MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV. VI. 1 — 1956

CHARAKTERIZÁCIA SVÄZU POMOCOU TERNÁRNEJ OPERÁCIE

MILAN KOLIBIAR

Katedra matematiky Prírodoveckej fakulty Univerzity Komenského v Bratislave

S. A. Kiss a G. Birkhoff [1] ukázali, že distributívny sväz (s najmenším a najväčším prvkom) možno definovať pomocou istej ternárnej operácie (a, b, c). V takto definovanom sväze S platí

$$(a, b, c) = (a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a) = (a \cup b) \cap (b \cup c) \cap (c \cup a) \tag{1}$$

pre každú trojicu prvkov $a, b, c \in S$. Na základe výsledkov práce [2] sa dá usúdiť, že pomocou takejto ternárnej operácie možno definovať ľubovoľný sväz. Pritom však ternárna operácia (a, b, c) nie je vždy definovaná pre všetky trojice prvkov a, b, c. V tejto poznámke podáme takúto definíciu sväzu s najmenším a najväčším prvkom.

1. V celom tomto odseku S značí sväz.

1. 1. Definícia. Ak pre prvky $a, b, c \in S$ platí

$$(a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a) = (a \cup b) \cap (b \cup c) \cap (c \cup a), \tag{2}$$

definujeme pre tieto prvky ternárnu operáciu (a, b, c) vzťahom (1). Množinu všetkých trojíc $[a, b, c]$ $(a, b, c \in S)$, pre ktoré platí (2), označíme $T(S)$.

1. 2. a) Ak $[a, b, c] \in T(S)$ a a', b', c' je ľubovoľná permutácia prvkov a', b', c', potom $[a', b', c'] \in T(S)$ a platí $(a', b', c') = (a, b, c)$.

b) Pre ľubovoľné prvky $a, b \in S$ je $[a, b, a] \in T(S)$ a $(a, b, a) = a$.

c) Ak S má najväčší prvok I a najmenší prvok 0, pre každé $a \in S$ je $[0, a, I] \in T(S)$ a $(0, a, I) = a$. Ďalej, pre $a, b \in S$ je $[a, 0, b] \in T(S)$, $[a, I, b] \in T(S)$ a $(a, 0, b) = a \cap b$, $(a, I, b) = a \cup b$.

d) Ak $[a, b, c] \in T(S)$, $[a, b, d] \in T(S)$, $[(d, b, a), b, c] \in T(S)$, potom $[(a, b, c), b, (a, b, d)] \in T(S)$ a platí

$$((a, b, c), b, (a, b, d)) = ((d, b, a), b, c).$$

Dôkaz. Tvrdenia a), b), c) sú zrejmé. Dokážeme tvrdenie d). Platí

$$\begin{aligned} A &= [(a, b, c) \cap b] \cup [b \cap (a, b, d)] \cup [(a, b, d) \cap (a, b, c)] = \\ &= [(a \cup b) \cap (b \cup c) \cap (c \cup a) \cap b] \cup [b \cap (a \cup b) \cap (b \cup d) \cap (d \cup a)] \cup \\ &\quad \cup [(a \cup b) \cap (b \cup d) \cap (d \cup a) \cap (b \cup c) \cap (c \cup a)] = \\ &= [(c \cup a) \cap b] \cup [b \cap (d \cup a)] \cup [(a \cup b) \cap (b \cup d) \cap \\ &\quad \cap (d \cup a) \cap (b \cup c) \cap (c \cup a)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A' &= [(a, b, c) \cup b] \cap [b \cup (a, b, d) \cap [(a, b, d) \cup (a, b, c)] = \\ &= [(c \cap a) \cup b] \cap [b \cup (d \cap a)] \cap [(a \cap b) \cup (b \cap d) \cup (d \cap a) \cup \\ &\quad \cup (b \cap c) \cup (c \cap a)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= [(d, b, a) \cap b] \cup (b \cap c) \cup [c \cap (d, b\ a)] = \\ &= [(a \cup d) \cap b] \cup (b \cap c) \cup [c \cap (d \cup b) \cap (b \cup a) \cap (a \cup d)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B' &= [(d, b, a) \cup b] \cap (b \cup c) \cap [c \cup (d, b, a)] = \\ &= [(a \cap d) \cup b] \cap (b \cup c) \cap [c \cup (d \cap b) \cup (b \cap a) \cup (a \cap d)]. \end{aligned}$$

Zrejme $A \leqq A'$. Ďalej $b \cap c \leqq (c \cup a) \cap b$,

$$c \cap (d \cup b) \cap (b \cup a) \cap (a \cup d) \leqq (a \cup b) \cap (b \cup d) \cap (d \cup a) \cap (b \cup c) \cap (c \cup a),$$

takže $B \leqq A$. Duálne $A' \leqq B'$. Platí teda $B \leqq A \leqq A' \leqq B'$. Podľa predpokladu $B = B'$, teda $B = A = A'$, čo bolo treba dokázať.

2. Veta. *Nech M je množina; nech $0, I \in M$. Nech T je podmnožina kartézskeho súčinu $M \times M \times M$ majúca tieto vlastnosti:*

(a) *Ak $a, b, c \in M$, $[a, b, c] \in T$, potom $[b, c, a] \in T$, $[c, b, a] \in T$.*

(b) *$[a, b, a] \in T$ pre každé $a, b \in M$.*

(c) *$[a, 0, b] \in T$, $[a, I, b] \in T$ pre každé $a, b \in M$.*

Každej trojici $[a, b, c] \in T$ nech je priradený prvok $(a, b, c) \in M$ tak, že platí

(d_1) *$(0, a, I) = a$ pre každé $a \in M$;*

(d_2) *$(a, b, a) = a$ pre každé $a, b \in M$;*

(d_3) *ak $[a, b, c] \in T$, platí $(a, b, c) = (b, c, a)$;*

(d_4) *ak trojice $[a, b, c]$, $[a, b, d]$, $[(d, b, a), b, c]$ patria do T, potom $[(a, b, c), b, (a, b, d)] \in T$ a*

$$((a, b, c), b, (a, b, d)) = ((d, b, a), b, c). \tag{3}$$

Potom množina M s operáciami

$$a \cap b = (a, 0, b), \qquad a \cup b = (a, I, b) \tag{4}$$

je sväz s najväčším prvkom I a s najmenším prvkom 0, v ktorom pre $[a, b, c] \in T$ platí

$$(a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a) \leqq (a, b, c) \leqq (a \cup b) \cap (b \cup c) \cap (c \cup a). \tag{5}$$

Poznámka. Z odst. 1 vyplýva, že spôsobom uvedeným v tejto vete možno definovať každý sväz.

Dôkaz vety. Nech $[a, b, c] \in T$. Z (a) vyplýva, že $[a', b', c'] \in T$ pre ľubovoľnú permutáciu a', b', c' prvkov a, b, c. Podľa (b), (d_2), (d_4) a (a) je $(a, b, c) = ((a, b, a), b, c) = ((a, b, c), b, (a, b, a)) = ((a, b, c), b, a) = ((c, b, a), b, (c, b, a)) = (c, b, a)$. Teda $(a, b, c) = (c, b, a) = (b, c, a)$. Z toho vyplýva, že

$$(a, b, c) = (a', b', c'), \tag{6}$$

kde a', b', c' je ľubovoľná permutácia prvkov a, b, c.

Vzhľadom na (b) a (d_2) je $a \cap a = a$, $a \cup a = a$ pre každé $a \in M$. Ďalej $a \cap b = (a, 0, b) = (b, 0, a) = b \cap a$. Podobne $a \cup b = b \cup a$. Podľa (d_4) a (6) je

$$(a \cap b) \cap c = ((a, 0, b), 0, c) = ((b, 0, c)), 0, (b, 0, a)) = \\ = ((b, 0, a), 0, (b, 0, c)) = ((c, 0, b), 0, a) = \\ = a \cap (b \cap c).$$

Rovnako sa dokáže $(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$.

Dokážeme teraz absorbčné zákony. Použitím (6), (d_4), (c), (d_1), (b) a (d_2) dostávame $(a \cup b) \cap a = ((a, I, b), 0, a) = ((b, a, I), a, 0) = ((I, a, 0), a, (I, a, b)) = (a, a, (I, a, b)) = a$. Rovnako sa dokáže $(a \cap b) \cup a = a$ (stačí vymeniť I a 0).

Tým sme dokázali, že množina M s operáciami (4) tvorí sväz.

Aby sme dokázali, že pre $[a, b, c] \in T$ platí (5), ukážeme najprv:

$$a \cap (a, b, c) = (a \cap b, a, (a, b, c)), a \cup (a, b, c) = (a \cup b, a, (a, b, c)). \quad (7)$$

Použitím (c), (6) a (d_4) dostávame

$$a \cap (a, b, c) = (a, 0, (a, b, c)) = ((c, a, b), a, 0) = \\ = ((b, a, 0), a, (b, a, c)) = (a \cap b, a, (a, b, c)).$$

Rovnako sa dokáže druhá rovnosť (7) (zámenou I za 0).

Dvojnásobným použitím (7) dostávame: $(a \cap b) \cap (a, b, c) = (a \cap b) \cap a \cap (a, b, c) = (a \cap b) \cap (a \cap b, a, (a, b, c)) = (a \cap b, a \cap b, (a \cap b, a, (a, b, c))) = a \cap b$. Podobne, $(a \cup b) \cup (a, b, c) = a \cup b$. Teda $a \cap b \leqq (a, b, c) \leqq a \cup b$. Rovnako sa dokáže $b \cap c \leqq (a, b, c) \leqq b \cup c$, $c \cap a \leqq (a, b, c) \leqq c \cup a$. Z týchto vzťahov vyplýva (5).[1]

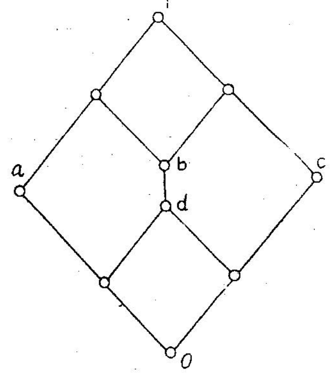
Poznámky.

1. Vo vzťahoch (5) môže sa vyskytnúť aj znamienko $<$ (t. j. platí znamienko $\leqq$, ale neplatí $=$), ako ukazuje príklad:

Majme sväz S, ktorého graf je na obr. 1. Definujme ternárnu operáciu o takto: Pre trojice prvkov, ktoré splňujú vzťah (2), definujeme operáciu o vzťahom (1). Pre trojicu $[a', b', c']$, získanú z trojice $[a, b, c]$ ľubovoľnou permutáciou, definujeme $(a', b', c') = b$. Pre ostatné trojice operáciu o nedefinujeme.

Preskúšaním všetkých možností sa možno presvedčiť, že takto definovaná ternárna operácia splňuje predpoklady vety ods. 2. [Vzhľadom na ods. 1 stačí uvažovať o prípadoch, keď v (3) vystupuje (a, b, c).] Pritom platí $(a, b, c) = b$, $(a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a) = d$, $(a \cup b) \cap (b \cup c) \cap (c \cup a) = b$. Sväz definovaný touto ternárnou operáciou podľa vety ods. 2 je práve sväz S.

2. Ak by sme operáciu o v pozn. 1 pozmenili tak, že by sme pre trojicu $[a, b, c]$ (a trojice, ktoré z nej vzniknú permutáciami) operáciu nedefinovali, pre ostatné trojice by sme však operáciu ponechali ako v pozn. 1, dostali by sme operáciu o', ktorá podľa ods. 1 splňuje predpoklady vety. Zrejme operácie o, o', definujú ten istý sväz.



Obr. 1.

3. Z poznámky 2 vidieť, že ten istý sväz možno definovať viacerými ternárnymi operáciami, ktoré sa môžu líšiť v obore definície. Zo vzťahu (5) vyplýva: Nech dve ternárne operácie o, o', definujú (podľa vety ods. 2) ten istý sväz S. Pre trojice $[a, b, c]$, pre ktoré platí vo sväze S rovnosť (2), dávajú obe operácie o, o', tú istú hodnotu, danú výrazom (1). Je otázka, či pre každú trojicu $[a, b, c]$, pre ktorú sú obe operácie o, o', definované, majú obe operácie tú istú hodnotu. (Zdá sa pravdepodobné, že to nemusí platiť.)

[1] V Birkhoffovej knihe [4] na str. 138, kde sa sledujú úvahy o distributívnych svázoch z práce [1], dôkaz vzťahu $(a, b, c) \in < a \cap b, a \cup b >$ nie je korektný, pretože sa zakladá na lemme 1 (str. 137), ktorej dôkaz sa práve opiera o rovnosť (1), ktorá sa má dokázať. Avšak vzťah $a \cap b \leqq (a, b, c) \leqq a \cup b$ možno ľahko dokázať rovnako ako v našom prípade: Použitím vzťahu (17) (str. 138) vychádza $(a, b, c) \cap a = (a, a \cap b, c)$, $(a, b, c) \cap (a \cap b) = (a, a \cap b, c) \cap (a \cap b) = a \cap b$. Podobne $(a, b, c) \cup (a \cup b) \cup = a \cup b$.

LITERATÚRA

1. Kiss, S. A., Birkhoff, G.; A ternary operation in distributive lattices. Bull. Am. Math. Soc. 53, 1947, 749—752. 2. Kolibiar, M.; Ternárna operácia vo svázoch. Čas. pro pěst. matematiky (v tlači). 3. Croisot, R.; Axiomatique des lattices distributives. Can. J. Math. 3, 1951, 24—27. 4. Birkhoff, G.; Lattice theory. New York 1948.

Došlo 10. VIII. 1955.

ХАРАКТЕРИСТИКА СТРУКТУРЫ В ТЕРМИНАХ ТЕРНАРНОЙ ОПЕРАЦИИ

МИЛАН КОЛИБИАР

Выводы

Пусть M — множество, O, I его элементы. Пусть T подмножество декартового произведения M×M×M обладающее следующими свойствами (через [x, y, z] обозначим тройцу элементов x, y, z):

(a) Если [a, b, c] ∈ T, то [b, c, a] ∈ T, [c, b, a] ∈ T.

(b) [a, b, a] ∈ T для всяких a, b ∈ M.

(c) [a, O, b] ∈ T, [a, I, b] ∈ T для всяких a, b ∈ M.

Пусть каждой троице $[a, b, c] \in T$ поставлен в соответствие элемент $(a, b, c) \in M$ так, что имеет место:

(d_1) $(O, a, I) = a$ для всякого $a \in M$;

(d_2) $(a, b, a) = a$ для всяких $a, b \in M$;

(d_3) если $[a, b, c] \in T$, то $(a, b, c) = (b, c, a)$;

(d_4) если троици $[a, b, c]$, $[a, b, d]$, $[(d, b, a), b, c]$ принадлежат множеству T, то $[(a, b, c), b, (a, b, d)] \in T$ и выполнено (3).

Тогда множество M с операциями (4) является структурой с наибольшим элементом I и наименьшим элементом O, в которой для $[a, b, c] \in T$ имеет место (5).

Всякую структуру с наименьшим и наибольшим элементом можно определить этим путем, если в качестве T взять множество этих троек, которые удовлетворяют равенству (2) и для этих троек определить (a, b, c) формулой (1).

Показывается на примере, что в (5) может иметь место строгой знак $<$ (для недистрибутивной структуры) и что одна и та же структура может быть определена двумя тернарными операциями, отличащимися областью определения. (О всех рассматриваемых тернарных операциях предполагаем, что они обладают свойствами (a) — (d_4).) Ставится вопрос, могуть-ли две тернарные операции, определяющие одну и ту же структуру иметь разное значение в троице, для которой обе определены.