MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK V ČÍSLO 4

O MNOŽINOVÝCH SYSTÉMOCH UZAVRETÝCH VZHĽADOM NA NIEKTORÉ MNOŽINOVÉ OPERÁCIE

IGOR KLUVÁNEK, Bratislava

Množinové systémy boli spravidla študované v súvislosti s definíciou miery a integrálu. Pritom sa jednotliví autori obmedzovali iba na tie vlastnosti množinových systémov, ktoré bezprostredne potrebovali k rozvitiu ďalšej teórie. L. Mišík ma upozornil na to, že je užitočné zhrnúť z jedného hľadiska poznatky o množinových systémoch, prihliadajúc na viaceré vlastnosti systémov, ako je zvykom. Toto je užitočné pre vyšetrovanie všeobecnejších množinových funkcií, ako je miera. Za podklad mi slúžili najmä tie prednášky o množinových systémoch, ktoré predniesol L. Mišík v seminári z teórie miery a integrálu v SAV.

V prvom odseku sú v krátkosti zhrnuté niektoré potrebné predbežné poznatky a označenia. V druhom odseku sú zavedené vlastnosti množinových systémov, s ktorými sa budeme v ďalšom zaoberať, a tiež definícia minimálneho množinového systému nad daným systémom s vlastnosťami z danej množiny vlastností a veta o jeho existencii. V treťom odseku je podaný spôsob konštrukcie indukciou minimálneho systému s danými vlastnosťami nad daným systémom. Vo štvrtom odseku je táto konštrukcia využitá pre vyšetrenie niektorých jednoduchých vzťahov a pre relativizáciu pojmu minimálneho systému. V piatom odseku sú definované a vyšetrované niektoré všeobecné vzťahy medzi množinami vlastností množinových systémov. Šiesty odsek je venovaný špeciálnym množinám vlastností a ich vzťahom. V siedmom odseku je ako príklad uvedená konštrukcia σ-okruhu Borelových množín.

1.

V celom referáte uvažované množiny budú väčšinou podmnožinami nejakej pevne zvolenej množiny X. Prvky množiny X budeme volať bodmi, danú množinu X základným priestorom alebo základnou množinou.

0 je prázdna množina, t. j. množina, ktorá neobsahuje žiaden prvok. $a \in A$ značí, že bod a je prvkom množiny A. V opačnom prípade píšeme $a \bar{\in} A$. $A \subset B$ značí, že A je podmnožinou množiny B, t. j. každý prvok množiny A je súčasne aj prvkom množiny B. V opačnom prípade píšeme $A \not\subset B$.

Ak A, B sú množiny, potom symboly $A \cup B$, $A \cap B$ majú obvyklý význam množinového súčtu, resp. prieniku. $A \cup B$ značí množinu tých a len tých bodov, ktoré sú prvkami aspoň jednej z množín A lebo B. $A \cap B$ je množina tých a len tých bodov, ktoré súčasne patria do oboch množín A aj B. $A - B = A - (A \cap B)$ je množina bodov z množiny A, ktoré nie sú prvkami množiny B. Kladieme $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$. Množina $A \triangle B$ je symetrická diferencia množín A a B. Množina $X - A = A^*$ je komplement množiny A.

Ak T je ľubovoľná množina a ak ku každému $\alpha \in T$ priradíme istú množinu A_α, potom symboly $\bigcup_{\alpha \in T} A_\alpha$ a $\bigcap_{\alpha \in T} A_\alpha$ definujeme:

$$a \in \bigcup_{\alpha \in T} A_\alpha \Leftrightarrow \sum_{\alpha \in T} (a \in A); \quad a \in \bigcap_{\alpha \in T} A_\alpha \Leftrightarrow \prod_{\alpha \in T} (a \in A_\alpha).^1$$

Množinu všetkých prirodzených čísel 1, 2, 3, ... označíme N.

Množinu všetkých ordinálnych čísel prvej a druhej číselnej triedy, t. j. množinu všetkých konečných a spočetných ordinálnych čísel označíme $\mathfrak{J}$. N_n značí úsek množiny prirodzených čísel, je to množina prirodzených čísel menších ako n. Podobne pre $\alpha \in \mathfrak{J}$ je $\mathfrak{J}_\alpha$ úsek množiny ordinálnych čísel prvej a druhej číselnej triedy, je to množina všetkých ordinálnych čísel menších ako α. Znak Ω použijeme pre prvé nespočetné ordinálne číslo.

Funkcia, ktorej obor definície je N a ktorej hodnoty sú množiny, je postupnosť množín. Budeme ju krátko označovať $\{A_n\}_1^\infty$.

Funkcia, ktorej obor definície je $\mathfrak{J}$ a ktorej hodnoty sú množiny, je transfinitná postupnosť množín. Pre ňu použijeme označenie $\{A_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$. Postupnosť, resp. transfinitná postupnosť množín je stúpajúca (klesajúca), ak pre každé $n \in N$ je $A_n \subset A_{n+1}$ ($A_n \supset A_{n+1}$), resp. pre každé $\alpha \in \mathfrak{J}$, $\beta \in \mathfrak{J}$, $\alpha < \beta$ je $A_\alpha \subset A_\beta$ ($A_\alpha \supset A_\beta$).

Pre postupnosť množín $\{A_n\}_1^\infty$ definujeme:

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_k, \quad \limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_k.$$

Postupnosť množín $\{A_n\}_1^\infty$ nazývame konvergentnou, ak platí: $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$. V tomto prípade množinu $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$ označujeme $\lim_n A_n$ a nazývame limitou postupnosti množín $\{A_n\}_1^\infty$.

Každá monotónna postupnosť množín je konvergentná a platí $\lim_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, ak $\{A_n\}_1^\infty$ je stúpajúca a $\lim_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, ak $\{A_n\}_1^\infty$ je klesajúca.

---

[1] Význam logických symbolov Σ, Π, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ nájde čitateľ napr. v Jarníkovom *Diferenciálnom počte*, kap. I, § 1.

V ďalšom budeme používať princíp matematickej indukcie a transfinitnej indukcie po prvé nespočetné ordinálne číslo a tiež nasledujúce dve vety, vetu o konštrukcii úplnou indukciou a vetu o konštrukcii transfinitnou indukciou.

Nech M je ľubovoľná množina. Nech $a \in M$. Nech ku každému $n \in N$ existuje zobrazenie, ktoré každej n-tici prvkov z M $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ priraďuje prvok $P_n(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in M$.

Potom existuje práve jedna postupnosť $\{a_n\}_1^\infty$ s vlastnosťami:

$$a_1 = a,$$
$$a_{n+1} = P_n(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Nech M je ľubovoľná množina. Nech $a \in M$. Nech ku každému $\alpha \in \mathfrak{J}$ existuje zobrazenie, ktoré každej funkcii $(b_0, b_1, \ldots, b_\xi, \ldots)$, definovanej na $\mathfrak{J}_\alpha$ a ktorej hodnoty sú z M, priraďuje prvok $P_\alpha(b_0, b_1, \ldots, b_\xi, \ldots) \in M$. Potom existuje práve jedna transfinitná postupnosť $\{a_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ s vlastnosťami:

$$a_0 = a,$$
$$a_\alpha = P_\alpha(a_0, a_1, \ldots, a_\xi, \ldots).$$

2.

Nech je daný základný priestor X. Množina, ktorej prvky sú podmnožiny X a iba podmnožiny X, je množinový systém nad základným priestorom X alebo množinový systém nad množinou X, krátko množinový systém. $\mathbf{X}$ značí systém všetkých podmnožín X.

Definícia *1. Nech* $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$. *Systém* $\mathbf{M}$ *je:*

a) uzavretý vzhľadom na súčet (aditívny),
b) uzavretý vzhľadom na disjunktný súčet,
c) uzavretý vzhľadom na rozdiel,
d) uzavretý vzhľadom na vlastný rozdiel,
e) uzavretý vzhľadom na symetrickú diferenciu,
f) uzavretý vzhľadom na prenik (multiplikatívny),
g) uzavretý vzhľadom na komplement,
h) uzavretý vzhľadom na dolnú limitu,
i) uzavretý vzhľadom na hornú limitu,
j) uzavretý vzhľadom na limitu,
k) monotónny zhora,
l) monotónny zdola,
m) monotónny,
n) σ — uzavretý vzhľadom na súčet (σ — aditívny),
o) σ — uzavretý vzhľadom na disjunktný súčet,
p) σ — uzavretý vzhľadom na prenik (σ — multiplikatívny),
r) dedičný,
s) obrátene dedičný,

keď platí:

a) ak $A \in \mathbf{M}$, $B \in \mathbf{M}$, *potom aj* $A \cup B \in \mathbf{M}$,
b) ak $A \in \mathbf{M}$, $B \in \mathbf{M}$ *a* $A \cap B = 0$, *potom aj* $A \cup B \in \mathbf{M}$,
c) ak $A \in \mathbf{M}$, $B \in \mathbf{M}$, *potom aj* $A - B \in \mathbf{M}$,
d) ak $A \in \mathbf{M}$, $B \in \mathbf{M}$ *a* $B \subset A$, *potom aj* $A - B \in \mathbf{M}$,
e) ak $A \in \mathbf{M}$, $B \in \mathbf{M}$, *potom aj* $A \triangle B \in \mathbf{M}$,
f) ak $A \in \mathbf{M}$, $B \in \mathbf{M}$, *potom aj* $A \cap B \in \mathbf{M}$,
g) ak $A \in \mathbf{M}$, *potom aj* $A^* = X - A \in \mathbf{M}$.
h) ak $\{A_n\}_1^\infty$ *je postupnosť množín taká, že* $A_n \in \mathbf{M}$ *pre* $n = 1, 2, 3, \ldots$, *potom aj* $\liminf\limits_n A_n \in \mathbf{M}$,
i) ak $A_n \in \mathbf{M}$ *pre* $n = 1, 2, 3, \ldots$, *potom aj* $\limsup\limits_n A_n \in \mathbf{M}$,
j) ak $\{A_n\}_1^\infty$ *je konvergentná postupnosť množín a* $A_n \in \mathbf{M}$ *pre* $n = 1, 2, 3, \ldots$, *potom aj* $\lim\limits_n A_n \in \mathbf{M}$,
k) ak $\{A_n\}_1^\infty$ *je klesajúca postupnosť množín z* $\mathbf{M}$, *potom aj* $\bigcap\limits_{n=1}^\infty A_n \in \mathbf{M}$,
l) ak $\{A_n\}_1^\infty$ *je rastúca postupnosť množín z* $\mathbf{M}$, *potom aj* $\bigcup\limits_{n=1}^\infty A_n \in \mathbf{M}$,
m) ak *platí k) a l),*
n) ak $\{A_n\}_1^\infty$ *je ľubovoľná postupnosť množín z* $\mathbf{M}$, *potom aj* $\bigcup\limits_{n=1}^\infty A_n \in \mathbf{M}$,
o) ak $\{A_n\}_1^\infty$ *je postupnosť množín z* $\mathbf{M}$ *a* $A_n \cap A_m = 0$, *pre* $n \neq m$, *potom aj* $\bigcup\limits_{n=1}^\infty A_n \in \mathbf{M}$,
p) ak $\{A_n\}_1^\infty$ *je postupnosť množín z* $\mathbf{M}$, *potom aj* $\bigcap\limits_{n=1}^\infty A_n \in \mathbf{M}$,
r) ak $A \in \mathbf{M}$ *a* $B \subset A$, *potom aj* $B \in \mathbf{M}$,
s) ak $A \in \mathbf{M}$, $X \supset B \supset A$, *potom aj* $B \in \mathbf{M}$.

Dohovor: Systém uzavretý vzhľadom na súčet budeme pre jednoduchosť nazývať systémom s vlastnosťou a) a podobne aj pre ostatné vlastnosti.

Množinu vlastností a) až s) označíme W. Množinu {a), b), c), d), e), f), g), r), s)} označíme W_0.

Systém $\mathbf{X}$ má všetky vlastnosti z množiny W. Ak vezmeme totiž dve ľubovoľné množiny $A \subset X$, $B \subset X$, množiny $A \cup B$, $A - B$, $A \triangle B$, $A \cap B$ sú podmnožinami X. Tiež ak $\{A_n\}_1^\infty$ je ľubovoľná postupnosť podmnožín X, všetky množiny $\liminf\limits_n A_n$, $\limsup\limits_n A_n$, $\bigcup\limits_{n=1}^\infty A_n$, $\bigcap\limits_{n=1}^\infty A_n$ sú podmnožinami X. Podobne je to aj pre zvyšujúce vlastnosti z množiny W.

Ak $V \subset W$ a všetky systémy z istej množiny systémov $\mathfrak{S}$ majú všetky vlastnosti z množiny V, potom aj prenik týchto systémov má všetky vlastnosti z množiny V. Nech všetky systémy $\mathbf{M} \in \mathfrak{S}$ majú všetky vlastnosti z množiny V. Nech a) $\in V$, resp. c) $\in V$, resp. e) $\in V$, resp. f) $\in V$, ďalej nech h) $\in V$, resp. i) $\in V$, resp. n) $\in V$, resp. p) $\in V$. Ak $A \in \cap \mathfrak{S}$, $B \in \cap \mathfrak{S}$[2], potom $A \in \mathbf{M}$, $B \in \mathbf{M}$ pre každý systém $\mathbf{M} \in \mathfrak{S}$ a teda aj $A \cup B$, resp. $A - B$, resp. $A \triangle B$, resp. $A \cap B \in \mathbf{M}$ pre každý systém $\mathbf{M} \in \mathfrak{S}$ a teda $A \cup B$, resp. $A - B$, resp. $A \triangle B$, resp. $A \cap B \in \cap \mathfrak{S}$. Ak ďalej je $\{A_n\}_1^\infty$ postupnosť množín zo systému $\cap \mathfrak{S}$ je aj $A_n \in \mathbf{M}$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ a pre všetky $\mathbf{M} \in \mathfrak{S}$ a teda aj $\liminf\limits_n A_n$, resp. $\limsup\limits_n A_n$, resp. $\bigcup\limits_{n=1}^\infty A_n$, resp. $\bigcap\limits_{n=1}^\infty A_n \in \mathbf{M}$ pre všetky $\mathbf{M} \in \mathfrak{S}$ a z toho aj $\liminf\limits_n A_n$, resp. $\limsup\limits_n A_n$, resp. $\bigcup\limits_{n=1}^\infty A_n$, resp. $\bigcap\limits_{n=1}^\infty A_n \in \cap \mathfrak{S}$. Podobne aj pre ostatné vlastnosti z W.

Lemma 1. *Nech* $V \subset W_0$. *Nech všetky členy postupnosti množinových systémov* $\{\mathbf{M}_n\}_1^\infty$ *majú všetky vlastnosti z množiny* V. *Potom aj systém* $\liminf\limits_n \mathbf{M}_n$ *má všetky vlastnosti z množiny* V.

Dôkaz. I. Podľa predošlého pre každé n systémy $\bigcap\limits_{k=n}^\infty \mathbf{M}_k$ majú všetky vlastnosti z množiny V. Podľa definície $\liminf\limits_n \mathbf{M}_n = \bigcup\limits_{n=1}^\infty \bigcap\limits_{k=n}^\infty \mathbf{M}_k$ a postupnosť $\{\bigcap\limits_{k=n}^\infty \mathbf{M}_k\}_{n=1}^\infty$ je rastúca, lemma bude teda dokázaná, ak pre každú rastúcu postupnosť $\{\mathbf{K}_n\}_1^\infty$ systémov s vlastnosťami z množiny V dokážeme, že aj systém $\bigcup\limits_{n=1}^\infty \mathbf{K}_n$ má všetky vlastnosti z množiny V.

II. Nech je $\{\mathbf{K}_n\}_1^\infty$ rastúca postupnosť systémov s vlastnosťami z množiny V. Nech ďalej a) $\in V$, resp. c) $\in V$, resp. e) $\in V$ atď. Vezmime ľubovoľné $A \in \bigcup\limits_{n=1}^\infty \mathbf{K}_n$, $B \in \bigcup\limits_{n=1}^\infty \mathbf{K}_n$. Existujú prirodzené čísla n_1, n_2 také, že $A \in \mathbf{K}_{n_1}$, $B \in \mathbf{K}_{n_2}$. Položme $n = \max\{n_1, n_2\}$. Je $A \in \mathbf{K}_n$, $B \in \mathbf{K}_n$ a podľa predpokladu aj $A \cup B$, resp. $A - B$, atď. $\in \mathbf{K}_n$ a teda $A \cup B$, resp. $A - B$, atď. $\in \bigcup\limits_{n=1}^\infty \mathbf{K}_n$, č. b. t. d.

Z lemmy 1 vyplýva, že pre konvergentnú (špeciálne monotónnu) postupnosť systémov $\{\mathbf{M}_n\}_1^\infty$ s vlastnosťami z množiny V má aj systém $\mathbf{M} = \lim\limits_n \mathbf{M}_n$ všetky vlastnosti z množiny V.

Lemma 2. *Nech* $V \subset W$. *Nech všetky členy transfinitnej postupnosti množinových systémov* $\{\mathbf{M}_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ *majú všetky vlastnosti z množiny* V. *Potom aj systém* $\mathbf{M} = \bigcup\limits_{\alpha<\Omega} \bigcap\limits_{\alpha\leq\beta<\Omega} \mathbf{M}_\beta$ *má všetky vlastnosti z množiny* V.

Dôkaz. Pretože systémy $\bigcap\limits_{\alpha\leq\beta<\Omega} \mathbf{M}_\beta$ majú všetky vlastnosti z množiny V a tvoria rastúcu transfinitnú postupnosť, stačí dokázať pre rastúcu transfinitnú postupnosť $\{\mathbf{K}_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$, ktorej členy majú vlastnosti z množiny V, že aj $\bigcup\limits_{\alpha<\Omega} \mathbf{K}_\alpha$ má všetky vlastnosti z množiny V. Nech teda $\{\mathbf{K}_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ je rastúca postupnosť systémov s vlastnosťami z V. Pre vlastnosti z W_0 dôkaz prebieha podobne ako v lemme 1. Nech h) $\in V$, resp. i) $\in V$, atď. Nech $A_n \in \bigcup\limits_{\alpha<\Omega} \mathbf{K}_\alpha$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$, máme ukázať, že $\liminf\limits_n A_n$, resp. $\limsup\limits_n A_n \in \bigcup\limits_{\alpha<\Omega} \mathbf{K}_\alpha$ atď. Existuje taká postupnosť ordinálnych čísel 1. alebo 2. číselnej triedy $\{\alpha_n\}_1^\infty$ že $A_n \in \mathbf{K}_{\alpha_n}$. K po-

[2] $\cap \mathfrak{S}$ znamená systém všetkých množín A, pre ktoré $A \in \mathbf{M}$ pre každý systém $\mathbf{M} \in \mathfrak{S}$.

stupnosti $\{\alpha_n\}_1^\infty$ existuje najmenšie ordinálne číslo α_0 také, že platí $\alpha_n \leqq \alpha_0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Pretože postupnosť $\{\mathbf{K}_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ je rastúca, je $A_n \in K_{\alpha_0}$ a ďalej podľa predpokladu $\liminf_n A_n$, resp. $\limsup_n A_n$ atď. $\in \bigcup_{\alpha<\Omega} \mathbf{K}_\alpha$, č. b. t. d.

Veta 1. *Nech $V \subset W$. Nech $\mathbf{K} \subset \mathbf{X}$. Potom existuje jeden a len jeden systém $\mathbf{m}_V(\mathbf{K})$ s vlastnosťami:*

1°. $\mathbf{K} \subset \mathbf{m}_V(\mathbf{K})$.

2°. *$\mathbf{m}_V(\mathbf{K})$ má všetky vlastnosti z množiny V.*

3°. *Pre každý systém $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$ s vlastnosťami 1°, 2° platí $\mathbf{m}_V(\mathbf{K}) \subset \mathbf{M}$.*[3]

Dôkaz. I. Označme $\mathfrak{S}$ množinu všetkých systémov s vlastnosťami 1°, 2°. Množina $\mathfrak{S}$ je neprázdna, pretože $\mathbf{X} \in \mathfrak{S}$. Položme $\mathbf{m}_V(\mathbf{K}) = \bigcap \mathfrak{S}$. Zrejme $\bigcap \mathfrak{S} \subset \mathbf{X}$. Systém $\bigcup \mathfrak{S}$ má vlastnosti 1°, 2°, 3°.

1°. $\mathbf{K} \subset \bigcap \mathfrak{S}$, pretože $\mathbf{K} \subset \mathbf{S}$ pre každé $\mathbf{S} \in \mathfrak{S}$.

2°. Podľa úvahy na začiatku tohto odstavca.

3°. Nech $\mathbf{M}$ má vlastnosti 1°, 2°, teda $\mathbf{M} \in \mathfrak{S}$. Potom $\bigcap \mathfrak{S} \subset \mathbf{M}$.

II. Pripusťme, že existujú dva systémy s vlastnosťami 1°, 2°, 3°, $\mathbf{m}_V(\mathbf{K})$, $\mathbf{m}'_V(\mathbf{K})$. Pretože $\mathbf{m}_V(\mathbf{K})$ má vlastnosti 1°, 2°, 3° a $\mathbf{m}'_V(\mathbf{K})$ má vlastnosti 1°, 2°, podľa 3° platí $\mathbf{m}_V(\mathbf{K}) \subset \mathbf{m}'_V(\mathbf{K})$. Z podobných dôvodov tiež $\mathbf{m}'_V(\mathbf{K}) \subset \mathbf{m}_V(\mathbf{K})$. Tým je veta v úplnosti dokázaná.

Definícia 2. *Systém $\mathbf{m}_V(\mathbf{K})$ je minimálny množinový systém nad systémom $\mathbf{K}$ s vlastnosťami z množiny V.*

3.

V tomto odstavci ukážeme spôsob, ako k danému systému $\mathbf{M}$ a nejakej množine vlastností V možno indukciou skonštruovať systém $\mathbf{m}_V(\mathbf{M})$. Z definície a tiež z tejto konštrukcie systému $\mathbf{m}_V(\mathbf{M})$ vyplývajú niektoré jeho vlastnosti.

Najskôr priradíme každej množine vlastností z množiny W isté zobrazenie množiny $2^{\mathbf{X}}$, t. j. množiny všetkých systémov nad X, do seba touto definíciou:

Definícia 3. Pre každý systém $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$ kladieme:

$\varphi^{(a)}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cup \underset{Z \in \mathbf{X}}{E} \{$*existujú* $A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{A}$ *tak, že* $Z = A \cup B\}$,[4,5]

$\varphi^{(b)}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cup \underset{Z \in \mathbf{X}}{E} \{$*existujú* $A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{A}, A \cap B = 0$ *tak, že* $Z = A \cup B\}$,

$\varphi^{(c)}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cup \underset{Z \in \mathbf{X}}{E} \{$*existujú* $A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{A}$ *tak, že* $Z = A - B\}$,[6]

$\varphi^{(d)}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cup \underset{Z \in \mathbf{X}}{E} \{$*existujú* $A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{A}, B \subset A$ *tak, že* $Z = A - B\}$,

$\varphi^{(e)}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cup \underset{Z \in \mathbf{X}}{E} \{$*existujú* $A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{A}$ *tak, že* $Z = A \Delta B\}$,

$\varphi^{(f)}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cup \underset{Z \in \mathbf{X}}{E} \{$*existujú* $A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{A}$ *tak, že* $Z = A \cap B\}$,[5]

[3] Pozri [2], str. 22 (str. 27); [4], str. 86, aj iní.

[4] Ak Y je množina a $\pi(y)$ je výrok, týkajúci sa prvkov tejto množiny, potom $\underset{y \in Y}{E}\{\pi(y)\}$ značí množinu všetkých prvkov množiny Y, pre ktoré výrok $\pi(y)$ platí.

[5] Pozri [5], str. 165.

[6] Pozri [5], str. 167.

$\varphi^{(g)}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cup \underset{Z \in \mathbf{X}}{E} \{$*existuje* $A \in \mathbf{A}$ *tak, že* $Z = A^*\}$,

$\varphi^{(h)}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cup \underset{Z \in \mathbf{X}}{E} \{$*existuje postupnosť* $\{A_n\}_1^\infty, A_n \in \mathbf{A}, n = 1, 2, 3, \ldots$ *tak, že* $Z = \liminf_n A_n\}$,

$\varphi^{(i)}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cup \underset{Z \in \mathbf{X}}{E} \{$*existuje postupnosť* $\{A_n\}_1^\infty, A_n \in \mathbf{A}, n = 1, 2, 3, \ldots$ *tak, že* $Z = \limsup_n A_n\}$,

$\varphi^{(j)}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cup \underset{Z \in \mathbf{X}}{E} \{$*existuje konvergentná postupnosť* $\{A_n\}_1^\infty, A_n \in \mathbf{A}, n = 1, 2, 3, \ldots$ *tak, že* $Z = \lim_n A_n\}$,

$\varphi^{(k)}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cup \underset{Z \in \mathbf{X}}{E} \{$*existuje klesajúca postupnosť* $\{A_n\}_1^\infty, A_n \in \mathbf{A}, n = 1, 2, 3, \ldots$ *tak, že* $Z = \bigcap_{n=1}^\infty A_n\}$,

$\varphi^{(l)}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cup \underset{Z \in \mathbf{X}}{E} \{$*existuje rastúca postupnosť* $\{A_n\}_1^\infty, A_n \in \mathbf{A}, n = 1, 2, 3, \ldots$ *tak, že* $Z = \bigcup_{n=1}^\infty A_n\}$,

$\varphi^{(m)}(\mathbf{A}) = \varphi^{(k)}(\mathbf{A}) \cup \varphi^{(l)}(\mathbf{A})$,

$\varphi^{(n)}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cup \underset{Z \in \mathbf{X}}{E} \{$*existuje postupnosť* $\{A_n\}_1^\infty, A_n \in \mathbf{A}, n = 1, 2, 3, \ldots$ *tak, že* $Z = \bigcup_{n=1}^\infty A_n\}$,[7]

$\varphi^{(o)}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cup \underset{Z \in \mathbf{X}}{E} \{$*existuje postupnosť* $\{A_n\}_1^\infty, A_n \in \mathbf{A}, n = 1, 2, 3, \ldots, A_n \cap A_m = 0, n \neq m$ *tak, že* $Z = \bigcup_{n=1}^\infty A_n\}$,

$\varphi^{(p)}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cup \underset{Z \in \mathbf{X}}{E} \{$*existuje postupnosť* $\{A_n\}_1^\infty, A_n \in \mathbf{A}, n = 1, 2, 3, \ldots$ *tak, že* $Z = \bigcap_{n=1}^\infty A_n\}$,[7]

$\varphi^{(r)}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cup \underset{Z \in \mathbf{X}}{E} \{$*existuje* $A \in \mathbf{A}$ *tak, že* $Z \subset A\}$,

$\varphi^{(s)}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cup \underset{Z \in \mathbf{X}}{E} \{$*existuje* $A \in \mathbf{A}$ *tak, že* $A \subset Z\}$.

Ďalej ku každej množine vlastností $V \subset W$ priradíme zobrazenie množiny $2^{\mathbf{X}}$ do množiny $2^{\mathbf{X}}$ takto:

Ak $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset W$, potom pre každý $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$ kladieme:

$$\varphi^V(\mathbf{A}) = \varphi^{(x_1)}(\mathbf{A}) \cup \varphi^{(x_2)}(\mathbf{A}) \cup \ldots \cup \varphi^{(x_n)}(\mathbf{A}).$$

Zrejme pre každý $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$ a každú množinu $V \subset W$ platí $\mathbf{A} \subset \varphi^V(\mathbf{A})$. Ďalej pre každú množinu $V \subset W$ a každé dva systémy $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$, $\mathbf{B} \subset \mathbf{X}$ také, že $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ platí $\varphi^V(\mathbf{A}) \subset \varphi^V(\mathbf{B})$.

Definícia 4. *Nech $\mathbf{K} \subset \mathbf{X}$, $V \subset W_0$ (resp. $V \subset W$, $V \not\subset W_0$). Postupnosť množinových systémov $\{\mathbf{K}_n\}_1^\infty$ (resp. transfinitnú postupnosť množinových systémov $\{\mathbf{K}_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$) s vlastnosťami:*

$$1°.\ \mathbf{K}_1 = \mathbf{K}\ (resp.\ \mathbf{K}_0 = \mathbf{K}).$$

$$2°.\ \mathbf{K}_{n+1} = \varphi^V(\mathbf{K}_n)\ \text{pre}\ n = 1, 2, 3, \ldots\ \left(resp.\ \mathbf{K}_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} \varphi^V(\mathbf{K}_\xi)\right.$$

pre $\alpha < \Omega$) nazývame vytvárajúcou postupnosťou pre systém $\mathbf{m}_V(\mathbf{K})$.

[7] Pozri [5], str. 169.

Podľa vety o konštrukcii úplnou indukciou, resp. konštrukcii transfinitnou indukciou, ku každému systému $\mathbf{K} \subset \mathbf{X}$ a každej množine vlastností $V \subset W$ existuje práve jedna vytvárajúca postupnosť pre systém $\mathbf{m}_V(\mathbf{K})$.

Vytvárajúca postupnosť pre $\mathbf{m}_V(\mathbf{K})$ je rastúca. Pre $V \subset W_0$ je totiž $\mathbf{K}_n \subset \varphi^V(\mathbf{K}_n) = \mathbf{K}_{n+1}$ pre všetky n. Ak $V \subset W$, $V \not\subset W_0$, potom zase pre $\alpha < \beta < \Omega$, je $\mathbf{K}_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} \varphi^V(\mathbf{K}_\xi) \subset (\bigcup_{\xi<\alpha} \varphi^V(\mathbf{K}_\xi)) \cup (\bigcup_{\alpha\leq\xi<\beta} \varphi^V(\mathbf{K}_\xi)) = \bigcup_{\xi<\beta} \varphi^V(\mathbf{K}_\xi) = \mathbf{K}_\beta$.

Lemma 3. *Nech* $V \subset W$. *Nech* $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$ *má všetky vlastnosti z množiny* V. *Nech* $\mathbf{K} \subset \mathbf{M}$. *Potom platí* $\varphi^V(\mathbf{K}) \subset \mathbf{M}$.

Dôkaz. Uvažujme najskôr, že množina V sa skladá iba z jediného prvku. Pre určitosť vezmime a) $\in V$. Nech $\mathbf{K} \subset \mathbf{M}$. Vezmime ľubovoľnú množinu $A \in \varphi^{(a)}(\mathbf{K})$. Môžu nastať dva prípady. Alebo $A \in \mathbf{K}$ a potom sme hotoví, alebo $A \bar{\in} \mathbf{K}$, avšak vtedy existujú množiny $A_1 \in \mathbf{K}$, $A_2 \in \mathbf{K}$ také, že $A = A_1 \cup A_2$, ale pretože podľa predpokladu $\mathbf{M}$ je uzavretý vzhľadom na súčet, $A \in \mathbf{M}$. Podobne odbavíme všetky vlastnosti. Dôkaz dokončíme, ak uvážime, že $\varphi^V(\mathbf{K}) = \varphi^{(x_1)}(\mathbf{K}) \cup \varphi^{(x_2)}(\mathbf{K}) \cup \ldots \cup \varphi^{(x_n)}(\mathbf{K})$, pričom $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú všetky prvky množiny V a pre každé zobrazenie $\varphi^{(x_i)}$ $(\mathbf{K})$ tvrdenie platí.

Veta 2. *Pre ľubovoľnú množinu* $V \subset W$ *a ľubovoľný systém* $\mathbf{K} \subset \mathbf{X}$ *systém* $\mathbf{m}_V(\mathbf{K})$ *je rovný súčtu všetkých členov vytvárajúcej postupnosti pre systém* $\mathbf{m}_V(\mathbf{K})$.[8]

Dôkaz. I. V prípade $V \subset W_0$ máme ukázať, že $\mathbf{m}_V(\mathbf{K}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{K}_n$, pričom systémy $\mathbf{K}_n$ sú dané definíciou 4.

i) Zrejme $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{K}_n$. Ďalej systém $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{K}_n$ má všetky vlastnosti z množiny V. Ak vezmeme totiž ľubovoľné množiny $A \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{K}_n$, $B \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{K}_n$, existujú dve prirodzené čísla n_1, n_2 také, že $A \in \mathbf{K}_{n_1}$, $B \in \mathbf{K}_{n_2}$ a ak položíme $n = \max\{n_1, n_2\}$, je $A \in \mathbf{K}_n$, $B \in \mathbf{K}_n$, pretože postupnosť $\{\mathbf{K}_n\}_1^\infty$ je rastúca. Ak a) $\in V$, resp. c) $\in V$ atď. z definície 3 máme $A \cup B$, resp. $A - B$ atď. $\in \varphi^V(\mathbf{K}_n) = \mathbf{K}_{n+1}$, teda aj $A \cup B$, resp. $A - B$ atď. $\in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{K}_n$. Tým sme podľa vety 1 a definície 2 dokázali vzťah $\mathbf{m}_V(\mathbf{K}) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{K}_n$.

ii) Vzťah $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{K}_n \subset \mathbf{m}_V(\mathbf{K})$ dokážeme tak, že dokážeme $\mathbf{K}_n \subset \mathbf{m}_V(\mathbf{K})$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$

1°. Pre $n = 1$ je tvrdenie správne podľa vlastnosti 1° $\mathbf{m}_V(\mathbf{K})$.

2°. Nech $\mathbf{K}_{n-1} \subset \mathbf{m}_V(\mathbf{K})$. Pretože systém $\mathbf{m}_V(\mathbf{K})$ má všetky vlastnosti z množiny V, podľa lemmy 3 a definície 4 je $\mathbf{K}_n = \varphi^V(\mathbf{K}_{n-1}) \subset \mathbf{m}_V(\mathbf{K})$. Týmto je veta pre prípad $V \subset W_0$ dokázaná.

II. V prípade $V \not\subset W_0$ dokážme, že $\mathbf{m}_V(\mathbf{K}) = \bigcup_{\alpha<\Omega} \mathbf{K}_\alpha$, pričom systémy $\mathbf{K}_\alpha$ sú dané definíciou 4. Stačí sa v dôkaze obmedziť na vlastnosti z $W - W_0$.

[8] Porovnaj [2] Theorem C, str. 23 (Teorema 3, str. 28).

i) $\mathbf{K} \subset \bigcup_{\alpha>\Omega} \mathbf{K}_\alpha$, pretože $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0$. Ďalej ukážeme, že systém $\bigcup_{\alpha<\Omega} \mathbf{K}_\alpha$ má všetky vlastnosti z množiny V. Vezmime ľubovoľnú postupnosť množín $\{A_n\}_1^\infty$, $A_n \in \bigcup_{\alpha<\Omega} \mathbf{K}_\alpha$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ K tejto postupnosti existuje taká postupnosť ordinálnych čísel $\{\alpha_n\}_1^\infty$, že $A_n \in \mathbf{K}_{\alpha_n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ K postupnosti $\{\alpha_n\}_1^\infty$ existuje najmenšie ordinálne číslo α_0, pre ktoré $\alpha_n \leqq \alpha_0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Pretože postupnosť $\{\mathbf{K}_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ je rastúca, platí $\mathbf{K}_{\alpha_n} \subset \mathbf{K}_{\alpha_0}$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ a teda aj $A_n \in \mathbf{K}_{\alpha_0}$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ a podľa definície 3 a 4 ak h) $\in V$, resp. i) $\in V$ atď. $\liminf_n A_n$, resp. $\limsup_n A_n$ atď. $\in \varphi^V(\mathbf{K}_{\alpha_0}) \subset \mathbf{K}_{\alpha_0+1}$ a z toho $\liminf_n A_n$, resp. $\limsup_n A_n$ atď. $\in \bigcup_{\alpha<\Omega} \mathbf{K}_\alpha$. Z toho máme podľa vlastnosti 3° $\mathbf{m}_V(\mathbf{K})$: $\mathbf{m}_V(\mathbf{K}) \subset \bigcup_{\alpha<\Omega} \mathbf{K}_\alpha$.

ii) Aby sme dokázali $\bigcup_{\alpha<\Omega} \mathbf{K}_\alpha \subset \mathbf{m}_V(\mathbf{K})$, označme (iba pre tento dôkaz) $\mathfrak{J}'$ množinu ordinálnych čísel $\alpha < \Omega$ takých, že $\mathbf{K}_\alpha \subset \mathbf{m}_V(\mathbf{K})$. Ukážeme, že $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}$.

1°. $0 \in \mathfrak{J}'$, pretože $\mathbf{K}_0 = \mathbf{K} \subset \mathbf{m}_V(\mathbf{K})$.

2°. Nech pre $a \in \mathfrak{J}$ je $\mathfrak{J}_a \subset \mathfrak{J}'$, t. j. $\xi < a \Rightarrow \xi \in \mathfrak{J}'$. Podľa predpokladu a podľa lemmy 3 máme $\xi < a \Rightarrow \mathbf{K}_\xi \subset \mathbf{m}_V(\mathbf{K}) \Rightarrow \varphi^V(\mathbf{K}_\xi) \subset \mathbf{m}_V(\mathbf{K}) \Rightarrow \bigcup_{\xi<\alpha} \varphi^V(\mathbf{K}_\xi) = \mathbf{K}_\alpha \subset \mathbf{m}_V(\mathbf{K})$, t. j. $\mathfrak{J}_a \subset \mathfrak{J}' \Rightarrow a \in \mathfrak{J}'$. Tým sme dokázali, že pre každé $\alpha \in \mathfrak{J}$ platí: $\mathbf{K}_\alpha \subset \mathbf{m}_V(\mathbf{K})$, teda aj $\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{J}} \mathbf{K}_\alpha \subset \mathbf{m}_V(\mathbf{K})$.

Z i) a ii) máme $\mathbf{m}_V(\mathbf{K}) = \bigcup_{\alpha<\Omega} \mathbf{K}_\alpha$ a veta je aj v prípade $V \not\subset W_0$ dokázaná.

4.

Systém $\mathbf{m}_V(\mathbf{K})$ má niekoľko jednoduchých vlastností, z ktorých niektoré uvedieme.

Vlastnosť 1. *Nech* $V \subset W$, $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$, $\mathbf{M} \subset \mathbf{K} \subset \mathbf{m}_V(\mathbf{M})$. *Potom* $\mathbf{m}_V(\mathbf{K}) = \mathbf{m}_V(\mathbf{M})$.

Vlastnosť 2. *Nech* $V \subset W$, $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$. *Systém* $\mathbf{M}$ *má všetky vlastnosti z množiny* V *vtedy a len vtedy, ak* $\mathbf{m}_V(\mathbf{M}) \subset \mathbf{M}$.

Vlastnosť 3. *Nech* $V \subset W$. *Nech* $\mathbf{K} \subset \mathbf{M} \subset \mathbf{X}$. *Potom* $\mathbf{m}_V(\mathbf{K}) \subset \mathbf{m}_V(\mathbf{M})$.

Dôkaz. Každý systém s vlastnosťami z množiny V, ktorý obsahuje systém $\mathbf{M}$, obsahuje aj systém $\mathbf{K}$.

Vlastnosť 4. *Nech* $V_1 \subset V_2 \subset W$, *nech* $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$. *Potom platí* $\mathbf{m}_{V_1}(\mathbf{M}) \subset \mathbf{m}_{V_2}(\mathbf{M})$.

Dôkaz. Každý systém so všetkými vlastnosťami z množiny V_2 má aj všetky vlastnosti z množiny V_1.

Vlastnosť 5. *Nech* $V \subset W_0 - \{r), s)\}$. *Nech* $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$, $\overline{\overline{\mathbf{M}}} \geqq \aleph_0$. *Potom platí:* $\overline{\overline{\mathbf{m}_V(\mathbf{M})}} = \overline{\overline{\mathbf{M}}}$. Ak $\overline{\overline{\mathbf{M}}} \leqq \aleph_0$, *potom aj* $\overline{\overline{\mathbf{m}_V(\mathbf{M})}} \leqq \aleph_0$.[9, 10]

[9] Ak Y je ľubovoľná množina, $\overline{\overline{Y}}$ značí jej kardinálne číslo. $\aleph_0$ značí kardinálne číslo spočetnej množiny.

[10] Pozri [2], str. 23, (str. 28).

Dôkaz. V prípadoch a), c), e), f) sa ku každej dvojici množín z $\mathbf{M}$ dá priradiť jedna množina z $\varphi^r(\mathbf{M}) - \mathbf{M}$ ako súčet, rozdiel atď. V prípadoch b), d), resp. g) dokonca iba k niektorým dvojiciam množín, resp. množinám, z $\mathbf{M}$ dá sa priradiť množina z $\varphi^r(\mathbf{M}) - \mathbf{M}$, a to tak, že sa všetky množiny z $\varphi^r(\mathbf{M}) - \mathbf{M}$ vyčerpajú. Pretože $\overline{\overline{\mathbf{M}}} \geq \aleph_0$, vyplýva z vlastností kardinálnych čísel, že $\overline{\overline{\varphi^r(\mathbf{M}) - \mathbf{M}}} \leq \overline{\overline{\mathbf{M}}}$ a teda $\overline{\overline{\varphi^r(\mathbf{M})}} = \overline{\overline{\mathbf{M}}}$ a z toho podľa vety 2 $\overline{\overline{\mathbf{m}_r(\mathbf{M})}} = \overline{\overline{\mathbf{M}}}$. Dôkaz druhej časti je podobný.

Vlastnosť 6. *Nech $V \subset W$, nech $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$, nech $A \in \mathbf{m}_r(\mathbf{M})$. Existuje taký najviac spočetný systém $\mathbf{K} \subset \mathbf{M}$, že $A \in \mathbf{m}_r(\mathbf{K})$.*[11]

Dôkaz. Máme dokázať, že $\mathbf{m}_r(\mathbf{M}) = \bigcup \mathbf{m}_r(\mathbf{K})$, pričom $\mathbf{K}$ prebieha všetky najviac spočetné podsystémy $\mathbf{M}$.

Podľa vlastnosti 3° pre každý systém $\mathbf{K} \subset \mathbf{M}$ platí $\mathbf{m}_r(\mathbf{K}) \subset \mathbf{m}_r(\mathbf{M})$, teda aj $\bigcup \mathbf{m}_r(\mathbf{K}) \subset \mathbf{m}_r(\mathbf{M})$. Aby sme dokázali obrátenú inklúziu, uvážme, že $\mathbf{M} \subset \bigcup \mathbf{m}_r(\mathbf{K})$. Stačí teda dokázať, že $\bigcup \mathbf{m}_r(\mathbf{K})$ má všetky vlastnosti z množiny V. Vezmime ľubovoľnú postupnosť $\{A_n\}_1^\infty$ takú, že $A_n \in \bigcup \mathbf{m}_r(\mathbf{K})$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Ku každej množine A_n existuje systém $\mathbf{K}_n$, že platí $A_n \in \mathbf{m}_r(\mathbf{K}_n)$, teda určite $A_n \in \mathbf{m}_r(\bigcup_{n=1}^\infty \mathbf{K}_n)$ a ďalej aj $\liminf_n A_n$, resp. $\limsup_n A_n$, resp. $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ atď. $\in \mathbf{m}_r(\bigcup_{n=1}^\infty \mathbf{K}_n)$. Ak systémy $\mathbf{K}_n$ boli najviac spočetné, potom aj systém $\bigcup_{n=1}^\infty \mathbf{K}_n$ je najviac spočetný.

Vlastnosť 7. *Nech $V \subset W_0$, $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$, $A \in \mathbf{m}_r(\mathbf{M})$. Potom existuje taký konečný systém $\mathbf{K} \subset \mathbf{M}$, že platí $A \in \mathbf{m}_r(\mathbf{K})$.*

Dôkaz ako pri 6.

Vlastnosť 8. *Nech $V \subset W$, $V_0 \subset W_0 - \{r), s)\}$. Nech systém $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$ má všetky vlastnosti z množiny V_0. Nech $A \in \mathbf{m}_r(\mathbf{M})$. Existuje taký najviac spočetný systém $\mathbf{K} \subset \mathbf{M}$ s vlastnosťami z množiny V_0, že $A \in \mathbf{m}_r(\mathbf{K})$.*

Dôkaz. Treba ukázať, že systém $\bigcup \mathbf{m}_r(\mathbf{K})$, pričom $\mathbf{K}$ prebieha všetky najviac spočetné podsystémy $\mathbf{M}$ s vlastnosťami z V_0, má všetky vlastnosti z množiny V. Vyberme postupnosť $\{A_n\}_1^\infty$, $A_n \in \bigcup \mathbf{m}_r(\mathbf{K})$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Ku každej množine A_n existuje systém $\mathbf{K}_n$ tak, že $A_n \in \mathbf{m}_r(\mathbf{K})$, teda $A_n \in \mathbf{m}_r(\bigcup_{n=1}^\infty \mathbf{K}_n)$. Systém $\bigcup_{n=1}^\infty \mathbf{K}_n$ je najviac spočetný a podľa vlastnosti 5 aj systém $\mathbf{L} = \mathbf{m}_{r_0}(\bigcup_{n=1}^\infty \mathbf{K}_n)$ je najviac spočetný a $\liminf_n A_n$, resp. $\limsup_n A_n$, resp. $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ atď. $\in \mathbf{m}_r(\bigcup_{n=1}^\infty \mathbf{K}_n) \subset \mathbf{m}_r(\mathbf{L})$. Ukončenie dôkazu je zrejmé.

V ďalšom ukážeme relativizáciu pojmu $\mathbf{m}_r(\mathbf{M})$ vzhľadom na nejakú množinu $A \subset X$. To značí, že ukážeme, ako sa stane ľubovoľná množina $A \subset X$ sama základným priestorom. Urobíme to vo vete 3.

[11] Pozri [2], str. 24, (str. 29); [3], str. 15.

Definícia 5. *Nech $A \subset X$, $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$. $A \cap \mathbf{M}$ značí systém všetkých množín tvaru $B \cap A$, pričom $B \in \mathbf{M}$.*

Lemma 4. *Pre každý systém $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$, každú množinu $A \subset X$ a každú množinu $V \subset W$, $g) \bar{\in} V$, $s) \bar{\in} V$ platí: $A \cap \varphi^r(\mathbf{M}) = \varphi^r(A \cap \mathbf{M})$.*

Dôkaz. Uvažujme najskôr, že množina V sa skladá iba z jediného prvku. Vezmime $V = \{a)\}$. Nech $E \in A \cap \varphi^r(\mathbf{M})$, t. j. $E = A \cap B$ $B \in \varphi^{(a)}(\mathbf{M})$. Môžu nastať dva prípady, a to $B \in \mathbf{M}$ alebo $B \bar{\in} \mathbf{M}$. V prvom prípade $E \in A \cap \mathbf{M}$ a tiež $E \in \varphi^{(a)}(A \cap \mathbf{M})$. V druhom prípade existujú množiny $B_1, B_2 \in \mathbf{M}$ tak, že $B = B_1 \cup B_2$, teda $E = A \cap (B_1 \cup B_2) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \in \varphi^{(a)}(A \cap \mathbf{M})$. Tým je dokázaná inklúzia $A \cap \varphi^{(a)}(\mathbf{M}) \subset \varphi^{(a)}(A \cap \mathbf{M})$. Obrátenú inklúziu dokážeme podobne. Ukončenie dôkazu je zrejmé.

Veta 3. *Za predpokladov lemmy 4 platí: $A \cap \mathbf{m}_r(\mathbf{M}) = \mathbf{m}_r(A \cap \mathbf{M})$*[12]

Dôkaz. Budeme rozoznávať dva prípady $V \subset W_0$ a $V \not\subset W_0$.

i) V prvom prípade nech $\{\mathbf{M}_n\}_1^\infty$ je vytvárajúca postupnosť pre systém $\mathbf{m}_r(\mathbf{M})$ a $\{\mathbf{L}_n\}_1^\infty$ vytvárajúca postupnosť pre systém $\mathbf{m}_r(A \cap \mathbf{M})$. Úplnou indukciou ukážeme, že $A \cap \mathbf{M}_n = \mathbf{L}_n$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$

1°. Pre $n = 1$ tvrdenie je zrejmé.

2°. Nech $A \cap \mathbf{M}_{n-1} = \mathbf{L}_{n-1}$. Podľa definície 4 a lemmy 4 je: $\mathbf{L}_n = \varphi^r(\mathbf{L}_{n-1}) = \varphi^r(A \cap \mathbf{M}_{n-1}) = A \cap \varphi^r(\mathbf{M}_{n-1}) = A \cap \mathbf{M}_n$.

V tomto prípade sa veta už dokáže ľahko. Je totiž podľa vety 2
$$\mathbf{m}_r(A \cap \mathbf{M}) = \bigcup_{n=1}^\infty \mathbf{L}_n = \bigcup_{n=1}^\infty A \cap \mathbf{M}_n = A \cap \bigcup_{n=1}^\infty \mathbf{M}_n = A \cap \mathbf{m}_r(\mathbf{M}).$$

ii) V druhom prípade nech $\{\mathbf{M}_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ je vytvárajúca postupnosť pre $\mathbf{m}_r(\mathbf{M})$ a $\{\mathbf{L}_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ vytvárajúca postupnosť pre $\mathbf{m}_r(A \cap \mathbf{M})$. Transfinitnou indukciou zase ukážeme, že pre každé $\alpha < \Omega$ platí $\mathbf{L}_\alpha = A \cap \mathbf{M}_\alpha$.

1°. Pre $\alpha = 0$ je tvrdenie znovu triviálne.

2°. Nech pre všetky $\xi < \alpha < \Omega$ platí $\mathbf{L}_\xi = A \cap \mathbf{M}_\xi$. Z toho podľa definície 4 a lemmy 4 platí: $\mathbf{L}_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} \varphi^r(\mathbf{L}_\xi) = \bigcup_{\xi<\alpha} \varphi^r(A \cap \mathbf{M}_\xi) = \bigcup_{\xi<\alpha}(A \cap \varphi^r(\mathbf{M}_\xi)) = A \cap \bigcup_{\xi<\alpha} \varphi^r(\mathbf{M}_\xi) = A \cap \mathbf{M}_\alpha$.

Aj v tomto prípade sa veta dokáže už jednoducho. Podľa vety 2 je
$$\mathbf{m}_r(A \cap \mathbf{M}) = \bigcup_{\alpha<\Omega} \mathbf{L}_\alpha = \bigcup_{\alpha<\Omega} A \cap \mathbf{M}_\alpha = A \cap \bigcup_{\alpha<\Omega} \mathbf{M}_\alpha = A \cap \mathbf{m}_r(\mathbf{M}).$$

Dôsledok. Nech $V \subset W$, nech $g) \bar{\in} V$, $s) \bar{\in} V$. Nech $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$ má všetky vlastnosti z množiny V. Nech $A \in \mathbf{X}$ je ľubovoľná množina. Potom systém $\mathbf{M} \cap A$ má všetky vlastnosti z množiny V.

[12] Porovnaj [2], str. 25, (str. 30).

5.

V tomto odseku si všimneme niektoré vzťahy medzi množinami vlastností. Napr. často z toho, že nejaký systém má určité vlastnosti, ihneď môžeme súdiť, že má aj niektoré iné vlastnosti. Takýto prípad zachytíme nasledujúcou definíciou.

Definícia 7. a) *Množina vlastností $V_2 \subset W$ vyplýva z množiny vlastností $V_1 \subset W$, ak každý systém $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$, ktorý má všetky vlastnosti z množiny V_1, má aj všetky vlastnosti z množiny V_2. Píšeme $V_1 \Rightarrow V_2$.*

b) *Množina vlastností $V_2 \subset W$ je ekvivalentná s množinou vlastností $V_1 \subset W$, ak $V_1 \Rightarrow V_2$ a $V_2 \Rightarrow V_1$. Píšeme $V_1 \cong V_2$.*

Pre ľubovoľné množiny $V_1 \subset W$, $V_2 \subset W$, $V_3 \subset W$ zrejme platí:
Ak $V_1 \Rightarrow V_2$ a $V_2 \Rightarrow V_3$, potom aj $V_1 \Rightarrow V_3$.
$V \cong V$ pre každú množinu $V \subset W$.
Ak $V_1 \cong V_2$, potom aj $V_2 \cong V_1$.
Ak $V_1 \cong V_2$ a $V_2 \cong V_3$, potom aj $V_1 \cong V_3$.

Poznámka. Vzťahy $V_1 \Rightarrow V_2$, resp. $V_1 \cong V_2$ sú zrejme závislé od množiny X. Napr. ak X je konečná množina, potom vždy $\{a)\} \cong \{n)\}$, $\{f)\} \cong \{p)\}$ atď. Ak má napr. množina X iba jeden prvok, potom ľubovoľný systém nad množinou X má veľa vlastností, ktoré sú v dôsledku toho ekvivalentné.

V ďalšom budeme vyšetrovať vzťahy $V_1 \Rightarrow V_2$, resp. $V_1 \cong V_2$ iba v tom prípade, ak platia v každom základnom priestore, t. j. ak sú od množiny X nezávislé. Aj zápis $V_1 \Rightarrow V_2$, resp. $V_1 \cong V_2$ treba v ďalšom chápať v tomto zmysle.

Veta 4. a) *Množina vlastností $V_2 \subset W$ vyplýva z množiny vlastností $V_1 \subset W$ vtedy a len vtedy, ak pre každé X a každý systém $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$ platí: $\mathbf{m}_{V_2}(\mathbf{M}) \subset \mathbf{m}_{V_1}(\mathbf{M})$, čiže systém $\mathbf{m}_{V_1}(\mathbf{M})$ má všetky vlastnosti z množiny V_2.*

b) *Množiny vlastností V_1 a V_2 sú ekvivalentné vtedy a len vtedy, ak pre každé X a každý systém $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$ platí $\mathbf{m}_{V_1}(\mathbf{M}) = \mathbf{m}_{V_2}(\mathbf{M})$.*

Dôkaz. a) Nech V_2 vyplýva z V_1. Pretože pre každú množinu X a každý systém $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$ systém $\mathbf{m}_{V_1}(\mathbf{M})$ má všetky vlastnosti z množiny V_2 a $\mathbf{M} \subset \mathbf{m}_{V_1}(\mathbf{M})$, platí z vlastnosti 3° definície 2 $\mathbf{m}_{V_2}(\mathbf{M}) \subset \mathbf{m}_{V_1}(\mathbf{M})$.

Nech naopak pre každé X a každý systém $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$ platí $\mathbf{m}_{V_2}(\mathbf{M}) \subset \mathbf{m}_{V_1}(\mathbf{M})$. Potom pre každý systém $\mathbf{K} \subset \mathbf{X}$ platí: $\mathbf{m}_{V_2}(\mathbf{m}_{V_1}(\mathbf{K})) \subset \mathbf{m}_{V_1}(\mathbf{m}_{V_1}(\mathbf{K})) = \mathbf{m}_{V_1}(\mathbf{K})$

b) Vyplýva z a).

Definícia 8. *Množina vlastností $V_2 \subset W$ zachováva množinu vlastností $V_1 \subset W$, ak pre každý systém $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$, ktorý má všetky vlastnosti z množiny V_1, systém $\mathbf{m}_{V_2}(\mathbf{M})$ má všetky vlastnosti z množiny V_1.*

Zrejme platí, ak množina $V_2 \subset W$ vyplýva z množiny $V_1 \subset W$, množina V_2 zachováva množinu V_1 a množina V_1 zachováva množinu V_2.

Veta 5. *Nech množiny $V_1 \subset W_0$ a $V_2 \subset W_0$ zachovávajú $V \subset W_0$.* Potom aj *množina $V_1 \cup V_2$ zachováva množinu V.*

Dôkaz. I. Nech systém $\mathbf{K} \subset \mathbf{X}$ má všetky vlastnosti z množiny V. Z vety o konštrukcii úplnou indukciou vyplýva, že existuje práve jedna postupnosť množinových systémov $\{\mathbf{K}_n\}_1^\infty$, definovaná takto:

1°. $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}$.

2°. $\mathbf{K}_{2k} = \mathbf{m}_{V_1}(\mathbf{K}_{2k-1})$, $\mathbf{K}_{2k+1} = \mathbf{m}_{V_2}(\mathbf{K}_{2k})$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Pretože množiny V_1 aj V_2 zachovávajú množinu V, indukciou sa ľahko ukáže, že systémy $\mathbf{K}_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ majú všetky vlastnosti z množiny V. Pretože $\{\mathbf{K}_n\}_1^\infty$ je rastúca konvergentná postupnosť, vyplýva, že aj systém $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{K}_n$ má všetky vlastnosti z množiny V. Ukážeme, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{K}_n = \mathbf{m}_{V_1 \cup V_2}(\mathbf{K})$.

II. Úplnou indukciou sa ukáže, že pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ platí: $\mathbf{K}_n \subset \mathbf{m}_{V_1 \cup V_2}(\mathbf{K})$. Z toho aj $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{K}_n \subset \mathbf{m}_{V_1 \cup V_2}(\mathbf{K})$.

Naopak zase $\mathbf{K} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{K}_n$. Okrem toho systém $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{K}_n$ má všetky vlastnosti z množiny $V_1 \cup V_2$, a preto $\mathbf{m}_{V_1 \cup V_2}(\mathbf{K}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{K}_n$. Tým je dôkaz podľa I vykonaný.

Veta 6. *Nech množiny $V_1 \subset W$, $V_2 \subset W$ zachovávajú množinu $V \subset W_0$. Potom aj množina $V_1 \cup V_2$ zachováva množinu V.*

Dôkaz. I. Na základe predošlej vety je zrejmé, že dôkaz stačí vykonať len v prípade, keď aspoň jedna z množín V_1, V_2 nie je podmnožinou W_0. Nech systém $\mathbf{K} \subset \mathbf{X}$ má všetky vlastnosti z množiny V. Zostrojme transfinitnú postupnosť množinových systémov s týmito vlastnosťami:

1°. $\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}$.

2°. $\mathbf{K}_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{m}_{V_1}(\mathbf{m}_{V_2}(\mathbf{K}_\xi))$ pre všetky $o < \alpha < \Omega$.

Postupnosť $\{\mathbf{K}_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ je rastúca. Pre každé $\alpha < \Omega$ systém $\mathbf{K}_\alpha$ má všetky vlastnosti z množiny V. Toto tvrdenie dokážeme indukciou.

1°. Pre $\alpha = 0$ $\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}$ a tvrdenie je zrejmé.

2°. Nech pre všetky $\xi < \alpha < \Omega$ platí, že systémy $\mathbf{K}_\xi$ majú všetky vlastnosti z množiny V. Môžu nastať dva prípady. Ak existuje $\eta < \alpha$ tak, že $\eta + 1 = \alpha$, potom, pretože postupnosť $\{\mathbf{K}_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ je rastúca $\mathbf{K}_\alpha = \mathbf{m}_{V_1}(\mathbf{m}_{V_2}(\mathbf{K}_\eta))$ a systém $\mathbf{K}_\alpha$ má všetky vlastnosti z množiny V, lebo množiny V_1 a V_2 zachovávajú množinu V a podľa indukčného predpokladu systém $\mathbf{K}_\eta$ má všetky vlastnosti z množiny V. Ak neexistuje také $\eta < \alpha$, že by platilo $\eta + 1 = \alpha$, postupujeme pre každú vlastnosť zvlášť. Nech napr. a) $\in V$. Chceme ukázať, že systém $\mathbf{K}_\alpha$ má vlastnosť a). Vezmime dve množiny A, $B \in \mathbf{K}_\alpha$. To značí, že existujú také $\xi_1 < \alpha$ a $\xi_2 < \alpha$, že $A \in \mathbf{m}_{V_1}(\mathbf{m}_{V_2}(\mathbf{K}_{\xi_1}))$, $B \in \mathbf{m}_{V_1}(\mathbf{m}_{V_2}(\mathbf{K}_{\xi_2}))$. Pretože postupnosť $\{\mathbf{K}_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ je rastúca A, $B \in \mathbf{m}_{V_1}(\mathbf{m}_{V_2}(\mathbf{K}_\xi))$, pričom $\xi = \max\{\xi_1, \xi_2\}$. Teda aj $A \cup B \in \mathbf{m}_{V_1}(\mathbf{m}_{V_2}(\mathbf{K}_\xi))$ a podľa definície $\{\mathbf{K}_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ $A \cup B \in \mathbf{K}_\alpha$. Podobne pre ostatné vlastnosti.

II. Podľa lemmy 2 a podľa I systém $\bigcup_{\alpha<\Omega} \mathbf{K}_\alpha$ má všetky vlastnosti z množiny V a všetky vlastnosti z množiny $V_1 \cup V_2$. Je $\mathbf{K} \subset \bigcup_{\alpha<\Omega} \mathbf{K}_\alpha$, teda aj $\mathbf{m}_{V_1 \cup V_2}(\mathbf{K}) \subset \bigcup_{\alpha<\Omega} \mathbf{K}_\alpha$. Naopak, použitím vlastnosti 2° sa transfinitnou indukciou ľahko ukáže, že pre každé $\alpha < \Omega$ je $\mathbf{K}_\alpha \subset \mathbf{m}_{V_1 \cup V_2}(\mathbf{K})$, teda aj $\bigcup_{\alpha<\Omega} \mathbf{K}_\alpha \subset \mathbf{m}_{V_1 \cup V_2}(\mathbf{K})$, tým je veta dokázaná.

Dva príklady na zachovávanie množín vlastností uvedieme v podobe dvoch ďalších lemm.

Lemma 5. *Množina vlastností* $\{n), p)\}$ *zachováva množinu* $\{g)\}$.

Dôkaz. Ukážeme najskôr, ak systém $\mathbf{M}$ je uzavretý vzhľadom na komplement, že aj systém $\varphi^{\{n), p)\}}(\mathbf{M})$ je uzavretý vzhľadom na komplement. Vezmime ľubovoľnú množinu $A \in \varphi^{\{n), p)\}}(\mathbf{M})$. Potom buď $A \in \varphi^{(n)}(\mathbf{M})$, alebo $A \in \varphi^{(p)}(\mathbf{M})$. V prvom prípade existuje postupnosť množín $\{A_n\}_1^\infty$ taká, že $A_n \in \mathbf{M}$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ a $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Pretože podľa predpokladu aj $A_n^* \in \mathbf{M}$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ platí, že $A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^* \in \varphi^{\{n), p)\}}(\mathbf{M})$. Podobne odbavíme aj druhý prípad.

Ak teraz systém $\mathbf{M}$ má vlastnosť g), ukážeme, že aj všetky členy vytvárajúcej postupnosti pre systém $\mathbf{m}_{\{n), p)\}}(\mathbf{M})$ majú vlastnosť g). Zrejme má vlastnosť g) systém $\mathbf{M}_0$. Nech všetky systémy $\mathbf{M}_\xi$ pre $\xi < \alpha < \Omega$ majú vlastnosť g); ukážeme, že aj systém $\mathbf{M}_\alpha$ má vlastnosť g). Vezmime množinu $A \in \mathbf{M}_\alpha$, teda existuje $\xi <$, že $A \in \varphi^{\{n), p)\}}(\mathbf{M}_\xi)$, ale podľa indukčného predpokladu $\mathbf{M}_\xi$ má vlastnosť g) a teda aj $\varphi^{\{n), p)\}}(\mathbf{M}_\xi)$ má vlastnosť g), teda aj $A^* \in \varphi^{\{n), p)\}}(\mathbf{M}_\xi)$ a tiež $A^* \in \mathbf{M}_\alpha$.

Na ukončenie dôkazu stačí použiť lemmu 2 a vetu 2.

Lemma 7. *Množina* $\{m)\}$ *zachováva množinu* $\{a), c)\}$.

Dôkaz. Nech systém $\mathbf{M}$ má vlastnosti *a*), *c*).

I. Pre $A \in \mathbf{M}$ označme $\mathbf{m}_1$ systém množín $B \in \mathbf{m}_{\{m\}}(\mathbf{M})$, pre ktoré $A \cup B$, $A - B$ i $B - A \in \mathbf{m}_{\{m)\}}(\mathbf{M})$. Pretože $\mathbf{M}$ má vlastnosti *a*), *c*), je $\mathbf{M} \subset \mathbf{m}_1$. Z toho, že $\mathbf{m}_{\{m)\}}(\mathbf{M})$ je monotónny systém, ukáže sa, že aj $\mathbf{m}_1$ je monotónny, teda $\mathbf{m}_{\{m)\}}(\mathbf{M}) \subset \mathbf{m}_1$, čiže $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_{\{m)\}}(\mathbf{M})$.

II. Pre $A \in \mathbf{m}_{\{m)\}}(\mathbf{M})$ označme $\mathbf{m}_2$ systém $B \in \mathbf{m}_{\{m)\}}(\mathbf{M})$, pre ktoré $A \cup B$, $A - B$, $B - A \in \mathbf{m}_{\{m)\}}(\mathbf{M})$. Podľa I $\mathbf{M} \subset \mathbf{m}_2$. Je znova zrejmé, že $\mathbf{m}_2$ je monotónny, teda $\mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_{\{m)\}}(\mathbf{M})$. Pretože množiny A, B vystupujú symetricky, v systéme $\mathbf{m}_2$ má $\mathbf{m}_{\{m)\}}(\mathbf{M})$ vlastnosti *a*), *c*).

6.

V ďalšom si všimneme niektoré špeciálne množiny vlastností, ktoré sú zvlášť dôležité, pretože systémy s týmito vlastnosťami slúžia za obor definície pre miery.

Definícia 9. *Neprázdny systém* $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$ *s vlastnosťami a), c) sa nazýva množinový okruh.*

Neprázdny systém $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$ *s vlastnosťami n), c) sa nazýva množinový σ-okruh.*

Neprázdny systém $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$ *s vlastnosťami a), g) sa nazýva množinová algebra.*

Neprázdny systém $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$ *s vlastnosťami n), g) sa nazýva množinová σ-algebra.*

Veta 7. *Množiny vlastností* $\{a), c)\}$, $\{b), c)\}$, $\{a), d)\}$, $\{e), f)\}$ $\{c), e)\}$ *sú ekvivalentné.*

Dôkaz. I. Zrejme platí $\{a), c)\} \Rightarrow \{b), c)\}$. Opačne nech $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$ má vlastnosti *b*), *c*). Nech $A \in \mathbf{M}$, $B \in \mathbf{M}$. Pretože $A \cup B = A \cup (B - A)$ a podľa vlastnosti *c*) $B - A \in \mathbf{M}$ a ďalej $A \cap (B - A) = 0$ je $A \cup B \in \mathbf{M}$, teda $\{b), c)\} \Rightarrow \{a), c)\}$.

II. zrejme zase $\{a), c)\} \Rightarrow \{a), d)\}$. $\{a), d)\} \Rightarrow \{a), c)\}$ vyplýva z rovnosti $A - B = (A \cup B) - B$.

III. $\{a), c)\} \Rightarrow \{e), f)\}$ vyplýva z rovností: $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$ $A \cap B = A - (A - B)$. $\{e), f)\} \Rightarrow \{a), c)\}$, vyplýva z $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$ a z $A - B = A \triangle (A \cap B)$.

IV. $\{a), c)\} \cong \{c), e)\}$ prevedieme podobne ako v III. Ostatné ekvivalencie sú podľa tranzitívnosti ekvivalencie zrejmé.

Poznámka. Z vety je zrejmé, že každý množinový okruh má všetky vlastnosti z množiny $\{a), b), c), d), e), f)\}$. Vzhľadom na operáciu tvorenia symetrickej diferencie ako súčtu a vzhľadom na prenik ako súčinu tvorí množinový okruh v algebraickom slova zmysle. Nulou v tomto okruhu je prázdna množina. Zrejme $0 \in \mathbf{M}$ ak $\mathbf{M}$ je množinový okruh, pretože $A \in \mathbf{M} \Rightarrow 0 = A - A \in \mathbf{M}$.

Ďalej platí, že každá algebra je okruh a okruh, ktorý obsahuje základný priestor X, je algebra. Dôkaz prvej časti tvrdenia vyplýva z rovnosti $A - B = (A^* \cup B)^*$, druhá zase z $A^* = X - A$. Základný priestor X je v okruhu jednotkou v algebraickom zmysle.

Veta 8. I. $\{n), c)\} \Rightarrow \{a), b), d), e), f), h), i), j), k), l), m), o), p)\}$. II. *Množinový okruh, ktorý má ľubovoľnú z vlastností h), i), j), l), m), o), je σ-okruhom.*

III. *Množiny vlastností* $\{n), c)\}$, $\{n), d)\}$, $\{o), c)\}$ $\{c), i)\}$ *sú ekvivalentné.*

Dôkaz. I. Nech $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$ je σ-okruh. $A \in \mathbf{M} \Rightarrow A - A = 0 \in \mathbf{M}$. Každý σ-okruh obsahuje teda prázdnu množinu. $[A \in \mathbf{M}, B \in \mathbf{M}] \Rightarrow [A \cup B \cup 0 \cup 0 \cup \ldots = A \cup B \in \mathbf{M}]$, teda každý σ-okruh je okruhom. Z toho podľa vety 8 a poznámky každý σ-okruh má vlastnosti a), b), c), d), e), f). Z rovnosti $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k - \bigcup_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k - A_n)$ vyplýva, že každý σ-okruh má vlastnosť p). Z vlastnosti n) bezprostredne vyplýva vlastnosť l) a o). Z vlastnosti p) vyplýva zase vlastnosť k). Z vlastnosti k), l) vyplýva m). Z rovností $\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$, $\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ a z vlastností n), p) vyplývajú vlastnosti h), i), j).

II. Nech okruh **M** má vlastnosť h). Nech $A_n \in \mathbf{M}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Postupnosť $\{\bigcup_{k=1}^{n} A_k\}_{n=1}^{\infty}$ je zrejme rastúca a $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathbf{M}$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$, teda $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \liminf_n \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathbf{M}$. Podobne dokážeme, že okruh s ľubovoľnou z vlastností i), j), l), m) je σ-okruhom.

III. {n), c)} ⇒ {n), d)} sa prevedie podobne ako dôkaz vety 7 III. Zrejme {n), c)} ⇒ {o), c)}. Opačná implikácia vyplýva z rovnosti $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k)$, ak uvážime, že systém vpravo je disjunktný a systém s vlastnosťami o), c) je okruh. {n), c)} ⇒ {c), i)} podľa I. Nech systém **M** má vlastnosti c), i). Nech $A_n \in \mathbf{M}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Utvorme postupnosť $\{A_1, A_1, A_2, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots\} = \{B_n\}$. Platí: $\limsup_n B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbf{M}$.

Poznámka. Každá σ-algebra je σ-okruh. σ-okruh je σ-algebrou vtedy a len vtedy, ak obsahuje základný priestor X.

Veta 9. I. *Nech $X \in \mathbf{M} \subset \mathbf{X}$. Nech* **M** *má vlastnosti f) a g). Potom* **M** *je algebra.*

II. *Každá σ-algebra má každú z vlastností a), b), c), d), e), f), h), i), j), k), l), m), o), p).*

III. *Ak algebra má niektorú z vlastností h), i), j), k), l), m), o), p) je σ-algebrou.*

IV. *Množiny vlastností {g), h)}, {g), p)}, {g), n)} sú ekvivalentné.*

Dôkaz. I. Vyplýva z rovnosti $A \cup B = (A^* \cap B^*)^*$.

II. Vyplýva z toho, že σ-algebra je σ-okruh.

III. Ak algebra má niektorú z vlastností h), i), j), l), m), o) je σ-algebrou podľa predošlej vety a podľa poznámky. Nech algebra **M** má vlastnosť k). Nech $\{A_n\}_1^{\infty}$ je rastúca postupnosť, $A_n \in \mathbf{M}$ $n = 1, 2, 3, \ldots$ Postupnosť $\{A_n^*\}_1^{\infty}$ je klesajúca, $A_n^* \in \mathbf{M}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^*]^*$. Teda **M** má vlastnosť l) a podľa predošlého je σ-algebrou. Nech algebra **M** má vlastnosť p). Z rovnosti $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^*]^*$ vyplýva, že má vlastnosť n), teda je σ-algebrou.

IV. Z II vyplýva {g), n)} ⇒ {g), p)}. Z rovnosti $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^*]^*$ vyplýva {g), p)} ⇒ {g), n)}. Z II znova vyplýva {g), n)} ⇒ {g), h)}. Podľa vety 8 III {i)} ⇒ {n)}. Ďalej platí $\limsup_n A_n = (\liminf_n A_n^*)^*$, z toho máme {g), h)} ⇒ ⇒ {g), n)}.

Veta 10. *Nech* $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$ *je neprázdny; nech systém* $\mathbf{R} \subset \mathbf{X}$ *má vlastnosti:*

i) $\mathbf{M} \subset \mathbf{R}$.

ii) **R** *je uzavretý (σ-uzavretý) vzhľadom na disjunktný súčet.*

iii) *Ak $A \in \mathbf{M}$ a $B \in \mathbf{R}$, potom $A - B \in \mathbf{R}$.*

Potom $\mathbf{m}_{\{a),c)\}}(\mathbf{M}) \subset \mathbf{R}$ $(\mathbf{m}_{\{n),c)\}}(\mathbf{M}) \subset \mathbf{R})$[13].

[13] Pozri [4], str. 87.

Dôkaz. Označme **R′** systém množín $A \in \mathbf{R}$ takých, že pre každé $B \in \mathbf{R}$ je $A - B \in \mathbf{R}$. Podľa definície **R′** a podľa vlastností i) a iii) je $\mathbf{M} \subset \mathbf{R}' \subset \mathbf{R}$. Veta bude teda dokázaná, ak ukážeme, že **R′** je okruh (σ-okruh).

I. Ak $A \in \mathbf{R}'$, $B \in \mathbf{R}' \subset \mathbf{R}$, potom $A - B \in \mathbf{R}$. Nech $C \in \mathbf{R}$. $B \cup C = (B - C) \cup C$, pričom súčet vpravo je disjunktný, teda $B \cup C \in \mathbf{R}$. Z toho $(A - B) - C = A - (B \cup C) \in \mathbf{R}$, teda $A - B \in \mathbf{R}'$.

II. Nech $\{A_i\}$ je konečná (spočetná) postupnosť disjunktných množín z **R′**. Nech $C \in \mathbf{R}$. Pretože $\bigcup A_i - C = \bigcup (A_i - C)$, ďalej $A_i - C \in \mathbf{R}$ a súčet vpravo je disjunktný, podľa ii) $\bigcup A_i - C \in \mathbf{R}$, teda $\bigcup A_i \in \mathbf{R}'$.

III. Podľa I a II a podľa vety 7 (vety 8 III) je **R′** okruh (σ-okruh).

Definícia 10. *Neprázdny systém* $\mathbf{P} \subset \mathbf{X}$ *je polookruh, ak má tieto vlastnosti:*

1°. *je uzavretý vzhľadom na prenik,*

2°. *ak $A \in \mathbf{P}$, $B \in \mathbf{P}$ a $A \subset B$, potom existuje konečná postupnosť množín z* **P** *$\{C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ takých, že $A = C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \ldots \subset C_n = B$, pričom $C_i - C_{i-1} \in \mathbf{P}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.*

Systém $\mathbf{P} \subset \mathbf{X}$ *má vlastnosť α, ak*

1. $0 \in \mathbf{P}$.

2. *Ak $A \in \mathbf{P}$, $B \in \mathbf{P}$, potom každá z množín $A \cap B$, $A - B$ je súčtom konečného počtu disjunktných množín z* **P**.

Systém $\mathbf{P} \subset \mathbf{X}$ *má vlastnosť β, ak*

1. $0 \in \mathbf{P}$.

2. *Ak $A \in \mathbf{P}$, $B \in \mathbf{P}$, potom každá z množín $A \cap B$, $A - B$ je súčtom spočetného systému disjunktných množín z* **P**.

Každý polookruh má vlastnosť α. Uvažujme polookruh **P**. Pretože **P** je neprázdny, existuje množina $A \in \mathbf{P}$, ďalej $A \subset A$ a podľa vlastnosti 2 polookruhu aj $A - A = 0 \in \mathbf{P}$. Ďalej pre každé $A \in \mathbf{P}$, $B \in \mathbf{P}$ je $A - B = A - (A \cap B)$, pričom podľa vlastnosti 1 aj $A \cap B \in \mathbf{P}$, ďalej $A \cap B \subset A$, teda existuje postupnosť $\{C_0, C_1, \ldots, C_n\}$ tak, že $A \cap B = C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_n = A$, pričom množiny C_i sú z **P** a platí $A - B = A - (A \cap B) = \bigcup_{i=1}^{n} (C_i - C_{i-1})$, množiny $C_i - C_{i-1}$ sú podľa predpokladu z **P** a sú zrejme disjunktné.

Každý systém s vlastnosťou α má vlastnosť β.

Každý okruh je polookruhom.

Veta 11. *Nech* $\mathbf{P} \subset \mathbf{X}$. $\mathbf{m}_{\{b)\}}(\mathbf{P}) = \mathbf{m}_{\{a),c)\}}(\mathbf{P})$ *vtedy a len vtedy, ak* **P** *má vlastnosť α.*[14]

Dôkaz. I. Nech **P** má vlastnosť α. Systém $\mathbf{m}_{\{b)\}}(\mathbf{P})$ je systém množín tvaru $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$, pričom A_k sú z **P** a navzájom disjunktné. Pretože $\mathbf{m}_{\{a),c)\}}(\mathbf{P})$ je uzavretý vzhľadom na súčet, je $\mathbf{m}_{\{b)\}}(\mathbf{P}) \subset \mathbf{m}_{\{a),c)\}}(\mathbf{P})$.

i) Zrejme $\mathbf{P} \subset \mathbf{m}_{\{b)\}}(\mathbf{P})$.

[14] Pozri [1], str. 127, [4], str. 86.

ii) Systém $\mathbf{m}_{\{b)\}}(\mathbf{P})$ je uzavretý vzhľadom na disjunktný súčet.

iii) Nech $A \in \mathbf{m}_{\{b)\}}(\mathbf{P})$, $B \in \mathbf{m}_{\{b)\}}(\mathbf{P})$, t. j. $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $B = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$, pričom A_i sú disjunktné množiny z $\mathbf{P}$ a tiež B_j sú disjunktné množiny z $\mathbf{P}$. Pretože $\mathbf{P}$ má vlastnosť α, je $A_i \cap B_j = \bigcup_{k=1}^{p_{ij}} C_k^{ij}$ a množiny $C_k^{ij} \in \mathbf{P}$ sú navzájom disjunktné. Ďalej $A \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{k=1}^{p_{ij}} C_k^{ij}$ a zrejme aj množiny C_k^{ij} $(1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq m,\ 1 \leqq k \leqq p_{ij})$ sú disjunktné. To značí, že $\mathbf{m}_{\{b)\}}(\mathbf{P})$ je uzavretý vzhľadom na prienik. Nech $A \in \mathbf{P}$, $B \in \mathbf{m}_{\{b\}}(\mathbf{P})$, t. j. $B = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$, kde B_k sú disjunktné množiny z $\mathbf{P}$. $A - B = A - \bigcup_{k=1}^{n} B_k = \bigcap_{k=1}^{n} (A - B_k)$, pretože $\mathbf{P}$ má vlastnosť α, $A - B_k$ patria do $\mathbf{m}_{\{b)\}}(\mathbf{P})$ a teda aj ich prenik patrí do $\mathbf{m}_{\{b)\}}(\mathbf{P})$. $\mathbf{m}_{\{a),c)\}}(\mathbf{P})\ \mathbf{m}_{\{b\}}(\mathbf{P})$ platí podľa vety 10.

II. Nech $\mathbf{m}_{\{a,c\}}(\mathbf{P}) = \mathbf{m}_{\{b\}}(\mathbf{P})$. Vezmime $A \in \mathbf{P}$, $B \in \mathbf{P}$. Pretože $\mathbf{m}_{\{a,c\}}(\mathbf{P})$ je uzavretý vzhľadom na prenik a rozdiel musí platiť $A \cap B \in \mathbf{m}_{\{a,c\}}(\mathbf{P}) = \mathbf{m}_{\{b\}}(\mathbf{P})$, $A - B \in \mathbf{m}_{\{b\}}(\mathbf{P})$, t. j. $A \cap B$, $A - B$ sú súčtami konečného počtu disjunktných množín z $\mathbf{P}$, pretože tiež každý okruh obsahuje prázdnu množinu a $\mathbf{m}_{\{a,c\}}(\mathbf{P}) = \mathbf{m}_{\{b\}}(\mathbf{P})$ je to len tak možné, že $0 \in \mathbf{P}$. Teda $\mathbf{P}$ má vlastnosť α.

Veta 12. *Nech systém* $\mathbf{P} \subset \mathbf{X}$ *má vlastnosť* β. *Potom platí:*
$\mathbf{m}_{\{c,n\}}(\mathbf{P}) = \mathbf{m}_{\{k,o\}}(\mathbf{P})$.[15]

D ô k a z. Pretože podľa vety 8 I každý σ-okruh má vlastnosti k), o), je $\mathbf{m}_{\{k,o\}}(\mathbf{P}) \subset \mathbf{m}_{\{c,n\}}(\mathbf{P})$. Dokážeme opačnú inklúziu.

i) $\mathbf{P} \subset \mathbf{m}_{\{k,o\}}(\mathbf{P})$.

ii) $\mathbf{m}_{\{k,o\}}(\mathbf{P})$ je σ-uzavretý vzhľadom na disjunktný súčet.

iii) Dokážeme, že pre $A \in \mathbf{P}$, $B \in \mathbf{m}_{\{k,o\}}(\mathbf{P})$ je $A - B \in \mathbf{m}_{\{k,o\}}(\mathbf{P})$.

I. Vezmime systém $\mathbf{m}_1$ množín $B \in \mathbf{m}_{\{k,o\}}(\mathbf{P})$ takých, že pre množinu $A \in \mathbf{P}$ je $A \cap B \in \mathbf{m}_{\{k,o\}}(\mathbf{P})$. Ak $B \in \mathbf{P}$, $A \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ s disjunktnými $C_n \in \mathbf{P}$, teda $A \cap B \in \mathbf{m}_{\{k,o\}}(\mathbf{P})$ čiže $\mathbf{P} \subset \mathbf{m}_1$. Systém $\mathbf{m}_1$ je monotónny zdola a uzavretý vzhľadom na disjunktný súčet, pretože $\mathbf{m}_{\{k,o\}}(\mathbf{P})$ má tieto vlastnosti. Z toho vyplýva, že $\mathbf{m}_{\{k,o\}}(\mathbf{P}) \subseteq \mathbf{m}$ avša zřejme $\mathbf{m}_1 \subset \mathbf{m}_{\{k,o\}}(\mathbf{P})$.

II. Nech pre $A \in \mathbf{m}_{\{k,o\}}(\mathbf{P})$ je $\mathbf{m}_2$ systém množín $B \in \mathbf{m}_{\{k,o\}}(\mathbf{P})$, pre ktoré $A \cap B \in \mathbf{m}_{\{k,o\}}(\mathbf{P})$. Podľa I. $\mathbf{P} \subset \mathbf{m}_2$. Znova sa dá ukázať, že $\mathbf{m}_2$ má vlastnosti k), o), teda $\mathbf{m}_{\{k,o\}}(\mathbf{P}) \subset \mathbf{m}_2$. Avšak naopak $\mathbf{m}_2 \subset \mathbf{m}_{\{k,o\}}(\mathbf{P})$, teda $\mathbf{m}_{\{k,o\}}(\mathbf{P})$ je uzavretý vzhľadom na prenik.

III. Pre $A \in \mathbf{P}$ nech $\mathbf{m}_3$ je systém množín $B \in \mathbf{m}_{\{k,o\}}(\mathbf{P})$, pre ktoré $A - B \in \mathbf{m}_{\{k,o\}}(\mathbf{P})$, Podľa vlastnosti β systému $\mathbf{P}$ pre $B \in \mathbf{P}$ je $A - B = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ s disjunktnými $D_n \in \mathbf{P}$, teda $A - B \in \mathbf{m}_{\{k,o\}}(\mathbf{P})$ a teda $\mathbf{P} \subset \mathbf{m}_3$.

[15] Pozri [1], str. 129.

Nech $\{E_n\}_1^\infty$ je postupnosť disjunktných množín z $\mathbf{m}_3$, t. j. $A - E_n \in \mathbf{m}_{\{k,o\}}(\mathbf{P})$. Podľa II však $A - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A - E_n) \in \mathbf{m}_{\{k,o\}}(\mathbf{P})$, teda $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathbf{m}_3$, t. j. $\mathbf{m}_3$ má vlastnosť o).

Nech $\{E_n\}_1^\infty$ je klesajúca postupnosť množín z $\mathbf{m}_3$. $A - E_n \in \mathbf{m}_{\{k,o\}}(\mathbf{P})$, teda podľa II je $A \cap (E_n - E_{n+1}) = E_n \cap (A - E_{n+1}) \in \mathbf{m}_{\{k,o\}}(\mathbf{P})$ a ďalej pre $1 \leqq n < m$ je $(A - E_1) \cap (A \cap E_n - E_{n+1}) = 0$, $(A \cap (E_n - E_{n+1}) \cap (A \cap (E_m - E_{m+1})) = 0$ podľa vlastnosti o) systému $\mathbf{m}_{\{k,o\}}(\mathbf{P})$ je $A - \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = (A - E_1) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap (E_n - E_{n+1})) \in \mathbf{m}_{\{k,o\}}(\mathbf{P})$, čiže $\mathbf{m}_3$ má vlastnosť k). Z toho máme okamžite $\mathbf{m}_{\{k,o\}}(\mathbf{P}) = \mathbf{m}_3$, čím je vlastnosť iii) dokázaná. Dôkaz vety je hotový podľa vety 10.

Veta 13. *Nech* $\mathbf{R} \subset \mathbf{X}$ *je okruh. Potom platí* $\mathbf{m}_{\{c,n\}}(\mathbf{R}) = \mathbf{m}_{\{m\}}(\mathbf{R}) = \mathbf{m}_{\{j\}}(\mathbf{R})$.[16]

D ô k a z. I. Pretože každý σ-okruh je monotónny, je $\mathbf{m}_{\{m\}}(\mathbf{R}) \subset \mathbf{m}_{\{c,n\}}(\mathbf{R})$. Naopak, pretože množina $\{m)\}$ zachováva vlastnosti okruhu, je $\mathbf{m}_{\{m\}}(\mathbf{R})$ okruh a podľa vety 8 II je aj σ-okruhom, teda $\mathbf{m}_{\{c,n\}}(\mathbf{R}) \subset \mathbf{m}_{\{m\}}(\mathbf{R})$.

II. Pretože platí $\mathbf{m}_{\{c,n\}}(\mathbf{R}) = \mathbf{m}_{\{m\}}(\mathbf{R})$ a zrejme $\{j)\} \Rightarrow \{m)\}$ je $\mathbf{m}_{\{c,n\}}(\mathbf{R}) = \mathbf{m}_{\{m\}}(\mathbf{R}) \subset \mathbf{m}_{\{j\}}(\mathbf{R}) \subset \mathbf{m}_{\{c,n\}}(\mathbf{R})$, pričom posledná inklúzia vyplýva zo skutočnosti, že $\mathbf{m}_{\{c,n\}}(\mathbf{R})$ má vlastnosť j). Tým sme dokázali, že platí: $\mathbf{m}_{\{c,n\}}(\mathbf{R}) = \mathbf{m}_{\{j\}}(\mathbf{R})$.

Veta 14. *Nech* $\mathbf{P}$ *má vlastnosti z množiny* $\{c), p)\}$. *Potom* $\mathbf{m}_{\{c,n\}}(\mathbf{P}) = \mathbf{m}_{\{o\}}(\mathbf{P})$.[17]

D ô k a z. Zrejme $\mathbf{m}_{\{o\}}(\mathbf{P}) \subset \mathbf{m}_{\{c,n\}}(\mathbf{P})$. Naopak, $\mathbf{m}_{\{o\}}(\mathbf{P})$ je uzavretý vzhľadom na disjunktný súčet a ďalej, ak $A \in \mathbf{P}$ a $B \in \mathbf{m}_{\{o\}}(\mathbf{P})$, t. j. $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, pričom B_n sú disjunktné množiny z $\mathbf{P}$, je $A - B = A - \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A - B_n) \in \mathbf{P}$ podľa vlastnosti c) a p) systému $\mathbf{P}$, z čoho podľa vety 10. vyplýva, že $\mathbf{m}_{\{c,n\}}(\mathbf{P}) \subset \mathbf{m}_{\{o\}}(\mathbf{P})$, čím je dôkaz hotový.

7.

Nech X znamená ľubovoľný metrický priestor. Označme $\mathbf{F}$ systém všetkých uzavretých množín v X a $\mathbf{G}$ systém všetkých otvorených množín v X.

Systém $\mathbf{B} = \mathbf{m}_{\{n,p\}}(\mathbf{F} \cup \mathbf{G})$ sa nazýva systémom Borelových množín v X alebo Borelovým systémom v X.

Pretože, ako je známe, súčet spočetného systému otvorených množín je otvorená množina a prenik spočetného systému uzavretých množín je uzavretá množina, platí: $\varphi^{\{n,p\}}(\mathbf{F} \cup \mathbf{G}) = \varphi^{(n)}(\mathbf{F}) \cup \varphi^{(p)}(\mathbf{G})$. Označme $\varphi^{(n)}(\mathbf{F}) = \mathbf{F}_\sigma$. Každá množina $A \in \mathbf{F}_\sigma$ nazýva sa množinou typu $\mathbf{F}_\sigma$. Podobne $\varphi^{(p)}(\mathbf{G}) = \mathbf{G}_\delta$.

[16] Pozri [2], str. 27, 32.
[17] Pozri [4], str. 87.

Zrejme systém $\mathbf{F}_\sigma$ je σ-uzavretý vzhľadom na súčet a $\mathbf{G}_\delta$ je σ-uzavretý vzhľadom na prenik, teda $\varphi^{\{n,p\}}(\varphi^{\{n,p\}}(\mathbf{F} \cup \mathbf{G})) = \varphi^{\{n,p\}}(\mathbf{F}_\sigma \cup \mathbf{G}_\delta) = \varphi^{(p)}(\mathbf{F}_\sigma) \cup \varphi^{(n)}(\mathbf{G}_\delta)$. Označme zase $\varphi^{(p)}(\mathbf{F}_\sigma) = \mathbf{F}_{\sigma\delta}$ a $\varphi^{(n)}(\mathbf{G}_\delta) = \mathbf{G}_{\delta\sigma}$.

Takýmto spôsobom môžeme postupovať transfinitnou indukciou a konštruovať systémy $\mathbf{F}_{\sigma\delta\sigma}, \mathbf{F}_{\sigma\delta\sigma\delta}, \ldots, \mathbf{G}_{\delta\sigma\delta}, \mathbf{G}_{\delta\sigma\delta\sigma}, \ldots$

Systém $\mathbf{F} \cup \mathbf{G}$ je uzavretý vzhľadom na komplement, pretože komplementom uzavretej množiny je otvorená množina a komplementom otvorenej množiny je uzavretá množina. Podľa lemmy 5 množina {n), p)} zachováva vlastnosť g), teda systém $\mathbf{B}$ je uzavretý vzhľadom na komplement a je teda σ-algebrou. Pretože $X \in \mathbf{F}$ je tiež aj $X \in \mathbf{G}$, je $\mathbf{B} = \mathbf{m}_{\{c,n\}}(\mathbf{F} \cup \mathbf{G})$.

Uvažujme systém $\mathbf{F}_\sigma \cap \mathbf{G}_\delta$. Je známe, že každá otvorená množina je typu $\mathbf{F}_\sigma$, t. j. $\mathbf{G} \subset \mathbf{F}_\sigma$, ale tiež zrejme $\mathbf{G} \subset \mathbf{G}_\delta$. Podobne $\mathbf{F} \subset \mathbf{G}_\delta$ aj $\mathbf{F} \subset \mathbf{F}_\sigma$, teda platí $\mathbf{F} \cup \mathbf{G} \subset \mathbf{F}_\sigma \cup \mathbf{G}_\delta$.

Systém $\mathbf{F}_\sigma \cap \mathbf{G}_\delta$ je algebra. Vezmime $A \in \mathbf{F}_\sigma \cap \mathbf{G}_\delta$ a $B \in \mathbf{F}_\sigma \cap \mathbf{G}_\delta$. Pretože $A \in \mathbf{F}_\sigma$ i $B \in \mathbf{F}_\sigma$ je $A \cup B \in \mathbf{F}_\sigma$. Pretože $A \in \mathbf{G}_\delta$, $B \in \mathbf{G}_\delta$ existujú také dve postupnosti otvorených množín $\{A_n\}_1^\infty$, $\{B_n\}_1^\infty$, že $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. $A \cup B = (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \cup (\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} B_k) = \bigcap_{k=1}^{\infty} (\bigcap_{k=1}^{\infty} (A_n \cup B_k))$. Množiny $A_n \cup B_k$ sú otvorené pre všetky $n, k = 1, 2, 3, \ldots$ a okrem toho systém $\mathbf{G}_\delta$ je σ-uzavretý vzhľadom na prenik, preto $A \cup B \in \mathbf{G}_\delta$. Teda aj $A \cup B \in \mathbf{F}_\sigma \cap \mathbf{G}_\delta$. K množine $A \in \mathbf{F}_\sigma \cap \mathbf{G}_\delta$ existuje taká postupnosť uzavretých množín $\{A'_n\}_1^\infty$ a taká postupnosť otvorených množín $\{A''_n\}_1^\infty$, že $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A''_n$ avšak $A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} A'^*_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A''^*_n$ a množiny A'^*_n sú otvorené a množiny A''^*_n sú uzavreté, teda $A^* \in \mathbf{F}_\sigma \cap \mathbf{G}_\delta$.

Pretože súčet konečného počtu uzavretých množín je uzavretá množina a tiež prenik konečného počtu otvorených množín je otvorená množina, o množine $A \in \mathbf{F}_\sigma$ platí, že je limitou rastúcej postupnosti uzavretých množín a tiež $B \in \mathbf{G}_\delta$ je limitou klesajúcej postupnosti otvorených množín. Pre $A \in \mathbf{F}_\sigma$ musí totiž existovať taká postupnosť uzavretých množín $\{A_n\}_1^\infty$, že $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Ak položíme $A'_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, postupnosť $\{A'_n\}_1^\infty$ je rastúca postupnosť uzavretých množín a je tiež $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n$. Podobne pre ľubovoľnú množinu $B \in \mathbf{G}_\delta$. Z toho vyplýva, že $\mathbf{F}_\sigma \cup \mathbf{G}_\delta \subset \mathbf{m}_{\{m\}}(\mathbf{F} \cup \mathbf{G})$.

Pretože $\mathbf{F}_\sigma \cap \mathbf{G}_\delta$ je algebra a teda aj okruh a $\mathbf{F} \cup \mathbf{G} \subset \mathbf{F}_\sigma \cap \mathbf{G}_\delta$ podľa vety 13 je $\mathbf{m}_{\{c,n\}}(\mathbf{F} \cup \mathbf{G}) \subset \mathbf{m}_{\{c,n\}}(\mathbf{F}_\sigma \cap \mathbf{G}_\delta) = \mathbf{m}_{\{m\}}(\mathbf{F}_\sigma \cap \mathbf{G}_\delta)$. Teda $\mathbf{m}_{\{m\}}(\mathbf{F} \cup \mathbf{G}) = \mathbf{m}_{\{m\}}(\mathbf{F}_\sigma \cap \mathbf{G}_\delta)$ a tiež $\mathbf{m}_{\{c,n\}}(\mathbf{F} \cup \mathbf{G}) = \mathbf{m}_{\{m\}}(\mathbf{F}_\sigma \cap \mathbf{G}_\delta)$, čiže $\mathbf{m}_{\{c,n\}}(\mathbf{F} \cup \mathbf{G}) = \mathbf{m}_{\{m\}}(\mathbf{F} \cup \mathbf{G})$. To značí, že $\mathbf{B} = \mathbf{m}_{\{m\}}(\mathbf{F} \cup \mathbf{G})$.

Nech X značí množinu reálnych čísel. Nech $\mathbf{O}$ značí systém konečných otvorených intervalov. $\mathbf{B} = \mathbf{m}_{\{c,n\}}(\mathbf{O})$. K tomu stačí dokázať, že $\mathbf{F} \cup \mathbf{G} \subset \mathbf{m}_{\{c,n\}}(\mathbf{O})$, pretože $\mathbf{O} \subset \mathbf{G}$. Platí $X = (-\infty, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n)$ a teda $X \in \mathbf{m}_{\{c,n\}}(\mathbf{O})$. Ďalej, každá neprázdna otvorená množina na priamke je súčtom spočetného počtu otvorených intervalov $\mathbf{G} \subset \mathbf{m}_{\{c,n\}}(\mathbf{O})$. Každá uzavretá množina je komplementom istej otvorenej množiny a $\mathbf{m}_{\{c,n\}}(\mathbf{O})$ je uzavretý aj vzhľadom na komplement, lebo $X \in \mathbf{m}_{\{c,n\}}(\mathbf{O})$, teda $\mathbf{F} \subset \mathbf{m}_{\{c,n\}}(\mathbf{O})$.

Ak $\mathbf{O}'$ značí systém otvorených intervalov s racionálnymi koncovými bodmi, tiež je $\mathbf{B} = \mathbf{m}_{\{c,n\}}(\mathbf{O}')$. Stačí ukázať, že $\mathbf{O} \subset \mathbf{m}_{\{c,n\}}(\mathbf{O}')$. Vskutku, ak $(a, b) \in \mathbf{O}$, potom existuje taká nerastúca postupnosť racionálnych čísel $\{r_n\}_1^\infty$, že $a = \lim_{n\to\infty} r_n$ a neklesajúca postupnosť racionálnych čísel $\{s_n\}_1^\infty$, že $b = \lim_{n\to\infty} s_n$ a $r_n < s_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Zrejme je: $(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (r_n, s_n)$.

Došlo 9. IV. 1955.

Katedra matematiky
Slovenskej vysokej školy technickej,
Bratislava

LITERATÚRA

1. E. Čech, Bodové množiny, Praha. 2. P. R. Halmos, Measure Theory, New York 1950 (Teorija mery, Moskva 1953). 3. E. Marczewski, Ensembles indépendents et leurs applications à la théorie de la mesure. Fundamenta mathematicae XXXV. 4. J. von Neumann, Functional Operatořs I. Princeton 1950. 5. W. Sierpiński, Algèbre des Ensembles, Warszawa 1951.