MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK VI ČÍSLO 1

ABSTRAKTNÝ INTEGRÁL AKO KLADNÁ FUNKCIONÁLA A VETA O ROZŠÍRENÍ MIERY

IGOR KLUVÁNEK
Katedra matematiky Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave

Účelom tohto článku je ukázať možnosť použitia Rieszovej metódy rozšírenia kladnej funkcionály na definíciu abstraktného integrálu, ako aj na dôkaz istej vety o rozšírení miery.

F. Riesz ([1], str. 132) vychádza z množiny C_0 funkcií, ktoré sú definované na nejakej množine E, tvoria lineárny priestor a s každou funkciou $\varphi \in C_0$ i jej absolútna hodnota $|\varphi|$ je z C_0.

Ak je na množine C_0 daná nezáporná, aditívna, homogénna funkcionála $A(\varphi)$, t. j. reálna funkcia definovaná na C_0 a splňujúca podmienky

$A(\varphi) \geqq 0$ pre každú funkciu $\varphi(x) \geqq 0$, $\varphi \in C_0$,

$A(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1A(\varphi_1) + c_2A(\varphi_2)$ pre ľubovoľné dve funkcie φ_1, $\varphi_2 \in C_2$ a ľubovoľné dve reálne čísla c_1, c_2, žiada iba, aby sa splnil predpoklad A: Ak $\{\varphi(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca postupnosť funkcií z C_0, pričom $\lim\limits_{n=\infty} \varphi_n(x) = 0$ pre všetky $x \in E$, potom i $\lim\limits_{n=\infty} A(\varphi_n) = 0$. Za týchto predpokladov definícia funkcionály A dá sa rozšíriť na prípadne širšiu triedu funkcií než C_0, pričom takto rozšírená funkcionála má vlastnosti Lebesguovho integrálu, platí totiž o nej väčšina viet, ktoré platia pre Lebesguov integrál. Toto rozšírenie sa vykoná v dvoch krokoch, najskôr ale je potrebné podať definíciu množín miery nula. Množinu $G \subset E$ nazývame množinou miery nula, ak existuje neklesajúca postupnosť funkcií z C_0 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ divergentná v každom bode $x \in G$, pričom postupnosť $\{A(\varphi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

V prvom kroku rozšírime definíciu funkcionály A na množinu funkcií C_1. Funkcia $f(x)$ sa dostane do C_1 vtedy a len vtedy, ak existuje neklesajúca postupnosť funkcií z C_0 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ a $\lim\limits_{n=\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ skoro všade, t. j. množina bodov, kde táto rovnosť neplatí, je miery nula v zmysle uvedenej definície. Pritom sa predpokladá, že postupnosť $\{A(\varphi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, čím sa i zaručí konvergencia skoro všade. Hodnota $A(f)$ sa definuje rovnicou $A(f) = \lim\limits_{n\to\infty} A(\varphi_n)$.

Definícia funkcionály sa ešte rozšíri na množinu C_2 funkcií tvaru $g(x) = f_1(x) - f_2(x)$, pričom $f_1 \in C_1$, $f_2 \in C_1$ a kladie sa $A(g) = A(f_1) - A(f_2)$.

Na množine C_2 už má funkcionála A vlastnosti Lebesguovho integrálu. F. Riesz použil túto metódu na definíciu Lebesguovho integrálu funkcií jednej premennej. Za množinu C_0 volil množinu lineárnych kombinácií charakteristických funkcií konečných intervalov. Pre takéto funkcie sa dá definovať integrál bezprostredne. Aby uvedenou metódou rozšíril definíciu integrálu na všetky integrovateľné funkcie, musel dokázať platnosť predpokladu A pre tieto funkcie a integrál na nich definovaný, vyšetriť štruktúru množín miery nula a ukázať, že sa zhodujú s množinami miery nula podľa obvyklej definície.

Dokážeme podobné tvrdenia i pre integrál podľa abstraktnej miery (lemma A a lemma B). Tým dokážeme, že pre tento integrál možno použiť vety o kladnej funkcionále. Ďalej zasa použijeme rozšírenie integrálu na dôkaz vety o rozšírení miery bez okľuky cez vonkajšiu mieru a merateľnosť podľa Carathéodoryho.

1.

Nech X je ľubovoľná neprázdna množina.

Systém $\mathbf{R}$ podmnožín množiny X s vlastnosťami:

1. ak $A \in \mathbf{R}$ i $B \in \mathbf{R}$, potom i $A \cup B \in \mathbf{R}$,
2. ak $A \in \mathbf{R}$ a $B \in \mathbf{R}$, potom i $A - B \in \mathbf{R}$,
3. pre každý bod $x \in X$ existuje množina $A \in \mathbf{R}$, že $x \in A$ nazývame množinovým okruhom v X.

Množinový okruh $\mathbf{S}$ nazývame množinovým σ-okruhom, ak pre každú postupnosť množín $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $A_n \in \mathbf{S}$ je $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbf{S}$.

Ku každému systému množín $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K} \subset 2^X$) existuje práve jeden σ-okruh $\mathbf{S}(\mathbf{K})$ s vlastnosťami:

1. $\mathbf{K} \subset \mathbf{S}(\mathbf{K})$,
2. ak $\mathbf{T}$ je σ-okruh a $\mathbf{K} \subset \mathbf{T}$, je $\mathbf{S}(\mathbf{K}) \subset \mathbf{T}$.

Podobné tvrdenie platí i pre okruhy.

Nech μ je funkcia, ktorej hodnoty sú reálne čísla alebo ∞ a má vlastnosti:

1. μ je definovaná na okruhu $\mathbf{R}$,
2. $\mu(A) \geqq 0$ pre každú množinu $A \in \mathbf{R}$,
3. $\mu(\emptyset) = 0$ ($\emptyset$ značí prázdnu množinu),
4. ak $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť navzájom disjunktných množín z $\mathbf{R}$ a $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbf{R}$, potom $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Takúto funkciu nazývame mierou na okruhu $\mathbf{R}$.

Miera μ na okruhu $\mathbf{R}$ sa nazýva σ-konečná, ak pre každú množinu $A \in \mathbf{R}$

existuje postupnosť množín $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $\mathbf{R}$, pričom $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ a $\mu(A_n) < \infty$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$

Množinu X s okruhom $\mathbf{R}$ na nej a s danou mierou μ na tomto okruhu označíme $(X, \mathbf{R}, \mu)$.

Hovoríme, že množina $E \subset X$ je vonkajšej miery nula, krátko nulová množina, ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje taká postupnosť $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ množín z $\mathbf{R}$, že $E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \varepsilon$.

Jednoduchou integrovateľnou funkciou v $(X, \mathbf{R}, \mu)$ nazývame funkciu tvaru $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(x)$,[1] kde $E_i \in \mathbf{R}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) sú navzájom disjunktné množiny, α_i sú reálne čísla a $\mu(E_i) < \infty$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Zrejme lineárna kombinácia dvoch jednoduchých integrovateľných funkcií a absolútna hodnota jednoduchej integrovateľnej funkcie je zasa jednoduchá integrovateľná funkcia. Integrál $\int \varphi(x)\, d\mu$ z funkcie $\varphi(x)$ podľa miery μ definujeme vzťahom $\int \varphi(x)\, d\mu = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i)$. Množinu všetkých jednoduchých integrovateľných funkcií v $(X, \mathbf{R}, \mu)$ označme C_0. Zrejme pre ľubovoľné funkcie z C_0 platí: ak $\varphi(x) \geqq 0$, potom $\int \varphi(x)\, d\mu \geqq 0$ a teda aj ak $\varphi_1(x) \leqq \varphi_2(x)$, potom $\int \varphi_1(x)\, d\mu \leqq \int \varphi_2(x)\, d\mu$. Pre $E \in \mathbf{R}$ definujeme $\int\limits_E \varphi(x)\, d\mu = \int \varphi(x) \,.\, \chi_E(x)\, d\mu$. Ak $E \supset \{x : \varphi(x) \neq 0\}$,[2] zrejme $\int\limits_E \varphi(x)\, d\mu = \int \varphi(x)\, d\mu$. Ak $E_1 \in \mathbf{R}$, $E_2 \in \mathbf{R}$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, potom $\int\limits_{E_1 \cup E_2} \varphi(x)\, d\mu = \int\limits_{E_1} \varphi(x)\, d\mu + \int\limits_{E_2} \varphi(x)\, d\mu$.

V ďalšom pre ľubovoľnú funkciu $f(x)$ definovanú na X kladieme $N(f) = \{x : f(x) \neq 0\}$.

2.

Dokážeme teraz dve základné lemmy.

Lemma A. *Ak nerastúca postupnosť jednoduchých integrovateľných funkcií v* $(X, \mathbf{R}, \mu)$ $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k nule v každom bode* $x \in X$, *potom i postupnosť integrálov* $\{\int \varphi_n(x)\, d\mu\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k nule.*

Dôkaz. Označme $E = N(\varphi_1)$, $M = \max \varphi_1(x)$. Zrejme $E \in \mathbf{R}$ a $\mu(E) < \infty$. Ak $\mu(E) = 0$, potom i $\int \varphi_1(x)\, d\mu = 0$ a teda $\int \varphi_n(x)\, d\mu = 0$ pre $n = 2, 3, 4, \ldots$ a nemáme čo dokazovať. Nech teda $\mu(E) > 0$. Nech $\varphi_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{k_n} \alpha_i^n \chi_{E_i^n}(x)$ ($1 \leqq i \leqq k_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$). Zvoľme $\varepsilon > 0$. K bodu $x_0 \in E$ existuje najmen-

[1] $\chi_E(x)$ značí charakteristickú funkciu množiny $E \subset X$.

[2] Ak $\pi(x)$ je nejaká vlastnosť prvkov množiny X, potom $\{x : \pi(x)\}$ značí množinu tých a len tých prvkov množiny X, pre ktoré platí výrok: „x má vlastnosť $\pi(x)$“.

šie prirodzené číslo $n(x_0) = n_0$, pre ktoré platí $\varphi_{n_0}(x_0) < \frac{\varepsilon}{2\mu(E)}$. Ak existuje prirodzené číslo i_0, pričom $1 \leqq i_0 \leqq k_{n_0}$ a $x_0 \in E_{i_0}^{n_0}$, položme $F(x_0) = E_{i_0}^{n_0}$. Ak takéto i_0 neexistuje, položíme $F(x_0) = E - N(\varphi_{n_0})$. Zrejme $F(x) \in \mathbf{R}$ pre všetky $x \in E$. Okrem toho systém množín $\{F(x)\}_{x \in E}$ je najviac spočetný, lebo množín $E_i^n (l \leqq i \leqq k_n, n = 1, 2, 3, \ldots)$ je najviac spočetne mnoho i množín tvaru $E - N(\varphi_n)$ je najviac spočetne mnoho. Môžeme teda systém $\{F(x)\}_{x \in E}$ usporiadať do postupnosti (prípadne konečnej). Nech je to postupnosť $\{F_k\}_{k=1}^{s}$, pritom s je alebo prirodzené číslo, alebo ∞. Ak s je prirodzené číslo, potom položíme $N = \max n(x)$. Vtedy $\varphi_N(x) < \frac{\varepsilon}{2\mu(E)}$ pre všetky $x \in X$ a z toho

$$\int \varphi_N(x)\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2\mu(E)} \cdot \mu(E) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Nech $s = \infty$. Pretože postupnosť $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ všade konverguje k nule, je $\bigcap_{n-1}^{\infty} (E - \bigcup_{k=1}^{n} F_k) = \emptyset$. Zo spojitosti miery v prázdnej množine a z toho, že $\mu(E - \bigcup_{k=1}^{n} F_k) \leqq \mu(E) < \infty$ plynie, že $\lim_{n\to\infty} \mu(E - \bigcup_{k=1}^{n} F_k) = 0$. K číslu $\frac{\varepsilon}{2M}$ existuje teda také prirodzené číslo K, že $\mu(E - \bigcup_{k=1}^{K} F_k) < \frac{\varepsilon}{2M}$. Položme teraz $N = \max \{n(x) : x \in \bigcup_{k-1}^{K} F_k\}$. Pre $x \in \bigcup_{k=1}^{K} F_k = F$ je $\varphi_N(x) < \frac{\varepsilon}{2\mu(E)}$ a z toho

$$\int \varphi_N(x)\, d\mu = \int_F \varphi_N(x)\, d\mu + \int_{E-F} \varphi_N(x)\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2\mu(E)} \cdot \mu(E) + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Z toho, že $\{\int \varphi_n\, d\mu\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca postupnosť nezáporných čísiel, lemma okamžite vyplýva.

Lemma B. *Ak $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je taká neklesajúca postupnosť jednoduchých integrovateľných funkcií v $(X, \mathbf{R}, \mu)$, že postupnosť $\{\int \varphi_n(x)\, d\mu\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, potom množina bodov, v ktorých postupnosť $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje, je vonkajšej miery nula.*

Dôkaz. Nech $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca postupnosť jednoduchých integrovateľných funkcií a nech $\int \varphi_n(x)\, d\mu \leqq K$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ Bez obmedzenia všeobecnosti môžeme predpokladať, že $\varphi_n(x) \geqq 0$ pre všetky n a teda i $\int \varphi_n\, d\mu \geqq \geqq 0$. Ak by neplatilo, že $\varphi_n(x) \geqq 0$, stačí vyšetrovať postupnosť $\{\varphi_n(x) - \varphi_1(x)\}_{n=1}^{\infty}$, pre ktorú táto podmienka platí, a zrejme body divergencie postupnosti $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ a postupnosti $\{\varphi_n(x) - \varphi_1(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sú tie isté. Zvoľme $\varepsilon > 0$. Položme $E = \{x : \lim_{n=\infty} \varphi_n(x) = \infty\}$. Zrejme $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, pričom $F_n = \left\{x : \varphi_n(x) > \frac{K}{\varepsilon}\right\}$. Zrejme $F_n \in \mathbf{R}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ a $\mu(F_n) \cdot \frac{K}{\varepsilon} < \int \varphi(x)\, d\mu \leqq \leqq K$, teda $\mu(F_n) < \varepsilon$ pre všetky n. Okrem toho, pretože postupnosť $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca, je $F_n \subset F_{n+1}$. Definujme postupnosť množín $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ takto: $E_1 = F_1$, $E_n = F_n - F_{n-1}$ pre $n = 2, 3, \ldots$. Zrejme $E_n \in \mathbf{R}$ pre všetky $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\bigcup_{k=1}^{n} E_k = F_n$ a $\sum_{k=1}^{n} \mu(E_k) = \mu(F_n) < \varepsilon$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ a teda i $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leqq \varepsilon$.

Pretože je $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, je tým lemma dokázaná.

Práve dokázané základné lemmy nám dávajú možnosť vybudovať v priestore $(X, \mathbf{R}, \mu)$ teóriu integrálu Rieszovou metódou rozšírenia kladnej funkcionály.

3.

Pre ďalšie účely je výhodné postupovať nasledujúcou metódou, o ktorej L. Mišík [3] dokázal, že je s metódou Rieszovou, naznačenou v úvode, ekvivalentná. Pri tejto metóde nulové množiny explicitne nevystupujú.

Označme C_1 množinu takých funkcií $f(x)$, definovaných na množine X, pre ktoré platí: K funkcii $f(x)$ existuje neklesajúca postupnosť $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ funkcií z C_0, existuje taká konštanta A, že $\int \varphi_n(x)\, d\mu < A$, pričom $f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ pre $x \in \{x : \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) < \infty\}$ a $f(x)$ je ľubovoľné číslo alebo ∞, resp. $-\infty$ pre $x \in \{x : \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \infty\}$. Pre túto funkciu kladieme $\int f(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n(x)\, d\mu$. Hodnota $\int f(x)\, d\mu$ od výberu postupnosti $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ nezávisí.

Označme ďalej C_2 množinu funkcií $g(x)$ definovaných na množine X, pre ktoré platí: K funkcii $g(x)$ existujú funkcie $f_1(x) \in C_1$, $f_2(x) \in C_1$, pričom $g(x) = f_1(x) - f_2(x)$ pre $x \in X$, kde $f_1(x) - f_2(x)$ má zmysel a $g(x)$ je ľubovoľné číslo, resp. ∞, $-\infty$ kde tento výraz nemá zmysel. Zasa kladieme $\int g(x)\, d\mu = \int f_1(x)\, d\mu - \int f_2(x)\, d\mu$. Definícia $\int g(x)\, d\mu$ je znovu prípustná, pretože nezávisí od funkcií f_1, f_2.

Označme $\mathbf{M}$ systém všetkých množín $E \subset X$, pre ktoré $\chi_E(x) \in C_2$. $\mathbf{N}$ nech značí systém všetkých množín vonkajšej miery nula.

Veta 1. *Ak miera μ na okruhu $\mathbf{R}$ je σ-konečná, potom* $\mathbf{S}(\mathbf{M}) = \mathbf{S}(\mathbf{R} \cup \mathbf{N})$.

Dôkaz.

I. Pretože $C_0 \subset C_2$, padne každá množina z $\mathbf{R}$ konečnej miery do $\mathbf{M}$. Ale každá množina z $\mathbf{R}$ sa dá písať ako súčet postupnosti množín konečnej miery, preto $\mathbf{R} \subset \mathbf{S}(\mathbf{M})$. Ak $E \in \mathbf{N}$, potom $\chi_E(x) \in C_2$, teda $\mathbf{N} \subset \mathbf{M}$. Z toho plynie, že $\mathbf{R} \cup \mathbf{N} \subset \mathbf{S}(\mathbf{M})$ a teda i $\mathbf{S}(\mathbf{R} \cup \mathbf{N}) \subset \mathbf{S}(\mathbf{M})$.

II. Pre každú funkciu $\varphi \in C_0$, každé reálne číslo α a každú množinu $A \in \mathbf{S}(\mathbf{R} \cup \mathbf{N})$ je $\{x : \varphi(x) > \alpha\} \cap A \in \mathbf{S}(\mathbf{R} \cup \mathbf{N})$ a z toho tiež pre ľubovoľnú postupnosť $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ funkcií z C_0 $\{A \cap \{x : \sup \varphi_n(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap \{x : \varphi_n(x) > \alpha\} \in \mathbf{S}(\mathbf{R} \cup \mathbf{N})$. Ak $f(x) \in C_1$, t. j. $f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ skoro všade, pričom $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca postupnosť funkcií z C_0, potom pre α reálne a $A \in \mathbf{S}(\mathbf{R} \cup \mathbf{N})$ platí: $A \cap \{x : f(x) > \alpha\} = A \cap \{x : \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) > \alpha\} \cup A \cap \{x : f(x) > \alpha\} \cap \{x : f(x) \neq \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)\}$. Pretože $\{x : f(x) \neq \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)\} \in \mathbf{N}$ a teda aj $\{x : f(x) > \alpha\} \cap \{x : f(x) \neq \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)\} \in \mathbf{N}$ je $A \cap \{x : f(x) > \alpha\} \in \mathbf{S}(\mathbf{R} \cup \mathbf{N})$. Ďalej platí: $A \cap \{x : f(x) \leqq \alpha\} = A - A \cup \{x : f(x) > \alpha\} \in \mathbf{S}(\mathbf{R} \cup \mathbf{N})$ a $A \cap \{x : f(x) < \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap \left\{x : f(x) \leqq \alpha - \frac{1}{n}\right\} \in \mathbf{S}(\mathbf{R} \cup \mathbf{N})$. Položme $\bigcup_{n=1}^{\infty} N(\varphi_n) = A_1$. Pretože $A_1 \in \mathbf{S}(\mathbf{R} \cup \mathbf{N})$ a $N(f) \subset A_1$ z predošlých výsledkov máme, že $N(f) = A_1 \cap [\{x : f(x) < 0\} \cup \{x : f(x) > 0\}] \in \mathbf{S}(\mathbf{R} \cup \mathbf{N})$. Nech $\chi_E(x) = f_1(x) - f_2(x)$, pričom $f_1(x) \in C_1$, $f_2(x) \in C_1$. Položme $A_2 = N(f_1) \cup N(f_2)$. Potom $E = \{x : f_1(x) \neq f_2(x)\} = \{x : f_1(x) \neq f_2(x)\} \cap A_2$. Ak označíme R množinu racionálnych čísiel, potom platí $E = \{x : f_1(x) \neq f_2(x)\} \cap A_2 = [\bigcup_{r \in R} (\{x : f_1(x) > r\} \cap \{x : f_2(x) < r\} \cap A_2)] \cup [\bigcup_{r \in R} (\{x : f_1(x) > r\} \cap \{x : f_2(x) > r\} \cup A_2)] \in \mathbf{S}(\mathbf{R} \cup \mathbf{N})$. Tým sme dokázali, že $\mathbf{M} \subset \mathbf{S}(\mathbf{R} \cup \mathbf{N})$ a teda tiež $\mathbf{S}(\mathbf{M}) \subset \mathbf{S}(\mathbf{R} \cup \mathbf{N})$.

Veta 2. *Nech μ je σ-konečná miera na okruhu $\mathbf{R}$. Potom na σ-okruhu $\mathbf{S}(\mathbf{R} \cup \mathbf{N})$ existuje jediná miera $\bar{\mu}$, pričom $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$ pre $E \in \mathbf{R}$. Miera $\bar{\mu}$ je pritom úplná.*

Dôkaz. Podľa vety 1. je $\mathbf{S}(\mathbf{R} \cup \mathbf{N}) = \mathbf{S}(\mathbf{M})$. Položme $\bar{\mu}(E) = \int \chi_E(x)\, d\mu$ pre $E \in \mathbf{M}$ a $\bar{\mu}(E) = \infty$ pre $E \in \mathbf{S}(\mathbf{M}) - \mathbf{M}$. Funkcia $\bar{\mu}$ je definovaná na σ-okruhu $\mathbf{S}(\mathbf{R} \cup \mathbf{N})$, zrejme je nezáporná a $\bar{\mu}(\emptyset) = 0$. Vezmime postupnosť $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ disjunktných množín z $\mathbf{S}(\mathbf{R} \cup \mathbf{N})$. Máme dokázať, že $\bar{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(E_n)$. Ak $\bar{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \infty$, potom buď existuje prirodzené n_0, že $E_{n_0} \bar{\in} \mathbf{M}$, alebo $E_n \in \mathbf{M}$ pre všetky $n = 1, 2, 3, \ldots$ V prvom prípade sme hotoví, lebo $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(E_n) = \infty$. V druhom prípade uvážime množiny $F_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$. $\chi_{F_n} = \sum_{k=1}^{n} \chi_{E_k}$ a teda $\sum_{k=1}^{n} \int \chi_{E_k}\, d\mu = \int \chi_{F_n}\, d\mu$. Zrejme je $\lim_{n=\infty} \chi_{F_n} = \chi_E$, kde $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ a postupnosť $\{\chi_{F_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca. Podľa Beppo Leviho vety postupnosť $\{\int \chi_{F_n}\, d\mu\}_{n=1}^{\infty}$ nie je obmedzená. Ak by bola obmedzená, platilo by $\lim_{n\to\infty} \int \chi_{F_n}\, d\mu = \int \lim_n \chi_{F_n}\, d\mu = \int \chi_E\, d\mu < \infty$ a to je spor. Teda $\lim_{n=1} \int \chi_{F_n}\, d\mu = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \chi_{E_k}\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}\, d\mu = \infty$. Ak $\bar{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) < \infty$, potom postupnosť $\{\int \chi_{F_n}\, d\mu\}_{n=1}^{\infty}$ (definovaná ako vyššie) je obmedzená, lebo $\int \chi_{F_n}\, d\mu \leqq \int \chi_E\, d\mu$, teda podľa Beppo Leviho vety platí $\lim_{n=\infty} \int \chi_{F_n}\, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} \chi_{F_n}\, d\mu = \int \chi_E\, d\mu$, čo je hľadaný výsledok.

Že $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$ pre $E \in \mathbf{R}$, plynie z definície bezprostredne. Miera $\bar{\mu}$ je úplná, pretože $\bar{\mu}(E) = 0$ iba vtedy, ak E je nulová množina a ak $F \subset E$, potom i F je nulová množina a teda $\bar{\mu}(F) = 0$.

Aby sme dokázali jednoznačnosť miery $\bar{\mu}$ pripusťme, že by existovali dve miery μ_1 a μ_2, pričom $\mu_1(E) = \mu_2(E)$ pre $E \in \mathbf{R}$. Pretože obe miery na $\mathbf{R}$ splývajú, množiny nulových množín vzhľadom na obe miery μ_1, μ_2 sú totožné a hodnoty oboch mier na týchto nulových množinách sú rovné nule. Stačí teda dokázať, že hodnotami miery na nejakom okruhu $\mathbf{R}$ sú hodnoty miery na σ-okruhu $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ jednoznačne určené v prípade σ-konečnej miery. Dôkaz tohto tvrdenia nájde čitateľ v [2] str. 54 (str. 59).

LITERATÚRA

1. Riesz F., Sz.-Nagy, B.; Leçons d'Analyse fonctionelle, Budapest 1952. 2. Halmos, P. R.; Measure Theory New York 1950. (П. Халмош, Теория меры, Москва 1953.) 3. Mišík L., O istej modifikácii Rieszovej metódy rozšírenia kladnej funkcionály, Časopis pro pěstování matematiky 6 (81), 1956.

Došlo 1. VII. 1955.

АБСТРАКТНЫЙ ИНТЕГРАЛ КАК ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ И ТЕОРЕМА О РАСШИРЕНИИ МЕРЫ

ИГОР КЛУВАНЕК

Выводы

Если **R** кольцо множеств некоторого абстрактного пространства X и μ мера заданная на этом кольце, простой интегрируемой функцией называется любая линейная комбинация характеристических функций множеств конечной меры, и интеграл этой функции определяется естественным образом как соответствующая линейная комбинация мер. В статье доказываются следующие основные леммы:

Лемма А: Для любой невозрастающей последовательности простых интегрируемых функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ стремящейся к нулю, последовательность их интегралов также стремится к нулю.

Лемма Б: Если для некоторой неубывающей последовательности простых интегрируемых функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность их интегралов остается ограниченной, то $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ почти всюду стремится к конечному пределу.

Эти леммы позволяют применение метода Ф. Рисса расширения положительного функционала на определение абстрактного интеграла Лебега. Пользуясь этим методом несколько модифицированным Л. Мишиком доказана следующая известная теорема о расширении меры:

Если μ — σ-конечная мера, заданная на кольце **R**, то существует единственная полная мера $\bar{\mu}$, заданная на некотором σ-кольце **S**, содержащем **R**, такая, что $\mu(E) = \bar{\mu}(E)$ для множеств E из **R**.