajšiu oblasť $\eta > E$ má špecifický odpor ϱ_1. Zdroj, v ktorom sýtime rovnosmerným prúdom konštantnej intenzity I, nech má súradnice ξ_0, η_0, φ_0.

Uvážime najsamprv prípad, keď sa zdroj nachádza mimo elipsoidu, t. j. $\eta_0 > E$ (vonkajšie sýtenie). Pre potenciál primárneho poľa platia tu vzťahy (9) a (10a), pričom kladieme $\varrho = \varrho_1$. Skutočný potenciál vo vonkajšom priestore označme V_1, vo vnútri elipsoidu V_2 a píšme

$$V_1 = V_0 + W_1, \quad V_2 = V_0 + W_2. \tag{11}$$

Funkcie W_1 a W_2 sú prídatné (indukované) potenciály vo vonkajšej oblasti a vo vnútri elipsoidu. Každá z nich je harmonická vo svojej oblasti, a nemá v nej žiadnu singularitu. Preto v súlade s poznatkami z kap. 1 a prihliadajúc na súmernosť poľa podľa roviny preloženej osou rotácie elipsoidu a zdrojom píšeme

$$\begin{aligned} W_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} A_n^m P_n^m(\xi) Q_n^m(\eta) \cos m(\varphi - \varphi_0), \\ W_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} B_n^m P_n^m(\xi) P_n^m(\eta) \cos m(\varphi - \varphi_0), \end{aligned} \tag{12}$$

kde A_n^m a B_n^m sú predbežne neznáme konštanty, ktoré určíme z okrajových podmienok platných pre potenciály V_1 a V_2 na ploche základného elipsoidu $\eta = E$. Tieto podmienky sú

$$\begin{aligned} (V_1)_E &= (V_2)_E, \\ \frac{1}{\varrho_1}\left(\frac{\partial V_1}{\partial \eta}\right)_E &= \frac{1}{\varrho_2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial \eta}\right)_E. \end{aligned} \tag{13}$$

Z prvej okrajovej podmienky dostávame

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} A_n^m P_n^m(\xi) Q_n^m(E) \cos m(\varphi - \varphi_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} B_n^m P_n^m(\xi) P_n^m(E) \cos m(\varphi - \varphi_0),$$

a pretože tento vzťah platí identicky pre všetky v úvahu prichádzajúce hodnoty ξ a φ, musí tiež platiť

$$A_n^m Q_n^m(E) = B_n^m P_n^m(E). \tag{14a}$$

Ak v rovniciach (10a, b) položíme pre krátkosť

$$\Delta_n^m = (-1)^m \frac{(2n+1)(2 - \delta_m^0)}{e} \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right]^2, \tag{15}$$

označíme pomer oboch špecifických odporov $\varrho_2/\varrho_1 = \varkappa$, $I_{\varrho_1}/4\pi = q_1$, druhú okrajovú podmienku možno so zreteľom na rovnice (10a), (11) a (12) napísať v tvare

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} [-\varkappa A_n^m Q_n^{m\prime}(E) + B_n^m P_n^{m\prime}(E)] P_n^m(\xi) \cos m(\varphi - \varphi_0) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} q(\varkappa - 1) \Delta_n^m P_n^m(\xi_0) P_n^m(\xi) Q_n^m(\eta_0) P_n^{m\prime}(E) \cos m(\varphi - \varphi_0)$$

a táto rovnica platí identicky pre všetky hodnoty ξ a φ v intervaloch $-1 \leqq \xi \leqq 1$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$. Preto

$$-\varkappa A_n^m Q_n^{m\prime}(E) + B_n^m P_n^{m\prime}(E) = q_1(\varkappa - 1) \Delta_n^m P_n^m(\xi_0) Q_n^m(\eta_0) P_n^{m\prime}(E). \tag{14b}$$

Riešením sústavy rovníc (14a) a (14b) dostávame hodnoty koeficientov A_n^m a B_n^m:

$$\begin{aligned} A_n^m &= \frac{q_1(\varkappa - 1) \Delta_n^m P_n^m(\xi_0) Q_n^m(\eta_0) P_n^{m\prime}(E) P_n^m(E)}{P_n^{m\prime}(E) Q_n^m(E) - \varkappa P_n^m(E) Q_n^{m\prime}(E)}, \\ B_n^m &= \frac{q_1(\varkappa - 1) \Delta_n^m P_n^m(\xi_0) Q_n^m(\eta_0) P_n^{m\prime}(E) Q_n^m(E)}{P_n^{m\prime}(E) Q_n^m(E) - \varkappa P_n^m(E) Q_n^{m\prime}(E)}. \end{aligned} \tag{16}$$

Rovnice (11) a (12) predstavujú spolu so vzorcami (16) riešenie okrajovej úlohy pri sýtení bodovým zdrojom umiestneným vo vonkajšom priestore. Postup riešenia je ten istý aj pri sýtení vo vnútri elipsoidu, lenže v tomto prípade použijeme miesto vzťahu (10a) rovnicu (10b). Potenciál neporušeného poľa je teraz

$$V_0 = \frac{I \varrho_2}{4\pi R} = \frac{q_2}{R}.$$

Z prvej okrajovej podmienky dostávame tak isto ako predtým

$$A_n^m Q_{n(E)}^m = B_n^m P_{n(E)}^n ,$$

zatiaľ čo druhá podmienka vedie k rovnici

$$-\varkappa A_n^m Q_n^{m\prime}(E) + B_n^m P_n^{m\prime}(E) = q_2(\varkappa - 1) \Delta_n^m P_n^n(\xi_0) P_n^m(\eta_0) Q_n^{m\prime}(E)$$

Koeficienty A_n^m a B_n^m majú pri sýtení vo vnútri elipsoidu hodnotu

$$A_n^m = \frac{q_2(\varkappa - 1)\Delta_n^m P_n^n(\xi_0) P_n^{\prime}(\eta_0) Q_n^{n\prime}(E) P_n^m(E)}{P_n^{m\prime}(E) Q_n^m(E) - \varkappa P_n^n(E) Q_n^{n\prime}(E)} ,$$

$$B_n^m = \frac{q_2(\varkappa - 1)\Delta_n^m P_n^n(\xi_0) P_n^n(\eta_0) Q_n^{m\prime}(E) Q_n^m(E)}{P_n^{n\prime}(E) Q_n^m(E) - \varkappa P_n^m(E) Q_n^{n\prime}(E)} . \tag{17}$$

Dokážeme, že spoločný menovateľ zlomkov na pravej strane rovníc (16) a (17), t. j. determinant príslušných lineárnych sústav, je odlišný od nuly. Súčasne si objasníme niektoré vlastnosti Legendrových funkcií, o ktoré sa budeme opierať v niektorých ďalších úvahách.

Pridružené funkcie definujeme pre argumenty $u > 1$ známymi vzťahmi

$$P_n^m(u) = (u^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(u)}{du^m} , \quad Q_n^m(u) = (u^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_n(u)}{du^m} . \tag{18}$$

Pretože Legendrov polynóm $P_n(u)$ má n reálnych koreňov v intervale $(-1, 1)$ a má pri $u \geqq 1$ kladnú hodnotu, platí o jeho m-tej derivácii $(m = 0, 1, 2, \ldots n)$, že má v uvažovanom intervale n-m koreňov. Pri tej istej podmienke $u \geqq 1$ je preto $P_n^m(u)$ vždy kladné. Z prvej rovnice (18) dostávame derivovaním

$$P_n^{m\prime}(u) = \frac{mu}{u^2 - 1} P_n^m(u) + \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} P_n^{m+1}(u), \tag{19}$$

z čoho vidíme, že pri $u > 1$ je vždy aj $P_n^{m\prime}(\mu) \geqq 0$ (odmocninu v menovateli v druhom člene vpravo treba brať s kladným znamienkom). Znamienko rovnosti platí len pri $m = n = 0$.

Pre funkciu $Q_n(u)$ platí pri uvažovaných hodnotách argumentu vzťah

$$Q_n(u) = 2^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(n+s)!\,(n+2s)!}{s!\,(2n+2s+1)!\,u^{n+2s+1}}$$

[3, str. 149] a v dôsledku druhej rovnice (18) je

$$Q_n^m(u) = (-1)^m\, 2^n (u^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(n+s)!\,(n+m+2s)!}{s!\,(2n+2s+1)!\,u^{n+m+2s+1}} . \tag{20}$$

Ak túto rovnicu derivujeme podľa u, po trocha zdĺhavej, ale ináč elementárnej úprave dostávame

$$Q_n^{m\prime}(u) = (-1)^{m+1}\, 2^{n-1} (u^2 - 1)^{\frac{m}{2} - 1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(n+s-1)!\,(n+m+2s-1)!\,[m(n+2s+1) + n(n+1)]}{s!\,(2n+2s-1)!\,(2n+2s+1)\,u^{n+m+2s}} . \tag{21}$$

Vidíme, že $Q_n^m(u)$ a $Q_n^{m\prime}(u)$ je pri $u > 1$ taktiež vždy odlišné od nuly a že $Q_n^m(u)$ má také znamienko ako $(-1)^m$, $Q_n^{m\prime}(u)$ také ako $(-1)^{m+1}$. Pretože pomer špecifických odporov $\varkappa$ je prirodzene vždy kladný a pretože v zmysle definícií uvedených v kap. 1 je vždy $E > 1$, vyplýva, že oba členy výrazu

$$D_n^m(E) = P_n^{n\prime}(E) Q_n^m(E) - \varkappa P_n^m(E) Q_n^{m\prime}(E) ,$$

predstavujúceho spoločného menovateľa zlomkov na pravej strane rovníc (16) a (17), sú odlišné od nuly a majú rovnaké znamienko. Preto $D_n^m(E)$ je nutne odlišné od nuly a má, ako z predošlých úvah vyplýva, také znamienko ako $(-1)^m$.

Jedinú výnimku tvorí prípad $\varkappa = 0$, $\varrho_2 = 0$, t. j. prípad dokonale vodivého elipsoidu), lebo $P_0^{0\prime}(E) = P_0^{\prime}(E) = 0$, a teda v tomto prípade je $D_0^0(E) = 0$. Rovnica (14b) je identicky splnená pre $n = m = 0$, koeficient B_0^0 môžeme voliť ľubovoľne, zatiaľ čo pre koeficient A_0^0 platí rovnica (14a). Okrajová úloha v pôvodnom znení nie je preto riešiteľná jednoznačne a do úvahy prichádza tu iba vonkajšie sýtenie (vnútorné bodové sýtenie má ten istý účinok ako sýtenie celou dokonale vodivou elipsoidovou vložkou). Potenciál vo vnútri elipsoidu je pritom konštantný, o čom sa ľahko presvedčíme zo vzťahov (10a), (11), (12) a (16).

Z diferenciálnej rovnice pridruženej funkcie

$$(u^2 - 1)\, Q_n^{m\prime\prime}(u) = \left[n(n+1) + \frac{m^2}{u^2 - 1}\right] Q_n^m(u) - 2u Q_n^{m\prime}(u) \tag{22}$$

vyplýva so zreteľom na odvodené znamienkové pravidlá, že hodnota funkcie $Q_n^{m\prime\prime}(u)$ má pri $u > 1$ také znamienko ako $Q_n^m(u)$, t. j. ako $(-1)^m$. Pretože $Q_n^{m\prime}$ má opačné znamienko ako Q_n^m a $Q_n^{m\prime\prime}$, je zrejmé, že tak Q_n^m ako $Q_n^{m\prime}$ sú funkcie v absolútnej hodnote monotónne klesajúce v intervale $(1, \infty)$.

Poukázali sme už na to, že P_n^m je v intervale $(1, \infty)$ kladná, monotónne vzrastajúca funkcia (pretože $P_n^{m\prime}$ je v tomto intervale kladné). Dokážeme ešte, že v tom istom intervale je aj $P_n^{m\prime\prime}$ vždy kladné, a teda že aj $P_n^{m\prime}$ je stúpajúca funkcia.

Vychádzajúc z diferenciálnej rovnice pridružených funkcií môžeme sa ľahko presvedčiť o správnosti vzťahu

$$(u^2 - 1)(P_n^{m\prime\prime} Q_n^m - P_n^m Q_n^{m\prime\prime}) = 2u\,(P_n^{m\prime} Q_n^m - P_n^m Q_n^{m\prime}),$$

z čoho

$$P_n^{m\prime\prime} = \frac{2u(P_n^{m\prime} Q_n^m - P_n^m Q_n^{m\prime})}{(u^2 - 1)\, Q_n^m} + \frac{P_n^m Q_n^{m\prime\prime}}{(u^2 - 1)\, Q_n^m} . \tag{23}$$

Zo znamienkových pravidiel, ktoré sme odvodili pre P_n^m, $P_n^{m\prime}$, Q_n^m, $Q_n^{m\prime}$ a $Q_n^{m\prime\prime}$, vyplýva, že Wronského determinant dvojice (P_n^m, Q_n^m), vystupujúci v čitateli prvého zlomku, má to isté znamienko ako Q_n^m, t. j. ako $(-1)^m$, a to isté znamienko má aj čitateľ druhého zlomku. Preto pri $u > 1$ musí byť $P_n^{m\prime\prime}(u)$ kladné a nemôže sa rovnať nule, lebo napr. prvý člen na pravej strane rovnice (22) a v dôsledku toho aj druhý člen na pravej strane rovnice (23) je od nuly odlišný.

Dokážeme teraz, že rad pre reciprokú hodnotu vzdialenosti dvoch bodov

$$\frac{1}{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \Delta_n^m P_n^m(\xi_0) P_n^m(\xi) P_n^m(\eta) Q_n^m(\eta_0) \cos m(\varphi - \varphi_0),$$

kde $\eta_0 > \eta$ a činiteľ Δ_n^m je definovaný vzorcom (15), možno derivovať po členoch podľa premennej η, lebo rad

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{R}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \Delta_n^m P_n^m(\xi_0) P_n^m(\xi) P_n^{m\prime}(\eta) Q_n^m(\eta_0) \cos m(\varphi - \varphi_0) \tag{24}$$

konverguje rovnomerne v každej oblasti vymedzenej dvoma elipsoidmi o parametroch $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$, vyhovujúcich podmienke $1 < \bar{\eta}_1 < \bar{\eta}_2 < \eta_0$. O túto vetu opierali sme sa mlčky pri použití druhej okrajovej podmienky, keď sme derivovali reciprokú hodnotu vzdialenosti podľa normály k základnému elipsoidu. Aby sme ju dokázali, odvodíme najsamprv niekoľko ďalších pomocných viet a vzorcov pre pridružené Legendrove funkcie oboch druhov.

Podľa známej adičnej teorémy pre Legendrove polynómy [6, str. 74—76], [3, str. 160—161] je

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{m=0}^{n} (2 - \delta_m^0) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\vartheta_0) P_n^m(\cos\vartheta) \cos m(\varphi - \varphi_0), \tag{25}$$

kde (ϑ_0, φ_0) a (ϑ, φ) sú polárne súradnice ľubovoľných dvoch bodov ležiacich na jednotkovej guli, a γ je uhol, ktorý zvierajú prievodiče oboch týchto bodov, t. j.

$$\cos\gamma = \cos\vartheta_0 \cos\vartheta + \sin\vartheta_0 \sin\vartheta \cos(\varphi - \varphi_0).$$

Ak v rovnici (25) položíme $\vartheta_0 = \vartheta$, $\varphi_0 = \varphi$ a teda $\cos\gamma = 1$, dostávame vzťah

$$\sum_{m=0}^{n} (2 - \delta_m^0) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} [P_n^m(\cos\vartheta)]^2 = 1,$$

ktorý platí pre ľubovoľné δ. Pretože všetky členy súčtu na ľavej strane sú kladné, platí zrejme nerovnosť

$$|P_n^m(\cos\vartheta)| \leq \sqrt{\frac{(n+m)!}{(2 - \delta_m^0)(n-m)!}}. \tag{26}$$

V rovnici (24) vystupujú premenné ξ_0 a ξ, meniace sa v intervale $(-1, 1)$. Vzhľadom na vzťah (15) a na nerovnosť (26) je teda

$$|\Delta_n^m P_n^m(\xi_0) P_n^m(\xi) \cos m(\varphi - \varphi_0)| \leq \frac{2n+1}{e} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}. \tag{27}$$

Vychádzame ďalej zo známeho vzťahu

$$Q_n^{m\prime}(\eta) P_n^m(\eta) - P_n^{m\prime}(\eta) Q_n^m(\eta) = \frac{(-1)^{m+1}}{\eta^2 - 1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \tag{28}$$

[3, str. 158]. Ak prihliadame na to, že $Q_{n(\eta)}^m$ konverguje k nule pri $\eta \to \infty$, ľahko dokážeme, že je

$$Q_n^m(\eta) = (-1)^m \frac{(n+m)!}{(n-m)!} P_n^m(\eta) \int_\eta^\infty \frac{du}{[P_n^m(u)]^2 (u^2 - 1)}. \tag{29}$$

Pretože $P_n^m(u)$ je v intervale (η, ∞) monotónne vzrastajúca funkcia, vyplýva ďalej, že je

$$|Q_n^m(\eta)| < \frac{(n+m)!}{(n-m)! P_n^m(\eta)} \int_\eta^\infty \frac{du}{u^2 - 1} = \frac{1}{2 P_n^m(\eta)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \ln \frac{\eta + 1}{\eta - 1}, \tag{30}$$

a teda

$$|P_n^{m\prime}(\eta) Q_n^m(\eta_0)| < \frac{1}{2} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \ln \frac{\eta_0 + 1}{\eta_0 - 1} \frac{P_n^{m\prime}(\eta)}{P_n^m(\eta_0)}. \tag{31}$$

Uvažujme teraz funkciu

$$P_n^m(\eta) = \frac{d^m P_n(\eta)}{d\eta^m} (\eta^2 - 1)^{\frac{m}{2}} = P_n^{[m]}(\eta)(\eta^2 - 1)^{\frac{m}{2}}.$$

Všetky korene polynómu $P_{n(\eta)}^m$ sú reálne rozličné a ležia v intervale $(-1, 1)$ [6, str. 25—26]. Ak α_i je ľubovoľný z týchto koreňov, je koreňom aj $-\alpha_i$. Preto môžeme písať

$$P_n^m(\eta) = A(\eta^2 - 1)^{\frac{m}{2}} [\eta] (\eta^2 - \alpha_1^2)(\eta^2 - \alpha_2^2) \ldots (\eta^2 - \alpha_s^2),$$

kde A je konštanta, činiteľ $[\eta] = \eta$ pri nepárnom $n - m$, keď $s = \frac{1}{2}(n - m - 1)$, a $[\eta] = 1$ pri párnom $n - m$, keď $s = \frac{1}{2}(n - m)$.

Pretože pri $\eta_0 > \eta$ je

$$\frac{\eta^2 - 1}{\eta_0^2 - 1} < \frac{\eta^2}{\eta_0^2}, \quad \frac{\eta^2 - \alpha_i^2}{\eta_0 - \alpha_i^2} < \frac{\eta^2}{\eta_0^2},$$

vidíme, že je

$$\frac{P_n^m(\eta)}{P_n^m(\eta_0)} < \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^n. \tag{32}$$

Pokiaľ ide o deriváciu funkcie $P_n^m(\eta)$, platí pre ňu rovnica (19). Ak rozvinieme polynóm

$$P_n^{[m]}(u) = \frac{dP_n(u)}{du}$$

podľa Taylorovho vzorca v bode $u = 1$, v ktorom všetky jeho derivácie sú kladné, máme

$$P_n^{[m]}(u) = \sum_{r=0}^{n-m} a_r(u-1)^r, \quad P_n^{[m+1]} = \sum_{r=0}^{n-m} r a_r (u-1)^{r-1}, \quad a_r > 0,$$

z čoho pri $u > 1$

$$P_n^{[m+1]}(u) < \frac{n-m}{u-1} P_n^{[m]}(u)$$

a teda

$$\frac{1}{\sqrt{\eta^2-1}} \frac{P_n^{m+1}(\eta)}{P_n^m(\eta_0)} < \frac{n-m}{\eta-1} \frac{P_n^m(\eta)}{P_n^m(\eta_0)}.$$

Z rovnice (19) a nerovnosti (32) vyplýva takto

$$\frac{P_n^{m\prime}(\eta)}{P_n^m(\eta_0)} < \left(\frac{m\eta}{\eta^2-1} + \frac{n-m}{\eta-1}\right) \frac{P_n^m(\eta)}{P_n^m(\eta_0)} < \frac{n}{\eta-1}\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^n. \tag{33}$$

Preto v dôsledku nerovnosti (31) je

$$|P_n^{m\prime}(\eta)\, Q_n^m(\eta_0)| < \frac{1}{2(\eta-1)} \ln \frac{\eta_0+1}{\eta_0-1}\, n \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^n$$

a v dôsledku nerovnosti (27)

$$|\Delta_n^m P_n^m(\xi_0) P_n^m(\xi) P_n^{m\prime}(\eta)\, Q_n^m(\eta_0) \cos m(\varphi-\varphi_0)| <$$
$$< \frac{1}{e(\eta-1)} \ln \frac{\eta_0+1}{\eta_0-1}\, n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^n, \tag{34}$$

$$\left|\sum_{m=0}^{n} \Delta_n^m P_n^m(\xi_0) P_n^m(\xi) P_n^{m\prime}(\eta)\, Q_n^m(\eta_0) \cos m(\varphi-\varphi_0)\right| <$$
$$< \frac{1}{e(\eta-1)} \ln \frac{\eta_0+1}{\eta_0-1}\, n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^n.$$

Avšak z d'Alembertovho kritéria vyplýva, že rad

$$\frac{1}{e(\eta-1)} \ln \frac{\eta_0+1}{\eta_0-1} \sum_{n=0}^{\infty} n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^n$$

konverguje, lebo v prípade, ktorý práve uvažujeme, je $1 < \eta < \eta_0$. Z nerovnosti (34) teda vidíme, že rad (24) je rovnomerne a absolútne konvergentný v každej oblasti ohraničenej oboma elipsoidovými plochami $\eta = \bar{\eta}_1$ a $\eta = \bar{\eta}_2$, pričom $1 < \bar{\eta}_1 < \bar{\eta}_2 < \eta_0$.

Pri sýtení vo vnútornej oblasti vyjadrili sme reciprokú hodnotu vzdialenosti od zdroja vzorcom

$$\frac{1}{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \Delta_n^m P_n^m(\xi_0) P_n^m(\xi) P_n^m(\eta_0)\, Q_n^m(\eta)$$

a pri použití druhej okrajovej podmienky derivovali sme tento rad podľa premennej η, pričom sme zase mlčky predpokladali, že rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \Delta_n^m P_n^m(\xi_0) P_n^m(\xi) P_n^m(\eta_0)\, Q_n^{m\prime}(\eta) \tag{35}$$

konverguje rovnomerne v určitej oblasti, vo vnútri ktorej leží celá plocha elipsoidu $\eta = E > \eta_0$. Dokážeme teraz správnosť tohto predpokladu. Zo vzťahu (28) ľahko odvodíme rovnicu

$$P_n^m(\eta_0)\, Q_n^{m\prime}(\eta) = \frac{P_n^m(\eta_0)}{P_n^m(\eta)}\left[\frac{(-1)^{m+1}}{\eta^2-1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!} + Q_n^m(\eta)\, P_n^{m\prime}(\eta)\right]$$

a vzhľadom na vzorec (29) je ďalej

$$P_n^m(\eta_0)\, Q_n^{m\prime}(\eta) = (-1)^{m+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\frac{P_n^m(\eta_0)}{P_n^m(\eta)}\left[\frac{1}{\eta^2-1} - \right.$$
$$\left. - P_n^{m\prime}(\eta) P_n^m(\eta) \int_{\eta}^{\infty} \frac{du}{[P_n^m(u)]^2 (u^2-1)}\right].$$

Avšak $P_n^m(u)$ je v intervale (η, ∞) monotónne stúpajúca funkcia, pričom $P_n^m(\eta)$, $P_n^{m\prime}(\eta)$, $P_n^m(\eta_0)$ sú kladné. Preto, ak prihliadame aj k nerovnosti (32) a (30),

$$|P_n^m(\eta_0)\, Q_n^{m\prime}(\eta)| < \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\left(\frac{\eta_0}{\eta}\right)^n\left[\frac{1}{\eta^2-1} + \frac{1}{2}\frac{P_n^{m\prime}(\eta)}{P_n^m(\eta)} \ln \frac{\eta+1}{\eta-1}\right].$$

Nerovnosť (33) platí, ako sa ľahko presvedčíme, aj v tom prípade, ak v nej položíme $\eta_0 = \eta$, a nadobúda v tomto prípade tvar

$$\frac{P_n^{m\prime}(\eta)}{P_n^m(\eta)} < \frac{n}{\eta-1}. \tag{36}$$

Preto

$$|P_n^m(\eta_0)\, Q_n^{m\prime}(\eta)| < \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\left(\frac{\eta_0}{\eta}\right)^n\left[\frac{1}{\eta^2-1} + \frac{n}{2(\eta-1)} \ln \frac{\eta+1}{\eta-1}\right]. \tag{37}$$

Ak teraz použijeme aj nerovnosť (27), dostávame

$$|\Delta_n^m P_n^m(\xi_0) P_n^m(\xi) P_n^m(\eta_0)\, Q_n^{m\prime}(\eta) \cos m(\varphi-\varphi_0)| <$$
$$< \frac{2n+1}{e}\left(\frac{\eta_0}{\eta}\right)^n\left[\frac{1}{\eta^2-1} + \frac{n}{2(\eta-1)} \ln \frac{\eta+1}{\eta-1}\right],$$

teda

$$\left|\sum_{m=0}^{n} \Delta_n^m P_n^m(\xi_0) P_n^m(\xi) P_n^m(\eta_0)\, Q_n^{m\prime}(\eta) \cos m(\varphi-\varphi_0)\right| <$$
$$< \frac{(n+1)(2n+1)}{e}\left(\frac{\eta_0}{\eta}\right)^n\left[\frac{1}{\eta^2-1} + \frac{n}{2(\eta-1)} \ln \frac{\eta+1}{\eta-1}\right].$$

Avšak rady s kladnými členmi

$$\frac{1}{e(\eta^2-1)}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(2n+1)\left(\frac{\eta_0}{\eta}\right)^n,$$

$$\frac{1}{e(\eta-1)}\ln\frac{\eta+1}{\eta-1}\sum_{n=0}^{\infty}n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)\left(\frac{\eta_0}{\eta}\right)^n$$

konvergujú pri všetkých hodnotách $\eta > \eta_0$, ako sa môžeme opäť presvedčiť pomocou elementárnych pravidiel. Preto rad (35) konverguje rovnomerne a absolútne pri všetkých hodnotách ξ v intervale $(-1, 1)$ a pri všetkých hodnotách $\eta > \bar{\eta}_0 > \eta_0$, t. j. v celej oblasti zvonka ľubovoľného takého elipsoidu konfokálnej sústavy (definovaného parametrom $\bar{\eta}_0$), vo vnútri ktorého leží zdroj prúdu.

Dokážeme teraz konvergenciu riešenia okrajovej úlohy pre pretiahnutý rotačný elipsoid, a to najskôr pri vonkajšom, potom pri vnútornom bodovom sýtení.

Konštatovali sme už, že funkcia $Q_n^{m\prime}(u)$ má pri $u > 1$ opačné znamienko než $Q_n^m(u)$, zatiaľ čo $P_n^m(u)$ a $P_n^{m\prime}(u)$ sú kladné. Preto pre absolútnu hodnotu koeficientu B_n^m definovaného vzorcom (16) a vystupujúceho v rade pre prídatný vnútorný potenciál pri vonkajšom sýtení platí

$$|B_n^m| < |q_1(\varkappa-1)|\frac{|\varDelta_n^m P_n^m(\xi_0)\,Q_n^m(\eta_0)\,P_n^{m\prime}(E)\,Q_n^m(E)|}{|P_n^{m\prime}(E)\,Q_n^m(E)|} = |q_1(\varkappa-1)||\varDelta_n^m P_n^m(\xi)\,Q_n^m(\eta_0)|,$$

v dôsledku čoho

$$|B_n^m P_n^m(\xi)\,P_n^m(\eta)\cos m(\varphi-\varphi_0)| < |q_1(\varkappa-1)||\varDelta_n^m P_n^m(\xi_0)\,P_n^m(\xi)\cos m(\varphi - \varphi_0)||P_n^m(\eta)\,Q_n^m(\eta_0)|.$$

Po použití nerovnosti (27) máme ďalej

$$|B_n^m P_n^m(\xi)\,P_n^m(\eta)\cos m(\varphi-\varphi_0)| < \frac{2n+1}{e}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}|q_1(\varkappa-1)||P_n^m(\eta)\,Q_n^m(\eta_0)|.$$

Avšak v dôsledku nerovností (30) a (32) je

$$|P_n^m(\eta)\,Q_n^m(\eta_0)| < \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\frac{P_n^m(\eta)}{P_n^m(\eta_0)}\int_{\eta_0}^{\infty}\frac{du}{u^2-1} < \frac{1}{2}\ln\frac{\eta_0+1}{\eta_0-1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^n,$$

pričom $\eta_0 > \eta \geqq 1$ (uvažujeme vnútorné pole pri vonkajšom sýtení). Dostávame takto nerovnosti

$$|B_n^m P_n^m(\xi)\,P_n^m(\eta)\cos m(\varphi-\varphi_0)| < \frac{|q_1(\varkappa-1)|}{e}\ln\frac{\eta_0+1}{\eta_0-1}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^n, \quad (38)$$

$$\left|\sum_{m=0}^{n}B_n^m P_n^m(\xi)\,P_n^m(\eta)\cos m(\varphi-\varphi_0)\right| < \frac{|q_1(\varkappa-1)|}{e}\ln\frac{\eta_0+1}{\eta_0-1}\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^n.$$

Avšak rad

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^n$$

je pri uvažovaných podmienkach zrejme konvergentný, z čoho vyplýva rovnomerná a absolútna konvergencia radu

$$W_2 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}B_n^m P_n^m(\xi)\,P_n^m(\eta)\cos m(\varphi-\varphi_0)$$

vyjadrujúceho prídatný potenciál vnútorného poľa pri vonkajšom sýtení. Tento rad konverguje teda rovnomerne vo vnútri a na povrchu každého elipsoidu konfokálnej sústavy, ktorému prislúcha parameter $\eta < \eta_0$, a teda aj vo vnútri a na ploche základného elipsoidu.

Uvažujme teraz všeobecný člen radu vyjadrujúceho prídatný potenciál pri vonkajšom sýtení a vo vonkajšej oblasti. Ak uvážime opäť, že pri $u > 1$ pridružená funkcia $Q_n^m(u)$ má opačné znamienko než jej derivácia, je zrejmé, že v celom vonkajšom priestore včítane povrchu základného elipsoidu platí

$$|A_n^m P_n^m(\xi)\,Q_n^m(\eta)\cos m(\varphi-\varphi_0)| \leqq |A_n^m P_n^m(\xi)\,Q_n^m(E)\cos m(\varphi-\varphi_0)|,$$

a pretože v zmysle rovníc (16)

$$A_n^m Q_n^m(E) = B_n^m P_n^m(E),$$

dostávame ďalej, ak prihliadame aj k nerovnosti (38),

$$|A_n^m P_n^m(\xi)\,Q_n^m(\eta)\cos m(\varphi-\varphi_0)| \leqq |B_n^m P_n^m(\xi) P_n^m(E)\cos m(\varphi-\varphi_0)| < \frac{|q_1(\varkappa-1)|}{e}\ln\frac{\eta_0+1}{\eta_0-1}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{E}{\eta_0}\right)^n.$$

Dospievame takto k uzáveru, že rad

$$W_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}A_n^m P_n^m(\xi)\,Q_n^m(\eta)\cos m(\varphi-\varphi_0)$$

vyjadrujúci prídatný potenciál vo vonkajšom priestore pri sýtení v niektorom vonkajšom bode konverguje rovnomerne a absolútne v celej vonkajšej oblasti včítane povrchu základného elipsoidu $\eta = E$.

Uvažujme ďalej prídatný potenciál vo vonkajšom priestore pri sýtení bodovým zdrojom, ktorý sa nachádza vo vnútri základného elipsoidu. V tomto prípade je $\eta > \eta_0$. Postupujúc podobne ako predtým dostávame najsamprv

$$|A_n^m| < \frac{|q_2(\varkappa - 1)|\,|\Delta_n^m P_n^m(\xi_0)\, P_n^m(\eta_0)\, Q_n^{m\prime}(E)\, P_n^m(E)|}{\varkappa \qquad P_n^m(E)\, Q_n^{m\prime}(E)} =$$
$$= |q_1(\varkappa - 1)|\,|\Delta_n^m P_n^m(\xi_0) P_n^m(\eta_0)|$$

a teda

$$|A_n^m P_n^m(\xi)\, Q_n^m(\eta) \cos m\,(\varphi - \varphi_0)| < |q_1(\varkappa - 1)|\,|\Delta_n^m P_n^m(\xi_0) P_n^m(\xi) \cos m\,(\varphi - \varphi_0)|\,|P_n^m(\eta_0)\, Q_n^m(\eta)|\,.$$

V dôsledku vzťahov (27), (30) a (32) je ďalej

$$|A_n^m P_n^m(\xi)\, Q_n^m(\eta) \cos m\,(\varphi - \varphi_0)| < \frac{|q_1(\varkappa - 1)|}{e} \ln \frac{\eta + 1}{\eta - 1} \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\eta_0}{\eta}\right)^n, \quad (39)$$

z čoho vyplýva, že rad

$$W_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} A_n^m P_n^m(\xi)\, Q_n^m(\eta) \cos m\,(\varphi - \varphi_0)$$

konverguje rovnomerne a absolútne nielen v celej vonkajšej oblasti základného elipsoidu $\eta = E$, ale aj vo vonkajšej oblasti a na povrchu každého takého elipsoidu konfokálnej sústavy, vo vnútri ktorého sa nachádza zdroj.

Konečne treba ešte dokázať konvergenciu riešenia pre vnútorné pole pri vnútornom sýtení. Pretože v tomto prípade je

$$\eta \leqq E, \qquad B_n^m P_n^m(E) = A_n^m Q_n^m(E)\,,$$

a pretože $P_n^m(u)$ je v intervale $(1, \infty)$ monotónne stúpajúca funkcia, platí najsamprv

$$|B_n^m P_n^m(\xi) P_n^m(\eta) \cos m\,(\varphi - \varphi_0)| \leqq |B_n^m P_n^m(\xi) P_n^m(E) \cos m\,(\varphi - \varphi_0)| =$$
$$= |A_n^m P_n^m(\xi)\, Q_n^m(E) \cos m\,(\varphi - \varphi_0)|\,.$$

Z nerovnosti (39) vyplýva však ďalej

$$|B_n^m P_n^m(\xi) P_n^m(\eta) \cos m\,(\varphi - \varphi_0)| < \frac{|q_1(\varkappa - 1)|}{e} \ln \frac{E + 1}{E - 1} \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\eta_0}{E}\right)^n \quad (40)$$

a vychádzajúc z tejto nerovnosti možno bez ťažkostí dokázať, že rad vyjadrujúci prídatný potenciál vo vnútri základného elipsoidu pri vnútornom bodovom sýtení konverguje v tejto vnútornej oblasti rovnomerne a absolútne.

Pri použití druhej okrajovej podmienky pre riešenie okrajovej úlohy derivovali sme rady (12) po členoch podľa premennej η, pretože táto okrajová podmienka vzťahuje sa na deriváciu vonkajšieho a vnútorného potenciálu v smere normály k základnému elipsoidu. Postup, ktorý sme použili, je prípustný iba vtedy, ak rady vznikajúce derivovaním radov (12) podľa premennej η konvergujú rovnomerne v určitej oblasti, vo vnútri ktorej leží celý povrch základného elipsoidu. Dokážeme preto ešte, že je táto podmienka skutočne splnená.

Pri vonkajšom sýtení je, podobne ako predtým,

$$|B_n^m| < |q_1(\varkappa - 1)\, \Delta_n^m P_n^m(\xi_0)\, Q_n^m(\eta_0)|\,,$$

a teda

$$|B_n^m P_n^m(\xi) P_n^{m\prime}(\eta) \cos m\,(\varphi - \varphi_0)| < |q_1(\varkappa - 1)|\,|\Delta_n^m P_n^m(\xi_0) P_n^m(\xi) P_n^{m\prime}(\eta)\, Q_n^m(\eta_0)|\,.$$

Rovnomerná konvergencia radu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} B_n^m P_n^m(\xi) P_n^{m\prime}(\eta) \cos m\,(\varphi - \varphi_0)$$

vo vnútri ľubovoľného elipsoidu $\eta = \bar{\eta}_0 < \eta_0$ je preto priamym dôsledkom rovnomernej konvergencie radu

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{R}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \Delta_n^m P_n^m(\xi_0) P_n^m(\xi) P_n^{m\prime}(\eta)\, Q_n^m(\eta_0) \cos m\,(\varphi - \varphi_0),$$

ktorú sme už dokázali.

Vzhľadom na to, že $|Q_n^{m\prime}(u)|$ je v intervale $(1, \infty)$ monotónne klesajúca funkcia, je vo vonkajšom priestore a na povrchu základného elipsoidu

$$|A_n^m P_n^m(\xi)\, Q_n^{m\prime}(\eta) \cos m\,(\varphi - \varphi_0)| \leqq |A_n^m P_n^m(\xi)\, Q_n^{m\prime}(E) \cos m\,(\varphi - \varphi_0)|\,.$$

Avšak v dôsledku druhej okrajovej podmienky vyjadrenej rovnicou (14b) je

$$A_n^m Q_n^{m\prime}(E) = \frac{1}{\varkappa} B_n^m P_n^{m\prime}(E) - \frac{q_1}{\varkappa} (\varkappa - 1)\, \Delta_n^m P_n^m(\xi_0) P_n^{m\prime}(E)\, Q_n^m(\eta_0),$$

a preto

$$|A_n^m P_n^m(\xi)\, Q_n^{m\prime}(\eta) \cos m\,(\varphi - \varphi_0)| \leqq \frac{1}{\varkappa} |B_n^m P_n^m(\xi) P_n^{m\prime}(E) \cos m\,(\varphi - \varphi_0)| +$$
$$+ \frac{|q_1(\varkappa - 1)|}{\varkappa} |\Delta_n^m P_n^m(\xi_0) P_n^m(\xi) P_n^{m\prime}(E)\, Q_n^m(\eta_0) \cos m\,(\varphi - \varphi_0)|\,.$$

Pretože rovnomernú a absolútnu konvergenciu radov

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} B_n^m(\xi) P_n^m(\xi) P_n^{m\prime}(E) \cos m\,(\varphi - \varphi_0),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \Delta_n^m P_n^m(\xi_0) P_n^m(\xi) P_n^{m\prime}(E)\, Q_n^m(\eta_0) \cos m\,(\varphi - \varphi_0)$$

sme už dokázali, absolútna a rovnomerná konvergencia radu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} A_n^m P_n^m(\xi)\, Q_n^{m\prime}(\eta) \cos m\,(\varphi - \varphi_0)$$

v oblasti $\eta \geqq E$ je pri $\varkappa \neq 0$ zrejmá. No pri $\varkappa = 0$ netreba o konvergencii tohto radu uvažovať, lebo druhá okrajová podmienka redukuje sa tu na

$$\left(\frac{\partial V_2}{\partial \eta}\right)_E = 0$$

a netýka sa teda potenciálu vo vonkajšej oblasti.

Podobne pri vnútornom sýtení je

$$|A_n^m| < |q_1(\varkappa - 1)\, \Delta_n^m P_n^m(\xi_0) P_n^m(\eta_0)|,$$

a teda

$$|A_n^m P_n^m(\xi)\, Q_n^{m\prime}(\eta) \cos m\,(\varphi - \varphi_0)| < |q_1(\varkappa - 1)|\,|\Delta_n^m P_n^m(\xi_0) P_n^m(\xi) P_n^m(\eta_0)\, Q_n^{m\prime}(\eta) \cos m\,(\varphi - \varphi_0)|.$$

Pretože, ako sme už dokázali, rad

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{R}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \Delta_n^m P_n^m(\xi_0) P_n^m(\xi) P_n^m(\eta_0)\, Q_n^{m\prime}(\eta) \cos m\,(\varphi - \varphi_0)$$

konverguje rovnomerne a absolútne v každej oblasti $\eta \geqq \bar{\eta}_0 > \eta_0$, konverguje v tej istej oblasti tak isto aj rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} A_n^m P_n^m(\xi)\, Q_n^{m\prime}(\eta) \cos m\,(\varphi - \varphi_0).$$

Pretože funkcia $P_n^{m\prime}(u)$ v intervale $(1, \infty)$ monotónne vzrastá a je v tomto intervale kladná, platí pre celú vnútornú oblasť základného elipsoidu a pre jeho povrch ($\eta \leqq E$) vzťah

$$|B_n^m P_n^m(\xi)\, P_n^{m\prime}(\eta) \cos m\,(\varphi - \varphi_0)| \leqq |B_n^m P_n^m(\xi)\, P_n^{m\prime}(E) \cos m\,(\varphi - \varphi_0)|.$$

Avšak v dôsledku druhej okrajovej podmienky je pri vnútornom sýtení

$$B_n^m P_n^{m\prime}(E) = \varkappa A_n^m Q_n^{m\prime}(E) + q_2(\varkappa - 1)\, \Delta_n^m P_n^m(\xi_0) P_n^m(\eta_0)\, Q_n^{m\prime}(E),$$

a preto

$$|B_n^m P_n^m(\xi)\, P_n^{m\prime}(\eta) \cos m\,(\varphi - \varphi_0)| \leqq \varkappa\, |A_n^m P_n^m(\xi)\, Q_n^{m\prime}(E) \cos m\,(\varphi - \varphi_0)| + |q_2(\varkappa - 1)|\,|\Delta_n^m P_n^m(\xi_0) P_n^m(\xi) P_n^m(\eta_0)\, Q_n^{m\prime}(E) \cos m\,(\varphi - \varphi_0)|.$$

Konvergenciu radov

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} A_n^m P_n^m(\xi)\, Q_n^{m\prime}(E) \cos m\,(\varphi - \varphi_0),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \Delta_n^m P_n^m(\xi_0) P_n^m(\xi) P_n^m(\eta_0)\, Q_n^{m\prime}(E) \cos m(\varphi - \varphi_0)$$

sme už dokázali. Preto konverguje aj rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} B_n^m P_n^m(\xi)\, P_n^{m\prime}(\eta) \cos m\,(\varphi - \varphi_0)$$

rovnomerne a absolútne v oblasti $\eta \leqq E$, t. j. vo vnútri základného elipsoidu a na jeho povrchu.

Dôkaz jednoznačnosti riešenia našej okrajovej úlohy dá sa vykonať metódami, ktoré sú v teórii polí obvyklé a vychádzajú z Greenovej vety. Prvé riešenie (V_1, V_2) nech je napr. totožné s riešením, ku ktorému sme v doterajšej úvahe dospeli, druhé ($\bar{V}_1 \bar{V}_2$) nech je riešenie od tohto odlišné. Rozdiel $U_1 = V_1 - \bar{V}_1$ je potom funkcia harmonická vo vonkajšom priestore, rozdiel $U_2 = V_2 - \bar{V}_2$ funkcia harmonická vo vnútri elipsoidu a ani jedna z týchto funkcií nemá vo svojej oblasti žiadnu singularitu. Okrem toho, vo veľmi veľkej vzdialenosti R od zdroja (t. j. pri $R \to \infty$) konverguje potenciál U_1 k nule najmenej ako $1/R^2$ a na povrchu základného elipsoidu vyhovujú obe funkcie U_1 a U_2 okrajovým podmienkam (13).

Použijeme Greenovu vetu na funkciu U_1 v oblasti τ_1 vymedzenej elipsoidovou plochou S o rovnici $\eta = E$ a guľou K polomeru R so stredom napr. v bode (ξ_0, η_0, φ_0), pričom R volíme tak veľké, aby celá plocha S ležala vo vnútri gule K. Ak n je vonkajšia normála elipsoidu, máme

$$\int_K U_1 \frac{\partial U_1}{\partial R}\, dK - \int_S U_1 \frac{\partial U_1}{\partial n}\, dS = \int_{\tau_1} (\operatorname{grad} U_1)^2\, d\tau_1, \tag{41}$$

kde dK, dS a $d\tau_1$ sú elementy povrchu gule, elipsoidu a objemu vonkajšej oblasti τ_1. Pri $R \to \infty$ prvý z integrálov na ľavej strane konverguje k nule. Na povrchu elipsoidu je okrem toho vzhľadom na okrajové podmienky

$$U_1 = U_2, \quad \frac{\partial U_1}{\partial n} = \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial U_2}{\partial n},$$

a preto rovnica (41) nadobúda tvar

$$\int_S U_2 \frac{\partial U_2}{\partial n}\, dS = -\varkappa \int_{\tau_1} (\operatorname{grad} U_1)^2\, d\tau_1. \tag{42}$$

Ak použijeme Greenovu vetu na funkciu U_2 vo vnútornej oblasti τ_2 základného elipsoidu, dostávame

$$\int_S U_2 \frac{\partial U_2}{\partial n}\, dS = \int_{\tau_2} (\operatorname{grad} U_2)^2\, d\tau_2,$$

a teda vzhľadom na rovnicu (42)

$$\varkappa \int_{\tau_1} (\operatorname{grad} U_1)^2\, d\tau_1 + \int_{\tau_2} (\operatorname{grad} U_2)^2\, d\tau_2 = 0. \tag{43}$$

Pri $\varkappa > 0$ môže však táto rovnica platiť iba vtedy, ak je identicky

$$\operatorname{grad} U_1 = 0, \quad \operatorname{grad} U_2 = 0,$$

t. j. ak sú funkcie U_1 a U_2 konštantné. Potom však z prvej okrajovej podmienky vyplýva, že ich hodnoty sú rovnaké. No pri $R \to \infty$ musí U_1 konvergovať k nule, čo je možné iba vtedy, ak

$$U_1 = U_2 = 0.$$

Pri $\varkappa = 0$ druhá okrajová podmienka redukuje sa na $\frac{\partial U_2}{\partial n} = 0$ a Greenova veta dáva pri použití na funkciu U_2 vo vnútornej oblasti

$$\operatorname{grad} U_2 = 0, \quad U_2 = \text{konšt.} = k.$$

Určenie funkcie U_1 redukuje sa potom na riešenie vonkajšej Dirichletovej úlohy pri podmienkach $(U_1)_s = k$ a $U_1 \to 0$ pri $R \to \infty$ najmenej ako $1/R$. Táto úloha má jediné riešenie

$$U_1 = \frac{k}{Q_0(E)} Q_0(\eta) \tag{44}$$

a o jednoznačnosti jej riešenia možno sa presvedčiť použitím Greenovej vety ako predtým. Avšak k je ľubovoľná konštanta, a preto riešenie okrajovej úlohy v pôvodnej matematickej formulácii, ako sme videli už aj skôr, nie je pri $\varkappa = 0$ jednoznačné. Jeho všeobecný tvar (pri vonkajšom sýtení) je

$$V_1 = \frac{q_1}{R} + \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{N} A_N^m P_N^m(\xi)\, Q_N^m(\eta) \cos m(\varphi - \varphi_0) + \frac{k}{Q_0(E)} Q_0(\eta), \tag{45}$$

kde

$$V_2 = k,$$

$$A_N^m = -\frac{q_1 \Delta_N^m P_N^m(\xi_0)\, Q_N^m(\eta_0) P_N^m(E)}{Q_N^m(E)} \tag{46}$$

a R znamená vzdialenosť od zdroja. Rad na pravej strane rovnice (45) konverguje pritom rovnomerne a absolútne v celej vonkajšej oblasti $\eta \leqq E$, lebo $|Q_N^m(\eta)| \leqq |Q_N^m(E)|$ a rad

$$-\frac{1}{q_1} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} A_N^m P_N^m(\xi)\, Q_N^m(E) \cos m(\varphi - \varphi_0),$$

predstavujúci reciprokú hodnotu vzdialenosti bodu (ξ, E, φ) ležiaceho na povrchu základného elipsoidu od zdroja, je absolútne a rovnomerne konvergentný v príslušnej oblasti premenných ξ a φ.

Pravda, daná fyzikálna úloha má pri všetkom jednoznačné riešenie. Spočíva to v tom, že pri $\varrho_2 = 0$ treba jej formuláciu po matematickej stránke doplniť, lebo Laplaceova rovnica $\Delta V_2 = 0$ neznamená v tomto prípade, že sa vo vnútri základného elipsoidu nenachádzajú žiadne zdroje prúdu, ako je to pri $\varrho_2 < 0$. Ak však takéto zdroje neexistujú, musí byť

$$\int_S \frac{\partial V_1}{\partial n}\, dS = 0.$$

Ak tu vsadíme za V_1 z rovnice (45), je najsamprv

$$q_1 \int_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) dS = 0,$$

lebo $1/R$ je vo vnútornej oblasti harmonická funkcia. Ďalej je v dôsledku vzorcov (5b)

$$\int_S \frac{\partial}{\partial n} [P_N^m(\xi)\, Q_N^m(\eta) \cos m(\varphi - \varphi_0)]\, dS = e\,(E^2 -$$

$$- 1)\, Q_N^{m\prime}(E) \int_{-1}^{+1} P_N^m(\xi)\, d\xi \int_0^{2\pi} \cos m(\varphi - \varphi_0)\, d\varphi$$

a výraz na pravej strane je odlišný od nuly iba vtedy, ak je $N = m = 0$. Preto musí byť

$$\left(A_0 + \frac{k}{Q_0(E)}\right) \int_S \frac{\partial Q_0(\eta)}{\partial n}\, dS = 0,$$

kde sme písali A_0 namiesto A_0^0. Pretože integrál vystupujúci na ľavej strane je odlišný od nuly, musí byť

$$k = -A_0 Q_0(E),$$

konštanta k je teda ďalšou podmienkou, ktorú sme zaviedli, jednoznačne určená. Potenciál vo vonkajšom priestore dá sa napísať v tvare

$$V_1 = \frac{q_1}{R} + \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{N} A_N^m P_N^m(\xi)\, Q_N^m(\eta) \cos m(\varphi - \varphi_0). \tag{47}$$

Pri $\varrho_2 = 0$ a akomkoľvek vnútornom sýtení musí byť $V_2 = \text{konšt.} = k$ a potenciál V_1 dostávame riešením vonkajšej Dirichletovej úlohy:

$$V_1 = \frac{k}{Q_0(E)} Q_0(\eta).$$

Hodnotu konštanty k možno tu určiť z podmienky

$$-\frac{1}{\varrho_1} \int_S \frac{\partial V_1}{\partial n}\, dS = I,$$

kde I znamená intenzitu sýtneho prúdu. Po výpočte, ktorý tu neuvádzame, dostávame

$$k = \frac{I\varrho_1}{4\pi e} Q_0(E), \quad V_1 = \frac{I\varrho_1}{4\pi e} Q_0(\eta). \tag{48}$$

Ak ide o elipsoid dokonale nevodivý, kladieme $\varrho_2 \to \infty$, $\varkappa \to \infty$ a do úvahy prichádza iba vonkajšie sýtenie, pričom druhú okrajovú podmienku formulujeme vzťahom

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)_S = 0.$$

Pri tom istom označovaní ako skôr dáva Greenova veta pre vonkajšiu oblasť

$$\int_K U_1 \frac{\partial U_1}{\partial R} \mathrm{d}K - \int_S U_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} \mathrm{d}S = \int_{\tau_1} (\mathrm{grad}\ U_1)^2 \mathrm{d}\tau_1 .$$

Prvý z integrálov na ľavej strane rovná sa nule pre tú istú príčinu ako predtým, druhý preto, lebo v dôsledku druhej okrajovej podmienky je

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial n}\right)_S = 0.$$

Opäť je teda U_1 konštantné a musí sa rovnať nule vzhľadom na asymptotický vzťah platný pre túto funkciu pri veľkých vzdialenostiach. Ak vezmeme do úvahy aj prvú okrajovú podmienku, vo vnútornej oblasti platí

$$\int_S U_2 \frac{\partial U_2}{\partial n} \mathrm{d}S = \int_{\tau_2} (\mathrm{grad}\ U_2)^2 \mathrm{d}\tau_2 = \int_S U_1 \frac{\partial U_2}{\partial n} \mathrm{d}S = 0.$$

Preto je tiež U_2 identicky rovné nule a okrajová úloha má v tomto prípade jednoznačné riešenie dané vzťahmi (11) a (12), pričom

$$A_n^m = -\frac{q_1 \Delta_n^m P_n^m(\xi_0)\, Q_n^m(\eta_0)\, P_n^{m\prime}(E)}{Q^{m\prime}(E)},$$

$$B_n^m = -\frac{q_1 \Delta_n^m P_n^m(\xi_0)\, Q_n^m(\eta_0) P_n^{m\prime}(E)\, Q_n^m(E)}{P_n^m(E)\, Q_n^{m\prime}(E)}. \tag{49}$$

LITERATÚRA

1. Cook, K. L., v. Nostrand, R. G. Interpretation of Resistivity Data over Filled Sinks, Geophysics XIX. 4. 2. Dachnov, V. N., Električeskaja razviedka neftjanych i gazovych miestoroždenij, I. vyd. Moskva 1951. 3. Smythe, W. R., Static and Dynamic Electricity, ruský prekl.: Elektrostatika i elektrodinamika, Moskva 1954. 4. Smirnov, V. J., Kurs vyššej matematiki, sv. II., vyd. XIII., Moskva 1954. 5. Hobson, E. W., The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics, ruský prekl.: Teorija sferičeskich i ellipsoidaľnych funkcij, Moskva 1952. 6. Lense, J., Kugelfunktionen, II. vyd., Leipzig 1954.

Došlo 28. XII. 1955.

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ГЕОЭЛЕКТРИКИ СОПРОТИВЛЕНИЯ ДЛЯ ВЫТЯНУТОГО ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ

ТИБОР КОЛБЕНГАЙЕР

Выводы

В статье говорится о теории поля точечного источника тока в неограниченном однородном пространстве, которое содержит в себе однородно проводящий вытянутый эллипсоид вращения. Доказывается равномерная сходимость рядов встречающихся в решении краевой задачи, и представляющих потенциал во внешней и внутренней области. Далее доказывается равномерная сходимость производных этих рядов по направлению нормалы эллипсоида во всякой точке его поверхности. Краевая задача и все с ней связанные вопросы решаются для случая внешнего и внутреннего пытания.

ÜBER DIE RANDWERTAUFGABE DER WIDERSTANDGEOELEKTRIK FÜR EIN VERLÄNGERTES ROTATIONSELLIPSOID

TIBOR KOLBENHEYER

Zusammenfassung

Das Feld einer punktförmigen Stromquelle im homogenen unbegrenzten Raum, der ein homogenes verlängertes Rotationsellipsoid abweichender Leitfähigkeit einschließt, wird theoretisch gelöst. Die gleichmäßige Konvergenz der Reihen, die das Potential im Außenraum und im Innern des Ellipsoids darstellen, wird bewiesen. Ähnliche Beweise werden auch für die Konvergenz der Ableitungen des primären Potentials und der resultierenden Potentiale in Richtung der Normale zur Ellipsoidfläche gegeben. Schließlich wird die Eindeutigkeit der Lösung untersucht. Die vorliegende Randwertaufgabe und alle damit zusammenhängenden Konvergenzfragen werden sowohl für den Fall äußerer Speisung, als auch für den Fall einer im Inneren des Ellipsoids befindlichen Stromquelle gelöst.