O PLOŠE NAPLNĚNÉ OHNISKY PARABOL NA ELIPTICKÉM PARABOLOIDU

VLADIMÍR MAŠEK, Brno

Tento článek je doplněním dvou mých článků „O ploše naplněné ohnisky parabol na hyp. paraboloidu" (Rozpravy ČAV, II. tř., r. XXX, č. 33) a „Poznámka ku ploše naplněné ohnisky parabol na hyp. paraboloidu" (Rozpravy ČAV, II. tř. r. XXXI, č. 22).[1]

Ukážeme zde, jak se vytvoření plochy a její vlastnosti mění, vycházíme-li od paraboloidu eliptického, a uvedeme některé nové vlastnosti této plochy.

Podobnými úvahami jako v uvedených pracích seznáme, že geometrickým místem ohnisek parabol na eliptickém paraboloidu je plocha 4. řádu, a to Steinerova plocha římská. Označme ji P^4. Vytvoří se jednoduše tím způsobem, pošineme-li všechny paraboly daného eliptického paraboloidu, jdoucí jeho vrcholem, směrem osy tak, aby se jejich ohniska ztotožnila s bodem F na ose z paraboloidu ve vzdálenosti $\frac{a^2 + b^2}{4}$ od jeho vrcholu O.

Je-li rovnice

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \tag{1}$$

rovnicí daného eliptického paraboloidu P, plyne podle výše uvedených prací rovnice plochy P^4 ve tvaru

$$4(x^2b^2 + y^2a^2)^2 - 4zx^2b^2(x^2b^2 + y^2a^2) + a^2b^2(x^2b^4 + y^2a^4) = 0. \tag{2}$$

Z rovnice (2) plyne, že plocha P^4 je plochou *Steinerovou římskou, jejíž reálnou dvojnou přímkou je osa z paraboloidu. Další dvě dvojné přímky jsou imaginární a leží v imaginárních rovinách jdoucích osou z a imaginárními přímkami v rovině (xy) o směrnicích* $\pm i\frac{b}{a}$. Uvedené dvojné přímky protínají se v nekonečně vzdáleném bodu Z_∞ osy z. Vrcholy V a V' parabol A a B plochy P^4, jež jsou naplněny ohnisky parabol v rovinách rovnoběžných s hlavními rovinami daného eliptického paraboloidu P, jsou kuspidálními body plochy P^4.

Rovněž obdobnými úvahami plyne, že kužel opsaný ploše P^4 z libovolného bodu M osy z dotýká se plochy P^4 podle křivky k^4, jež je prostorovou *křivkou sférickou 4. řádu* 1. druhu, která leží na ploše kulové procházející vrcholem M kužele a mající střed ve společném ohnisku F parabol plochy P^4.

O ploše Steinerově platí, že kužel opsaný ploše z bodu ležícího na dvojné přímce se rozpadá ve dva kužele 2. stupně. Výpočtem při ploše P^4 snadno zjistíme, že prvý kužel degeneruje ve dvě roviny jdoucí osou z. Podle výšky $z = m$ vrcholu M nad (xy) jsou tyto roviny buď reálné $\left(\frac{b^2}{4} \leqq m \leqq \frac{a^2}{4}\right)$, nebo imaginárné $\left(m > \frac{a^2}{4} \text{ a } m < \frac{b^2}{4}\right)$. Pro $m = \frac{a^2 + b^2}{4}$ přecházejí v roviny isotropické. Pro $m = \frac{b^2}{4}$, resp. $m = \frac{a^2}{4}$, splývají reálné roviny s rovinou (xz), resp. (yz).

Druhý kužel je kuželem 2. stupně o rovnici

$$a^4y^2 + b^4x^2 - 4m(x^2b^2 + a^2y^2) - a^2b^2(z - m)^2 = 0. \tag{3}$$

V tomto případě platí pro plochu P^4, jak bylo odvozeno v první z výše uvedených prací, že *kužele opsané ploše P^4 z bodů dvojné přímky z mají tytéž směry cyklických rovin.*

Zapadne-li vrchol kužele do počátku O, odvodíme snadno při ploše P^4, že tento kužel je rovinami kolmými k ose z protnut v elipsách, jejichž poměr poloos je rovný *poměru parametrů hlavních parabol plochy.*

Styčné křivky k^4 ploše opsaných kuželů z bodů dvojné přímky z promítají se orthogonálně do roviny (xz) co elipsy homothetické k jejich společnému středu V' co středu homothetie. Poměr jejich poloos při ploše P^4 je $\sqrt{a^2 - b^2} : a$. Platí tudíž pro plochu P^4 analogické jednoduché projektivní vytvoření jako pro dříve uvažovanou plochu Steinerovu v pracích předešlých, a to pomocí svazku soustředných ploch kulových o středu ve společném ohnisku F všech parabol plochy a právě uvedeného svazku koaxionálních homothetických eliptických válců, při čemž odpovídající si plochy těchto projektivních svazků se dotýkají ve vrcholu M příslušného dotyčného kužele.

Pro plochu P^4 možno ještě uvést, že cyklické roviny kuželů opsaných ploše z bodů dvojné přímky z jsou současně *cyklickými rovinami souosých eliptických válců*, jimiž se dotyčné křivky k^4 promítají do roviny (xy).

Uveďme ještě některé nové vlastnosti plochy P^4.

Uvažujme kužel opsaný ploše P^4 z vrcholu V (kuspidálního bodu) hlavní paraboly A plochy v rovině (xz). Jeho rovnici, po pošinutí počátku do vrcholu M kužele, lze psáti ve tvaru

$$[y\sqrt{a^2 - b^2} - bz][y\sqrt{a^2 - b^2} + bz] = 0. \tag{4}$$

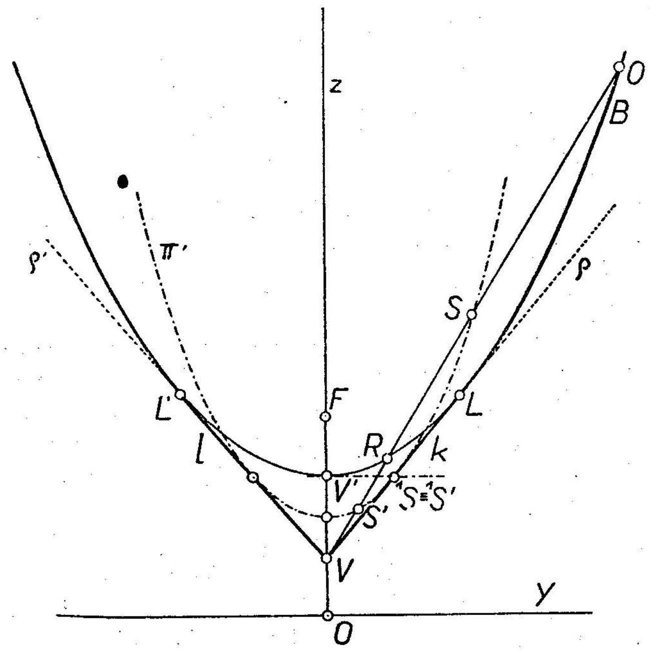
Roviny ϱ a ϱ', v něž dotyčný kužel degeneruje, jsou rovnoběžné s cyklickými rovinami kuželů opsaných ploše P^4 z bodů dvojné přímky z.

Dotyčná křivka tohoto degenerovaného kužele s plochou P^4 musí být, podle toho, co jsme dříve uvedli, křivkou sférickou, ležící na ploše kulové prochá-

---
[1] Též Bulletin international de l'Académie des sciences de Bohême, 1922.

zející bodem V a mající střed ve společném ohnisku F všech parabol plochy. *Dotýkají se proto roviny ϱ a ϱ' plochy P^4 podél kružnic.* Označme je k a l. Kružnice k a l jsou jedinými reálnými kružnicemi na ploše P^4.

Roviny ϱ a ϱ' procházejí vrcholovou tečnou v hlavní paraboly A plochy v rovině (xz) a *jsou společnými rovinami svazku tečných rovin o ose v a dotyčného válce plochy podél paraboly hlavní B v rovině (yz).*



Roviny ϱ a ϱ' se dotýkají plochy P^4 podél kružnic k a l a v bodu kuspidálním V. Jsou tudíž dvojnásobnými tečnými rovinami plochy, a to *konickými.*

Uvažujme kuželosečky, v nichž plochu P^4 protínají tečné roviny válce opsaného ploše podél její hlavní paraboly B v rovině (yz).

Geometrické místo středů všech těchto kuželoseček obdržíme početně ve tvaru

$$16b^2x^2 + 16^2a^2y^2 = a^4b^2 - a^2b^4; \quad z = \frac{a^2}{4}. \tag{5}$$

Platí tudíž: *Středy všech kuželoseček, v nichž roviny tečné plochy podél hlavní paraboly B v rovině (yz) plochu protínají, leží na elipse ε v rovině rovnoběžné s (xy) ve vzdálenosti $z = \frac{a^2}{4}$, t. j. dotýkající se hlavní paraboly A plochy v rovině (xz) v bodu kuspidálním V.*

Poněvadž dále rovnice půdorysu elipsy plochy v libovolné rovině uvažovaných tečných rovin, po přetransformování do středu co počátku, podává rovnici totožnou s průmětem ε_1 elipsy ε, platí zajímavá věta:

Roviny tečné podél hlavní paraboly B plochy v rovině (yz) protínají plochu v elipsách, jejichž průměty do roviny (xy) jsou elipsy vesměs shodné a zároveň shodné s elipsou ε naplněnou středy všech těchto elips.

Obalová křivka půdorysných průmětů těchto elips je obalovou křivkou elipsy shodné s průmětem ε_1 elipsy ε, pohybující se svým středem po elipse ε_1 při zachování rovnoběžnosti os. Je tudíž obalovou křivkou elipsa ${}^1\varepsilon$ homothetická s elipsou ε_1 vzhledem k jejímu středu co středu homothetie pro poměr 2 : 1. V prostoru dotýkají se uvažované průsečné kuželosečky eliptického válce jdoucího elipsou ${}^1\varepsilon$ kolmo k rovině (xy).

Snadno nahlédneme, že roviny jdoucí vrcholovou tečnou v hlavní paraboly A v rovině (xz) protínají plochu v kuželosečkách, jejichž středy leží na parabole π' homothetické k parabole hlavní B v rovině (yz) vzhledem k vrcholu V co středu homothetie pro poměr 1 : 2.

Obdobný výsledek platí pro středy kuželoseček plochy ležící v rovinách svazku, jehož osou je tečna v' v kuspidálním bodu V', totožném s vrcholem hlavní paraboly B v rovině (yz).

Došlo 20. V. 1955.

О ПОВЕРХНОСТИ НАПОЛНЕННОЙ ФОКУСАМИ ВСЕХ ПАРАБОЛ НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ПАРАБОЛОИДЕ

ВЛАДИМИР МАШЕК

Выводы

Эта поверхность образуется таком сдвигом всех парабол проходящих вершиной данного параболоида P в направлении оси, при котором их фокуси совпадут с точкой F на оси параболоида на расстоянии $\frac{a^2 + b^2}{4}$ от его вершины; a^2 и b^2 означают параметры его главных парабол.

Ось z представляет двойную прямую поверхности P^4. Плоскость бесконечного удаления пересекает поверхность по двум двойным иммагинарным прямым, пересекающимся в бесконечно удаленной точке Z_∞ на оси z. Отсюда следует, что поверхность P^4 является Штейнеровой римской поверхностю.

В работе решается вопрос качеств поверхностей P_4.