PRÍSPEVOK K FORMULÁCII ZÁKLADNÝCH ZÁKONOV ELEKTRODYNAMIKY V MINKOWSKÉHO ŠTVORROZMERNOM ČASOPRIESTORE

DIONÝZ ILKOVIČ

Autor známej učebnice vektorového počtu M. Lagally (Vorlesungen über Vektorrechnung, Leipzig 1944) v úvode k tejto svojej knihe píše: „...všade, kde sa vystačí s najjednoduchšími výkonmi vektorového počtu, oceňuje sa počítaním s vektormi získaná nezávislosť od náhodilého súradnicového systému, avšak počítanie s diádami a s tenzormi vyšších stupňov sa nepoužíva; keď zavedenie diády je už nevyhnutné, prejavuje sa aspoň neochota považovať diádu za základný matematický pojem a označovať ju vlastným znakom. Namiesto toho, aby sa výstavba elementárneho vektorového počtu doplnila ďalšou kapitolou, počíta sa opäť len so súradnicami.“ Týmito slovami charakterizovaný stav vo fyzikálnej literatúre ani dnes ešte nie je úplne prekonaný, aj keď sa hotové výsledky už dosť všeobecne zapisujú nakoniec pomocou vektorov a tenzorov.

V tejto štúdii, vychádzajúc z Maxwellových rovníc a dôsledne používajúc metódy a symboliky vektorového a tenzorového počtu, dochádzam k istej, v rozpísanom zložkovom tvare všeobecne známej formulácii základného zákona elektromagnetického poľa v Minkowského časopriestore, pričom niektoré elementárne vety špeciálnej teórie relativity považujem za známe. Pri úprave výrazov používam aj niektoré definície a početné pravidlá vektorového počtu v štvorrozmernom lineárnom priestore, najmä antisymetrického a komplementárneho súčinu dvoch vektorov, ako ich v svojich nedávno uverejnených štúdiách zavádza J. Garaj.[1]

Cieľom tohto článku je najmä presvedčiť čitateľov, že nielen počítanie s vektormi, ale aj počítanie s tenzormi ako s veličinami je jednoduché a vedie ku vzťahom a výrazom, ktoré sú omnoho prehľadnejšie ako s nimi rovnocenné vzťahy medzi súradnicami príslušných vektorov a tenzorov.

[1] J. Garaj, Príspevok ku výstavbe vektorovej algebry v Minkowského štvorrozmernom časopriestore, Matematicko-fyzikálny časopis SAV, roč. 5, 22, 1955 a O používaní imaginárnych súradníc v geometrii Minkowského štvorrozmerného časopriestoru, tamže, str. 114.

Ako je všeobecne známe, polohový vektor časopriestorového bodu (bodovej udalosti) vzhľadom na iný takýto bod možno písať v tvare štvorčlenu

$$\mathbf{r}^* = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} + ict\mathbf{l} \tag{1}$$

alebo, ak zavedieme substitúciu $u = ict$,

$$\mathbf{r}^* = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} + u\mathbf{l}, \tag{2}$$

kde x, y a z sú pravouhlé súradnice vzťahujúce sa na inerciálny súradnicový systém, t je v tomto systéme obvyklým spôsobom počítaný čas, c rýchlosť svetla vo vákuu, i imaginárna jednotka a $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ a $\mathbf{l}$ jednotkové vektory rovnobežné so súradnicovými osami pravouhlého systému a vektor $\mathbf{l}$ s časovou osou.

Hamiltonov operátor v Minkowského časopriestore môžeme teda písať v tvaroch

$$\Box = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} + \mathbf{l}\frac{\partial}{\partial u} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{c}\mathbf{l}\frac{\partial}{\partial t} =$$
$$= \nabla + \mathbf{l}\frac{\partial}{\partial u} = \nabla - \frac{i}{c}\mathbf{l}\frac{\partial}{\partial t}. \tag{3}$$

Majme na mysli elementárne časopriestorové posunutie bodu dané diferenciálmi dx, dy, dz a dt čiže posunutie bodu v priestore, ktoré sa uskutočnilo v časovom intervale dt. Keďže veličina

$$c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

je od voľby inerciálneho súradnicového systému nezávislá, nie je od tejto voľby závislá ani veličina

$$d\tau = \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)}. \tag{4}$$

Menuje sa absolútnym elementárnym časom (intervalom), uplynuvším medzi dvoma udalosťami, ktoré sa vzhľadom na zvolený vzťažný inerciálny systém prihodili v mieste a čase x, y, z, t a $x + dx, y + dy, z + dz$ a $t + dt$. Ak dx, dy a dz sú diferenciály priestorových súradníc pohybujúceho sa bodu a dt príslušný čas, je:

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = v^2$$

druhá mocnina absolútnej hodnoty rýchlosti pohybujúceho sa bodu vzhľadom na systém, na ktorý sa vzťahujú súradnice x, y, z a časový údaj t. Teda v tomto prípade je:

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\beta}dt,$$

ak sme položili $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$.

Podiel

$$\mathbf{v}^* = \frac{d\mathbf{r}^*}{d\tau} = \frac{d\mathbf{r} + ic\mathbf{l}dt}{d\tau} = \beta\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} + ic\mathbf{l}\right) = \beta(\mathbf{v} + ic\mathbf{l}) \tag{5}$$

menuje sa štvorrozmernou rýchlosťou pohybu bodu v časopriestore a predstavuje vektorový invariant, lebo $d\mathbf{r}^*$ a $d\tau$ sú tiež invarianty.

Z Lorentzových transformácií vyplýva, že sa objem s rýchlosťou zmenšuje. Ak pokojový objem je V_0, za pohybu je $V = V_0/\beta$. Za predpokladu, že elektrický náboj je od rýchlosti svojho pohybu nezávislý, hustota elektrického náboja je preto v tom istom pomere väčšia, t. j. je:

$$\varrho = \varrho_0\beta, \tag{6}$$

ak ϱ_0 značí pokojovú hustotu elektrického náboja.

Vzhľadom na Lorentzove transformácie invariantný štvorrozmerný vektor

$$\mathbf{J} = \varrho_0\mathbf{v}^* = \frac{\varrho}{\beta}\mathbf{v}^* = \varrho(\mathbf{v} + ic\mathbf{l}) \tag{7}$$

sa menuje štvorrozmernou hustotou elektrického prúdu v Minkowského časopriestore.

Maxwellove rovnice v znení platnom pre vákuum sú:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \varepsilon_0\mathbf{E} &= \varrho, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0\varrho\mathbf{v} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{8}$$

Sčítaním $\mu_0 ic\mathbf{l}$ násobku rovnice prvej a rovnice štvrtej dostávame rovnicu:

$$\mu_0 ic(\nabla . \varepsilon_0\mathbf{E})\mathbf{l} + \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0\varrho\mathbf{v} + \mu_0 ic\mathbf{l}\varrho = \mu_0\varrho\mathbf{v} + \mu_0\varrho ic\mathbf{l} = \mu_0\mathbf{J}$$

alebo, keďže je

$$\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2, \; -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial ict}\left(-\frac{i}{c}\mathbf{E}\right) = \mathbf{l}\frac{\partial}{\partial u} . \left(-\frac{i}{c}\mathbf{l}\mathbf{E}\right)$$

a $\nabla \times \mathbf{B} = (\nabla \times \mathbf{B}) . \mathbf{I} = \nabla . (\mathbf{B} \times \mathbf{I})$, kde $\mathbf{I}$ je trojrozmerný tenzor identity,

$$\left(\nabla . \frac{i}{c}\mathbf{E}\right)\mathbf{l} + \nabla . (\mathbf{B} \times \mathbf{I}) + \mathbf{l}\frac{\partial}{\partial u} . \left(-\frac{i}{c}\mathbf{l}\mathbf{E}\right) = \mu_0\mathbf{J}.$$

Túto rovnicu, keďže vo výrazoch $\mathbf{E}$, $\mathbf{B} \times \mathbf{I}$ a ∇ nevystupuje jednotkový vektor $\mathbf{l}$, môžeme však písať aj takto:

$$\Box . \left[\mathbf{B} \times \mathbf{I} + \frac{i}{c}(\mathbf{E}\mathbf{l} - \mathbf{l}\mathbf{E})\right] = \mu_0\mathbf{J}. \tag{9}$$

Podobne sčítaním $\mathbf{l}$ násobku Maxwellovej rovnice v našom poradí druhej a i/c násobku rovnice tretej dostávame rovnicu:

$$(\nabla . \mathbf{B})\mathbf{l} + \nabla \times \frac{i}{c}\mathbf{E} + \frac{i}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0,$$

t. j.

$$(\nabla . \mathbf{B})\mathbf{l} + \nabla . \left(\frac{i}{c}\mathbf{E} \times \mathbf{I}\right) - \mathbf{l} . \frac{\partial\mathbf{l}\mathbf{B}}{\partial u} = 0,$$

ktorú, keďže ani vo výrazoch $\mathbf{B}$, $\mathbf{E} \times \mathbf{I}$ a ∇ nevystupuje jednotkový vektor $\mathbf{l}$, môžeme písať aj takto:

$$\Box . \left[\frac{i}{c}\mathbf{E} \times \mathbf{I} + (\mathbf{B}\mathbf{l} - \mathbf{l}\mathbf{B})\right] = 0. \tag{10}$$

Ľahko sa presvedčíme, že v rovniciach (9) a (10), ktoré sú rovnocenné s Maxwellovými rovnicami (8), vystupujúce tenzory, Maxwellove tenzory

$$\mathbf{F} = \mathbf{B} \times \mathbf{I} + \frac{i}{c}(\mathbf{E}\mathbf{l} - \mathbf{l}\mathbf{E}) \tag{11}$$

a

$$\mathbf{G} = \frac{i}{c}(\mathbf{E} \times \mathbf{I}) + (\mathbf{B}\mathbf{l} - \mathbf{l}\mathbf{B}) \tag{12}$$

sú antisymetrické a vzájomne duálne. Pre ľubovoľný trojrozmerný vektor $\mathbf{v}$, ako si to čitateľ jednoduchým prepočítaním môže ľahko sám dokázať, platí totiž identicky $\mathbf{v} \times \mathbf{I} = \mathbf{I} \times \mathbf{v}$, takže je tiež

$$\mathbf{F} = \mathbf{l} \times \mathbf{B} + \frac{i}{c}(\mathbf{l} \star \mathbf{E}) \tag{13}$$

a

$$\mathbf{G} = \frac{i}{c}(\mathbf{l} \times \mathbf{E}) + \mathbf{l} \star \mathbf{B}, \tag{14}$$

kde $\mathbf{l} \star \mathbf{E}$ a $\mathbf{l} \star \mathbf{B}$ sú antisymetrické a $\mathbf{l} \times \mathbf{E}$ a $\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ komplementárne súčiny príslušných vektorov.

Tenzory $\mathbf{F}$ a $\mathbf{G}$ môžeme výhodne použiť na odvodenie vektorov $\mathbf{E}'$ a $\mathbf{B}'$ v priestore S', ktorý sa vzhľadom na priestor S pohybuje rýchlosťou $\mathbf{v}$. Zo vzorcov (11) a (12) totiž bezprostredne vyplýva, že je:

$$\mathbf{E} = ic\mathbf{l} . \mathbf{F} \quad \text{a} \quad \mathbf{B} = \mathbf{G} . \mathbf{l}. \tag{15}$$

Keďže však v dôsledku invariantnosti Maxwellových rovníc, teda aj z nich vyplývajúcich rovníc (9) a (10), vzhľadom na Lorentzove transformácie veličiny $\mathbf{F}$ a $\mathbf{G}$ sú vzhľadom na tieto transformácie tiež invariantné, je:

$$\mathbf{E}' = ic\mathbf{l}' . \mathbf{F} \quad \text{a} \quad \mathbf{B}' = \mathbf{G} . \mathbf{l}', \tag{16}$$

pričom s časovou osou sústavy S' rovnobežný jednotkový vektor $\mathbf{l}'$ ako funkcia rýchlosti v pohybu sústavy S' vzhľadom na sústavu S (pozri napr. J. Krempaský, Tenzor deformácie priestoru a času pohybom, Matematicko-fyzikálny časopis SAV, roč. 5, 124, 1955) je:

$$\mathbf{l}' = \beta\left(\mathbf{l} - \frac{i}{c}\,\mathbf{v}\right) = -\frac{i}{c}\,\mathbf{v}^*,$$

kde $\mathbf{v}^*$ je štvorrozmerná rýchlosť pohybu sústavy S' vzhľadom na sústavu S. Teda tiež je:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v}^* . \mathbf{F} \quad \text{a} \quad \mathbf{B}' = \frac{i}{c}\,\mathbf{v}^* . \mathbf{G}. \tag{16a}$$

Z Maxwellových rovníc vyplýva, že je vždy:

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{P} \quad \text{a} \quad \mathbf{E} = -\,\mathrm{grad}\,V - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t},$$

kde $\mathbf{P}$ je t. zv. vektorový potenciál a V skalárny potenciál v elektromagnetickom poli. Maxwellove tenzory môžeme teda vyjadriť aj pomocou týchto veličín. Dostávame:

$$\mathbf{F} = (\nabla \times \mathbf{P}) \times \mathbf{I} + \frac{i}{c}(-\nabla V\mathbf{l} + \mathbf{l}\nabla V) + \frac{i}{c}\left(-\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}\mathbf{l} + \mathbf{l}\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}\right) =$$
$$= (\mathbf{P}\nabla - \nabla\mathbf{P}) + \left(\mathbf{P}\mathbf{l}\frac{\partial}{\partial u} - \mathbf{l}\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{P}\right) + (\mathbf{l}\nabla - \nabla\mathbf{l})\left(\frac{i}{c}\,V\right) =$$
$$= (\mathbf{P}\Box - \Box\mathbf{P}) + (\mathbf{l}\nabla - \nabla\mathbf{l})\left(\frac{i}{c}\,V\right)$$

alebo, ak k symbolu $(\mathbf{l}\nabla - \nabla\mathbf{l})$ pripočítame anulujúci sa symbol $\left(\mathbf{l}\mathbf{l}\frac{\partial}{\partial u} - \mathbf{l}\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{l}\right)$, takže bude:

$$(\mathbf{l}\nabla - \nabla\mathbf{l}) = (\mathbf{l}\nabla - \nabla\mathbf{l}) + \left(\mathbf{l}\mathbf{l}\frac{\partial}{\partial u} - \mathbf{l}\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{l}\right) = (\mathbf{l}\Box - \Box\mathbf{l}),$$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{P}\Box - \Box\mathbf{P}) + \left(\frac{i}{c}\,V\mathbf{l}\Box - \Box\frac{i}{c}\,V\mathbf{l}\right) = (\mathbf{V}\Box - \Box\mathbf{V}) = \Box \star \mathbf{V} = \mathrm{rot}\,\mathbf{V}, \tag{17}$$

kde $\mathbf{V} = \mathbf{P} + \frac{i}{c}\,V\mathbf{l}$ je tzv. štvorrozmerný vektorový potenciál v elektromagnetickom poli.

Tenzor $\mathbf{G}$ teda je, keďže je duálny k tenzoru $\mathbf{F}$,

$$\mathbf{G} = \Box \times \mathbf{V} = \mathit{rot}\,\mathbf{V}. \tag{18}$$

Rovnice (9) a (10) môžeme teda písať aj takto:

$$\mathrm{divrot}\,\mathbf{V} = \mu_0\mathbf{J}, \tag{19}$$
$$\mathrm{div}\mathit{rot}\,\mathbf{V} = 0, \tag{20}$$

čiže

$$\Box . (\Box \star \mathbf{V}) = \mu_0\mathbf{J} \tag{21}$$
$$\Box . (\Box \times \mathbf{V}) = 0. \tag{22}$$

Rovnicu (22) spĺňa však každý štvorrozmerný vektor $\mathbf{V}$, lebo je vždy (pozri napr. cit. štúdie J. Garaja)

$$\Box . (\Box \times \mathbf{V}) = -(\Box \times \Box) . \mathbf{V} = 0,$$

čo súvisí s tým, že rovnica (22) je dôsledkom Maxwellových rovníc, v našom poradí druhej a tretej, ktoré na trojrozmerný vektorový potenciál $\mathbf{P}$ a skalárny potenciál V, z ktorých je vytvorený štvorrozmerný potenciál $\mathbf{V}$, nekladú nijaké podmienky.

Každé riešenie diferenciálnej rovnice

$$\mathrm{divrot}\,\mathbf{V} = \mu_0\mathbf{J}$$

dáva teda jedno riešenie štyroch diferenciálnych Maxwellových rovníc.

Pretože je $\mathrm{divrot}\,\mathbf{V} = \Box . (\Box \star \mathbf{V}) = \Box . (\mathbf{V}\Box - \Box\mathbf{V}) = \mathrm{grad\,div}\,\mathbf{V} - \Box^2\mathbf{V}$, rovnicu (21) môžeme písať aj v názornejšom tvare

$$\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{V} - \Box^2\mathbf{V} = \mu_0\mathbf{J}. \tag{23}$$

Elektromagnetické pole je jednoznačne určené napr. Maxwellovým tenzorom $\mathbf{F} = \Box \star \mathbf{V}$. Ak je však nájdený jeden vektor $\mathbf{V}$, spĺňajúci predchádzajúcu rovnicu, spĺňa ju aj vektor $\mathbf{W} = \mathbf{V} + \Box\varphi$, lebo je $\Box \star \mathbf{W} = \Box \star (\mathbf{V} + \Box\varphi) = \Box \star \mathbf{V}$, keďže je $\Box \star (\Box\varphi) = (\Box \star \Box)\,\varphi = 0$. Vektor $\mathbf{W}$ však môžeme voliť vždy tak, aby bolo $\mathrm{div}\,\mathbf{W} = \mathrm{div}\,\mathbf{V} + \Box^2\varphi = 0$, na čo stačí splniť poslednú rovnicu, a to je vždy možné. O vektore $\mathbf{V}$ môžeme teda predpokladať, že spĺňa rovnice

$$\mathrm{div}\,\mathbf{V} = 0 \tag{24}$$
$$\Box^2\mathbf{V} = \mu_0\mathbf{J}. \tag{25}$$

Každé riešenie aj diferenciálnych rovníc (24) a (25) dáva teda jedno riešenie diferenciálnych rovníc Maxwellových.

Rovnice (24) a (25) možno rozpísať na známe rovnice

$$\mathrm{div}\,\mathbf{P} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0, \tag{26}$$

$$\Delta\mathbf{P} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = -\mu_0\varrho\mathbf{v}, \tag{27}$$

$$\Delta V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\varrho, \tag{28}$$

ktoré spĺňajú ani relativisticky nie invariantné potenciály, trojrozmerný vektorový potenciál $\mathbf{P}$ a skalárny potenciál V.

Došlo 9. VII. 1955.

Katedra fyziky
Slovenskej vysokej školy technickej,
Bratislava