PRÍSPEVOK K METODIKE RIEŠENIA STOKESOVHO PROBLÉMU PRE TROJOSÝ ELIPSOID

T. KOLBENHEYER

1. Úvod.

Majme uzavretú plochu S, ktorá je hladinovou plochou tiaže. Potenciál tiaže nech na tejto ploche má konštantnú hodnotu W_0. Ak všetky príťažlivé hmoty sa nachádzajú vo vnútri plochy S alebo na jej povrchu, podľa Stokesovej teorémy [1], [2] existuje jediná funkcia $W = W_{(x,y,z)}$ definovaná v celom vonkajšom priestore, spojitá včítane svojich prvých derivácií a vyhovujúca týmto podmienkam:

a) V celom vonkajšom priestore je $\Delta W = 2\omega^2$, kde ω je uhlová rýchlosť rotácie.

b) Ak r je vzdialenosť vonkajšieho bodu (x, y, z) od osi rotácie, R jeho vzdialenosť od ľubovoľného pevného bodu rotujúcej sústavy, pri ľubovoľným spôsobom vzrastajúcom R je:

$$\lim_{R \to \infty} R\left(W - \frac{1}{2}\omega^2 r^2\right) = \text{konšt.}$$

c) Vo všetkých bodoch plochy S je $W_{(x,y,z)} = W_0$.

Funkcia W je potenciálovou funkciou poľa tiaže hmotnej sústavy uzavretej vo vnútri plochy S (včítane jej povrchu) vo vonkajšom priestore. Konštanta na pravej strane vzťahu uvedeného pod b) sa preto rovná súčinu z gravitačnej konštanty $\varkappa$ a celkovej hmoty sústavy M. Teda je:

$$\lim_{R \to \infty} R\left(W - \frac{1}{2}\omega^2 r^2\right) = \varkappa M. \tag{1}$$

Zvláštny význam Stokesovej teorémy pre teóriu tiahových polí spočíva v tom, že pri zachovaní podmienky c) potenciálová funkcia W je nezávislá od usporiadania hmôt vo vnútri plochy S.

Problém zistenia funkcie W, vyhovujúcej všetkým uvedeným podmienkam, v teórii tiahových polí sa nazýva Stokesovým problémom pre plochu S. V ďalšom sa budeme zaoberať riešením tohto problému pre trojosý zemský elipsoid. V aplikácii na trojosý zemský elipsoid dáva toto riešenie potenciál normálneho poľa zemskej tiaže vo vonkajšom priestore a na povrchu zemského elipsoidu, a preto jednoznačne určuje normálne pole zemskej tiaže v tejto oblasti.

Riešenie Stokesovho problému pre trojosý elipsoid je možné viacerými spôsobmi. Často sa napr. používajú rady s guľovými funkciami [2], [3]. Metóda udaná v tejto práci je analógiou metódy riešenia toho istého problému pre sploštený rotačný elipsoid vedúcej ku známemu Somiglianovmu vzorcu [1], [2], a preto má tú výhodu, že dáva riešenie aspoň sčasti v uzavretom tvare.

Uvažovaný trojosý elipsoid S nech má rovnicu:

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1. \tag{2}$$

$(A, B, C > 0)$. Pre celý vonkajší priestor včítane plochy S možno definovať funkciu $\lambda = \lambda_{(x,y,z)}$ vyhovujúcu identicky vzťahu:

$$\frac{x^2}{A+\lambda} + \frac{y^2}{B+\lambda} + \frac{z^2}{C+\lambda} = 1 \tag{3}$$

a v celom vonkajšom priestore kladnú, pričom na ploche S musí zrejme byť $\lambda = 0$. Ako sa dokazuje v teórii eliptických súradníc, λ je pritom jednoznačnou funkciou súradníc x, y, z. Vzťah 3. predstavuje pri konštantnom λ rovnicu elipsoidu konfokálneho s 2.

Zavedieme ešte výraz:

$$N_{(x,y,z)} = \frac{x^2}{(A+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(B+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(C+\lambda)^2} \tag{4}$$

a elementárnym spôsobom sa presvedčíme o platnosti týchto vzťahov:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{2x}{(A+\lambda)N}, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial y} = \frac{2y}{(B+\lambda)N}, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial z} = \frac{2z}{(C+\lambda)N}. \tag{5}$$

V priebehu neskorších úvah budeme sa stretávať s funkciou parametra λ definovanou vo vonkajšom priestore vždy existujúcim nevlastným integrálom

$$I_{(\lambda)} = \int_\lambda^\infty \frac{du}{\sqrt{R_{(u)}}}, \tag{6}$$

kde

$$R_{(u)} = (A+u)(B+u)(C+u). \tag{7}$$

Ako je známe, funkcia $I_{(\lambda)}$ hrá význačnú úlohu v teórii potenciálu elipsoidálnych útvarov (potenciál homogénnej vrstvy ohraničenej dvoma nekonečne blízkymi sústrednými, súosými a podobnými elipsoidovými plochami). Trocha zdĺhavým, ináč však elementárnym postupom možno na základe (4). a (5). dokázať, že $I_{(\lambda)}$ vyhovuje v celom vonkajšom priestore Laplaceovej rovnici a teda v tejto oblasti je funkciou harmonickou [2].

Pri riešení predloženého problému budeme používať tiež niektoré iné harmonické funkcie. Pri ich odvodení budeme vychádzať z funkcie I' definovanej opäť v celom vonkajšom priestore a na ploche elipsoidu S nevlastným integrálom

$$I' = I'_{(\lambda;\, x,\, y,\, z)} = \int\limits_{\lambda}^{\infty} \left[\frac{x^2}{A+u} + \frac{y^2}{B+u} + \frac{z^2}{C+u} - 1\right] \frac{du}{\sqrt{R_{(u)}}} \tag{8}$$

(o existencii tohto nevlastného integrálu možno sa ľahko presvedčiť). V teórii gravitačného poľa homogénneho elipsoidu sa dokazuje, že I' sa zhoduje až na konštantný faktor s potenciálom homogénneho elipsoidu definovaného rovnicou (2). V dôsledku toho táto funkcia je v celom vonkajšom priestore harmonická a vzhľadom na definíciu λ danú vzťahom (3). má okrem toho tiež vlastnosť:

$$\frac{\partial I'}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\sqrt{R_{(\lambda)}}} \left[\frac{x^2}{A+\lambda} + \frac{y^2}{B+\lambda} + \frac{z^2}{C+\lambda} - 1\right] = 0. \tag{9}$$

Okrem súradníc x, y, z možno však I' považovať tiež za funkciu A, B, C ako ďalších troch nezávisle premenných (parametrov). Potom, pravda, derivácie:

$$\frac{\partial I'}{\partial A}, \quad \frac{\partial I'}{\partial B}, \quad \frac{\partial I'}{\partial C}$$

sú tiež harmonickými funkciami v celom vonkajšom priestore, pretože napr.

$$\Delta \frac{\partial I'}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial A} (\Delta I') = 0.$$

V ďalšom budeme označovať:

$$I_1 = -\frac{\partial I'}{\partial B}, \quad I_2 = -\frac{\partial I'}{\partial C} \tag{10}$$

a vypočítame obe tieto funkcie derivovaním (8). podľa príslušných parametrov, pričom prihliadame k tomu, že λ je teraz funkciou nielen súradníc x, y, z, ale v dôsledku (3). tiež parametrov A, B, C. Máme preto napr.

$$\frac{\partial I'}{\partial B} = \frac{\partial I'}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial B} + \left(\frac{\partial I'}{\partial B}\right)_{\lambda = \text{konšt.}},$$

a preto vzhľadom na vzťahy (7). (8). (9). a (10).

$$I_1 = -\int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{\partial}{\partial B} \left\{\frac{1}{\sqrt{R_{(u)}}} \left[\frac{x^2}{A+u} + \frac{y^2}{B+u} + \frac{z^2}{C+u} - 1\right]\right\} du.$$

Po derivovaní za integračným znamienkom dostávame:

$$I_1 = \frac{1}{2}\, x^2 L_{1(\lambda)} + \frac{3}{2}\, y^2 L_{2(\lambda)} + \frac{1}{2}\, z^2 L_{3(\lambda)} - \frac{1}{4}\, L_{4(\lambda)}, \tag{11}$$

kde

$$\left.\begin{aligned}
L_{1(\lambda)} &= \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{(A+u)^{\frac{3}{2}} (B+u)^{\frac{3}{2}} (C+u)^{\frac{1}{2}}}, \\
L_{2(\lambda)} &= \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{(A+u)^{\frac{1}{2}} (B+u)^{\frac{5}{2}} (C+u)^{\frac{1}{2}}} \\
L_{3(\lambda)} &= \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{(A+u)^{\frac{1}{2}} (B+u)^{\frac{3}{2}} (C+u)^{\frac{3}{2}}}, \\
L_{4(\lambda)} &= \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{(A+u)^{\frac{1}{2}} (B+u)^{\frac{3}{2}} (C+u)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}\right\} \tag{11a}$$

Podobným spôsobom môžeme odvodiť:

$$I_2 = \frac{1}{2}\, x^2 M_{1(\lambda)} + \frac{1}{2}\, y^2 M_{2(\lambda)} + \frac{3}{2}\, z^2 M_{3(\lambda)} - \frac{1}{2}\, M_{4(\lambda)}, \tag{12}$$

kde

$$\left.\begin{aligned}
M_{1(\lambda)} &= \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{(A+u)^{\frac{3}{2}} (B+u)^{\frac{1}{2}} (C+u)^{\frac{3}{2}}}, \\
M_{2(\lambda)} &= \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{(A+u)^{\frac{1}{2}} (B+u)^{\frac{3}{2}} (C+u)^{\frac{3}{2}}} \\
M_{3(\lambda)} &= \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{(A+u)^{\frac{1}{2}} (B+u)^{\frac{1}{2}} (C+u)^{\frac{5}{2}}}, \\
M_{4(\lambda)} &= \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{(A+u)^{\frac{1}{2}} (B+u)^{\frac{1}{2}} (C+u)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}\right\} \tag{12a}$$

Objasníme si ešte fyzikálny význam funkcií I_1 a I_2, ktoré budeme pritom interpretovať ako potenciály gravitačného poľa dvoch hmotných sústav. Obe tieto funkcie sú definované v oblasti zvonka elipsoidovej plochy S a sú tam harmonické. Preto tiež obe funkcie predstavujú potenciál príslušnej hmotnej sústavy vo vonkajšom priestore a celá táto sústava leží vo vnútri elipsoidu alebo na jeho povrchu. Potenciál vo vnútri S uvažujeme v prvom prípade v tvare:

$$\bar{I}_1 = \frac{1}{2} x^2 L_{1(o)} + \frac{3}{2} y^2 L_{2(o)} + \frac{1}{2} z^2 L_{3(o)} - \frac{1}{2} L_{4(o)},$$

aby sme na ploche S (t. j. pri $\lambda = 0$) vyhoveli podmienke spojitosti $I_1 = \bar{I}_1$. Hustota vo vnútri elipsoidu podľa Poissonovej rovnice je:

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi\varkappa} \triangle \bar{I}_1 = -\frac{1}{4\pi\varkappa} [L_{1(o)} + 3L_{2(o)} + L_{3(o)}] = \text{konšt.},$$

teda ide opäť o homogénny elipsoid, ktorého hmota je:

$$\mu = \frac{4\pi}{3} \varrho \sqrt{ABC} = -\frac{\sqrt{ABC}}{3\varkappa} [L_{1(o)} + 3L_{2(o)} + L_{3(o)}].$$

Avšak okrem priestorovej hmoty vypĺňajúcej homogénne vnútro elipsoidu vystupujú na jeho povrchu aj plošné hmoty. Ich povrchová hustota je:

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi\varkappa} \left(\frac{\partial I_1}{\partial n} - \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial n}\right),$$

kde n je normála plochy v uvažovanom jej bode. Celkovú hmotu systému M_1, t. j. súčet všetkých priestorových a plošných hmôt, môžeme zistiť zo vzťahu:

$$\varkappa M_1 = \lim_{R \to \infty} RI_1.$$

Presvedčíme sa bez väčších ťažkostí, že integrály L_1, L_2 a L_3 konvergujú pri $\lambda \to \infty$ k nule ako $\lambda^{-\frac{5}{2}}$, teda ako R^{-5}, kým štvorce súradníc x, y, z vzrastajú ako R^2. Integrál L_4 konverguje súčasne k nule ako $\lambda^{-\frac{3}{2}}$, teda ako R^{-3}. Preto pri $R \to \infty$ ($\lambda \to \infty$) súčin RI_1 konverguje k nule ako R^{-2} a v dôsledku toho celková hmota systému je:

$$M_1 = \frac{1}{\varkappa} \lim_{R \to \infty} RI_1 = 0. \tag{13a}$$

To znamená, že súčet všetkých povrchových hmôt sa rovná záporne vzatej celkovej objemovej hmote.

Analogická úvaha platí tiež pre integrál I_2. Príslušný výraz pre potenciál vo vnútri elipsoidu tu je:

$$\bar{I}_2 = \frac{1}{2} x^2 M_{1(o)} + \frac{1}{2} y^2 M_{2(o)} + \frac{3}{2} z^2 M_{3(o)} - \frac{1}{2} M_{4(o)}$$

a pre hustotu

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi\varkappa} [M_{1(o)} + M_{2(o)} + 3 M_{3(o)}],$$

kým celková hmota systému je tiež nulová:

$$M_2 = \frac{1}{\varkappa} \lim_{R \to \infty} RI_2 = 0. \tag{13b}$$

2. Integrály $L_{(\lambda)}$ a $M_{(\lambda)}$ pri elipsoidoch malej numerickej výstrednosti.

Štvorce numerických výstredností elipsoidu S daného rovnicou (1).(2) budeme označovať ε_1 a ε_2. Definujeme teda:

$$\varepsilon_1 = \frac{A - B}{A}, \quad \varepsilon_2 = \frac{A - C}{A}$$

a máme:

$$B = A(1 - \varepsilon_1), C = A(1 - \varepsilon_2). \tag{1}$$

Hodnoty sploštění α_1 a α_2 definujeme obvyklým spôsobom vzorcami

$$b = a(1 - \alpha_1), \; c = a(1 - \alpha_2), \tag{2}$$

kde $a^2 = A$, $b^2 = B$, $c^2 = C$. Umocnením vzorcov (2). a porovnaním s (1). dostávame medzi veličinami ε a α tieto vzťahy:

$$\varepsilon_1 = 2\alpha_1 - \alpha_1^2, \qquad \varepsilon_2 = 2\alpha_2 - \alpha_2^2. \tag{3}$$

Pri elipsoidoch malej výstrednosti ε_1 a ε_2 sú malé veličiny toho istého rádu ako α_1 a α_2, ako vidíme zo vzťahov (3).

Niektoré naše ďalšie úvahy, ako napr. odvodenie Clairautovej teorémy pre trojosý elipsoid, budú sa vzťahovať na elipsoidy malej výstrednosti a malej rýchlosti rotácie. Sploštenia α_1 a α_2 budeme pritom považovať za malé veličiny prvého rádu a práve tak aj veličinu q' definovanú vzorcom

$$q' = \frac{\omega^2 a}{\gamma_o},$$

kde ω je uhlová rýchlosť rotácie, γ_o stredná normálna hodnota zrýchlenia tiaže na rovníku uvažovaného elipsoidu. Ukáže sa neskôr, že vo vzorcoch pre potenciál a zrýchlenie tiaže na povrchu trojosého elipsoidu vystupujú integrály L a M definované v1.(11a) a 1.(12a) v súčine s malou veličinou prvého rádu q'. Pretože v svojich úvahách budeme sa vždy obmedzovať na členy prvého a druhého rádu a zanedbávať malé členy vyšších rádov, stačí tieto integrály s presnosťou vypočítať na členy prvého rádu.

Uvažujme najprv napr. integrál:

$$L_{1(\lambda)} = \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{(A+u)^{\frac{3}{2}} (B+u)^{\frac{3}{2}} (C+u)^{\frac{1}{2}}},$$

ktorý môžeme napísať tiež takto:

$$L_{1(\lambda)} = \int\limits_{\lambda}^{\infty} \left(1 - \frac{\varepsilon_1 A}{A+u}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{\varepsilon_2 A}{A+u}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{(A+u)^{\frac{7}{2}}}.$$

Avšak s presnosťou na členy prvého rádu platí:

$$\left(1 - \frac{\varepsilon_1 A}{A+u}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{\varepsilon_2 A}{A+u}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{A}{A+u}\left(\frac{3}{2}\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2\right),$$

eda s presnosťou toho istého rádu

$$L_{1(\lambda)} = \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{(A+u)^{\frac{7}{2}}} + \left(\frac{3}{2}\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2\right) A \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{(A+u)^{\frac{9}{2}}}.$$

Integráciou z toho dostávame:

$$L_{1(\lambda)} = \frac{2}{5(A+\lambda)^{\frac{5}{2}}} + \left(\frac{3}{7}\varepsilon_1 + \frac{1}{7}\varepsilon_2\right) \cdot \frac{A}{(A+\lambda)^{\frac{7}{2}}}.$$

Pri odvodení vzorcov pre potenciál a zrýchlenie tiaže na povrchu trojosého elipsoidu budeme potrebovať hodnoty $L_{(o)}$ a $M_{(o)}$. Spôsobom, ktorý sme práve naznačili, možno odvodiť:

$$\left.\begin{aligned}
L_{1(o)} &= \frac{2}{5A^{\frac{5}{2}}}\left[1 + \frac{15}{14}\varepsilon_1 + \frac{5}{14}\varepsilon_2\right] & M_{1(o)} &= \frac{2}{5A^{\frac{5}{2}}}\left[1 + \frac{5}{14}\varepsilon_1 + \frac{15}{14}\varepsilon_2\right] \\
L_{2(o)} &= \frac{2}{5A^{\frac{5}{2}}}\left[1 + \frac{25}{14}\varepsilon_1 + \frac{5}{14}\varepsilon_2\right] & M_{2(o)} &= \frac{2}{5A^{\frac{5}{2}}}\left[1 + \frac{15}{14}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\right] = L_{3(o)} \\
L_{3(o)} &= \frac{2}{5A^{\frac{5}{2}}}\left[1 + \frac{15}{14}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\right] & M_{3(o)} &= \frac{1}{5A^{\frac{5}{2}}}\left[1 + \frac{5}{14}\varepsilon_1 + \frac{25}{14}\varepsilon_2\right] \\
L_{4(o)} &= \frac{2}{3A^{\frac{3}{2}}}\left[1 + \frac{9}{10}\varepsilon_1 + \frac{3}{10}\varepsilon_2\right] & M_{4(o)} &= \frac{2}{3A^{\frac{3}{2}}}\left[1 + \frac{3}{10}\varepsilon_1 + \frac{9}{10}\varepsilon_2\right]
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Pri výpočte zrýchlenia tiaže na povrchu hladinového elipsoidu sú okrem toho potrebné aj hodnoty derivácií L a M podľa premennej λ pri $\lambda = 0$, ktoré v dôsledku 1.(11a) a 1.(12a) možno písať takto:

$$\left.\begin{aligned}
L'_{1(o)} &= -A^{-\frac{3}{2}} B^{-\frac{3}{2}} C^{-\frac{1}{2}} = -A^{-\frac{7}{2}}\left[1 + \frac{3}{2}\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2\right] \\
L'_{2(o)} &= -A^{-\frac{1}{2}} B^{-\frac{5}{2}} C^{-\frac{1}{2}} = -A^{-\frac{7}{2}}\left[1 + \frac{5}{2}\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2\right] \\
L'_{3(o)} &= -A^{-\frac{1}{2}} B^{-\frac{3}{2}} C^{-\frac{3}{2}} = -A^{-\frac{7}{2}}\left[1 + \frac{3}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\right] \\
L'_{4(o)} &= -A^{-\frac{1}{2}} B^{-\frac{3}{2}} C^{-\frac{1}{2}} = -A^{-\frac{5}{2}}\left[1 + \frac{3}{2}\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2\right] \\
M'_{1(o)} &= -A^{-\frac{3}{2}} B^{-\frac{1}{2}} C^{-\frac{3}{2}} = -A^{-\frac{7}{2}}\left[1 + \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{3}{2}\varepsilon_2\right] \\
M'_{2(o)} &= -A^{-\frac{1}{2}} B^{-\frac{3}{2}} C^{-\frac{3}{2}} = -A^{-\frac{7}{2}}\left[1 + \frac{3}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\right] = L'_{3(o)} \\
M'_{3(o)} &= -A^{-\frac{1}{2}} B^{-\frac{1}{2}} C^{-\frac{5}{2}} = -A^{-\frac{7}{2}}\left[1 + \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{5}{2}\varepsilon_2\right] \\
M'_{4(o)} &= -A^{-\frac{1}{2}} B^{-\frac{1}{2}} C^{-\frac{3}{2}} = -A^{-\frac{5}{2}}\left[1 + \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{3}{2}\varepsilon_2\right]
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

3. Potenciál tiaže.

Ak os z je polárnou osou uvažovaného hladinového elipsoidu, potenciál poľa odstredivých síl W' možno vyjadriť vzorcom:

$$W' = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}\omega^2 r^2. \quad (1)$$

Uvažujme teraz funkciu W, definovanú vo vonkajšom priestore rovnicou:

$$W = W' + kI + k_1 I_1 + k_2 I_2, \quad (2)$$

kde k, k_1 a k_2 sú predbežne ľubovoľné konštanty, kým I, I_1 a I_2 sme definovali vzťahmi 1.(6), 1.(11) a 1.(12). Poukázali sme už na to, že všetky tri funkcie I, I_1 a I_2 sú vo vonkajšom priestore harmonické. Preto W vyhovuje prvej požiadavke kladenej na potenciálovú funkciu Stokesovým teorémam:

$$\triangle W = \triangle W' = 2\omega^2.$$

V dôsledku definícií v 1. však funkcie I, I_1 a I_2 konvergujú pri neobmedzene a ľubovoľným spôsobom vzrastajúcom R rovnomerne k nule, pričom:

$$\lim_{R\to\infty} RI = 2, \qquad \lim_{R\to\infty} RI_1 = \lim_{R\to\infty} RI_2 = 0. \quad (3)$$

Preto platí:

$$\lim_{R\to\infty} R\left(W - \frac{1}{2}\omega^2 r^2\right) = 2k \quad (4)$$

a druhá požiadavka Stokesovej teorémy je tiež splnená.

Presvedčíme sa, že konštanty k_1, k_2 a k možno zvoliť tak, aby na elipsoidovej ploche S danej rovnicou 1.(2) funkcia W mala konštantnú hodnotu W_o. Použijúc vzťahy 1.(11), 1.(12) a 3.(1) píšeme najprv:

$$\left.\begin{aligned} W = \frac{1}{2}\, x^2[\omega^2 + k_1L_{1(\lambda)} + k_2M_{1(\lambda)}] + \frac{1}{2}\, y^2[\omega^2 + 3k_1L_{2(\lambda)} + k_2M_{2(\lambda)}] + \\ + \frac{1}{2}\, z^2[k_1L_{3(\lambda)} + 3k_2M_{3(\lambda)}] - \frac{1}{2}\,[k_1L_{4(\lambda)} + k_2M_{4(\lambda)}] + kI_{(\lambda)}\,. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

W bude mať konštantnú hodnotu na S vtedy a len vtedy, ak zvolíme k_1 a k_2 tak, aby bola splnená podmienka:

$$[\omega^2 + k_1L_{1(o)} + k_2M_{1(o)}] : [\omega^2 + 3k_1L_{2(o)} + k_2M_{2(o)}] : [k_1L_{3(o)} + 3k_2M_{3(o)}] = \\ = \frac{1}{A} : \frac{1}{B} : \frac{1}{C}\,,$$

vedúca k sústave dvoch lineárnych rovníc pre k_1 a k_2:

$$\left.\begin{aligned} (3BL_2 - AL_1)\,k_1 + (BM_2 - AM_1)\,k_2 &= (A - B)\,\omega^2 \\ (CL_3 - AL_1)\,k_1 + (3CM_3 - AM_1)\,k_2 &= A\,\omega^2, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

kde namiesto $L_{1(o)}$, $M_{1(o)}$, ... sme jednoducho písali L_1, M_1, atď. Riešením tejto sústavy na k_1 a k_2 a vsadením ich hodnôt do (2). dostávame funkciu W, ktorá má na S konštantnú hodnotu, závislú ešte od konštanty k. Avšak I má, ktorá má na S konštantnú hodnotu, ktorá je na S konštantná ($\lambda = 0$), hodnotu vždy odlišnú od nuly (kladnú), a preto možno vždy voliť k tak, aby funkcia W mala na elipsoide S ľubovoľnú konštantnú hodnotu W_o, čím je potom splnená aj tretia požiadavka Stokesovej teorémy.

Pri riešení sústavy (6). obmedzíme sa opäť na členy prvého rádu v ε_1 a ε_2. V dôsledku 2.(1) a 2.(4) máme najprv:

$$\left.\begin{aligned} 3BL_2 - AL_1 &= \frac{4}{5}\,A^{-\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{9}{14}\,\varepsilon_1 + \frac{5}{14}\,\varepsilon_2\right) \\ BM_2 - AM_1 &= -\frac{4}{35}\,A^{-\frac{3}{2}}\,\varepsilon_1 \\ CL_3 - AL_1 &= -\frac{4}{35}\,A^{-\frac{3}{2}}\,\varepsilon_2 \\ 3CM_3 - AM_1 &= \frac{4}{5}\,A^{-\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{5}{14}\,\varepsilon_1 + \frac{9}{14}\,\varepsilon_2\right). \\ A - B &= A\varepsilon_1 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Vsadiac tieto hodnoty do (6) a riešiac sústavu dostávame:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \frac{10}{7}\,A^{\frac{5}{2}}\omega^2\varepsilon_1, \\ k_2 &= \frac{5}{4}\,\omega^2 A^{\frac{5}{2}}\left(1 - \frac{5}{14}\,\varepsilon_1 - \frac{9}{14}\,\varepsilon_2\right). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Pravda, postup, ktorý sme tu uviedli, potrebuje ešte určité doplnenie. Potenciál tiaže na zemskom elipsoide nie je bezprostredne daný, a preto konštantu W_o predbežne nemôžeme považovať za známu, ako sme predpokladali. Vyplýva to z toho, že obvyklými spôsobmi merania nezisťujeme potenciál tiaže, ale jej intenzitu. Preto konštantu k v rovnici 2)., resp. (5). zistíme tak, že z tejto rovnice odvodíme najprv vzťah pre normálnu hodnotu tiaže v ľubovoľnom bode hladinového elipsoidu. Ak je normálna hodnota tiaže známa v jedinom bode povrchu (alebo všeobecnejšie v jedinom bode vonkajšieho priestoru), hodnota konštanty k je tým jednoznačne určená.

4. Tiaž na hladinovom sféroide.

Zložky zrýchlenia tiaže γ_x, γ_y a γ_z v ľubovoľnom bode vonkajšieho priestoru dostávame ako záporne vzaté derivácie potenciálu W podľa jednotlivých súradníc. K odvodeniu príslušných vzorcov vychádzame z rovnice 3.(5), pričom máme na zreteli, že λ je funkciou súradníc x, y, z a že príslušné derivácie tejto funkcie sú dané vzťahmi 1.(5). Takto napr. dostávame:

$$\gamma_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = -x[\omega^2 + k_1L_1 + k_2M_1] - \left[\frac{1}{2}\,x^2(k_1L_1' + k_2M_1') + \frac{1}{2}\,y^2(3k_1L_2' + \right. \\ \left. + k_2M_2') + \frac{1}{2}\,z^2(k_1L_3' + 3k_2M_3') - \frac{1}{2}\,(k_1L_4' + k_2M_4') - \frac{k}{\sqrt{R_{(\lambda)}}}\right] \cdot \frac{2x}{(A + \lambda)N}\,,$$

kde L_1', M_1' atď. sú derivácie príslušných funkcií L a M podľa λ. $R_{(\lambda)}$ sme definovali vzorcom 1.(7).

Pre stručnosť a lepšiu prehľadnosť zavedieme tieto pomocné výrazy:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= k_1L_1' + k_2M_1' & p_o &= \omega^2 + k_1L_1 + k_2M_1 \\ p_2 &= 3k_1L_2' + k_2M_2' & q_o &= \omega^2 + 3k_1L_2 + k_2M_2 \\ p_3 &= k_1L_3' + 3k_2M_3' & r_o &= k_1L_3 + 3k_2M_3 \\ p_4 &= k_1L_4' + k_2M_4' & s_o &= \frac{2k}{\sqrt{R}} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Na hladinovom elipsoide S potom je:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_x &= -p_ox - (p_1x^2 + p_2y^2 + p_3z^2 - p_4 - s_o)\,\frac{x}{AN}\,, \\ \gamma_y &= -q_oy - (p_1x^2 + p_2y^2 + p_3z^2 - p_4 - s_o)\,\frac{y}{BN}\,, \\ \gamma_z &= -r_oz - (p_1x^2 + p_2y^2 + p_3z^2 - p_4 - s_o)\,\frac{z}{CN}\,, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

kde vo všetkých výrazoch p, ako aj v q_o, r_o a N, kladieme $\lambda = 0$. Absolútnu hodnotu zrýchlenia tiaže γ v bode x, y, z, ležiacom na ploche S, dostávame ako súčet priemetov všetkých troch zložiek do normály plochy v uvažovanom bode:

$$\gamma = \gamma_x \cos(nx) + \gamma_y \cos(ny) + \gamma_z \cos(nz). \tag{3}$$

Smerové kosínusy normály sú však podľa známych vzorcov:

$$\cos(nx) = \frac{x}{A\sqrt{N}}, \quad \cos(ny) = \frac{y}{B\sqrt{N}}, \quad \cos(nz) = \frac{3}{C\sqrt{N}}. \tag{4}$$

Z rovníc (2). a (3). preto najprv dostávame:

$$\gamma = -\frac{1}{\sqrt{N}}\cdot\left(\frac{p_o x^2}{A} + \frac{q_o y^2}{B} + \frac{r_o z^2}{C}\right) -$$

$$-\frac{1}{N\sqrt{N}}(p_1x^2 + p_2y^2 + p_3z^2 - p_4 - s_o)\left(\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2}\right),$$

ďalej vzhľadom na 1.(4)

$$\gamma = -\frac{1}{\sqrt{N}}\left[\left(p_1 + \frac{p_o}{A}\right)x^2 + \left(p_2 + \frac{q_o}{B}\right)y^2 + \left(p_3 + \frac{r_o}{C}\right)z^2 - p_4 - s_o\right].$$

Použijeme ešte identitu

$$(p_4 + s_o)\left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C}\right) = p_4 + s_o$$

a vzorec pre zrýchlenie tiaže píšeme v tvare:

$$\left.\begin{aligned}\gamma = -\frac{1}{\sqrt{N}}\Bigg[&\left(p_1 + \frac{p_o - p_4 - s_o}{A}\right)x^2 + \left(p_2 + \frac{q_o - p_4 - s_o}{B}\right)y^2 + \\ &+ \left(p_3 + \frac{r_o - p_4 - s_o}{C}\right)z^2\Bigg].\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Hodnoty zrýchlenia tiaže vo vrcholoch hladinového elipsoidu budeme nazývať jeho hlavnými hodnotami a budeme ich označovať γ_1, γ_2 a γ_3. Dostaneme ich z rovnice (5), ak v nej za (x, y, z) kladieme trojice hodnôt $(\sqrt{A}, 0, 0)$, $(0, \sqrt{B}, 0)$, $(0, 0, \sqrt{C})$, pričom hodnoty N sú $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}$. Máme teda:

$$\left.\begin{aligned}\gamma_1 &= -A^{\frac{3}{2}}\left(p_1 + \frac{p_0 - p_4 - s_0}{A}\right),\\ \gamma_2 &= -B^{\frac{3}{2}}\left(p_2 + \frac{q_0 - p_4 - s_0}{B}\right),\\ \gamma_3 &= -C^{\frac{3}{2}}\left(p_3 + \frac{r_0 - p_4 - s_0}{C}\right).\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

V dôsledku toho vzorec (5). možno písať tiež v tvare:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{N}}\left[A^{-\frac{3}{2}}\gamma_1 x^2 + B^{-\frac{3}{2}}\gamma_2 y^2 + C^{-\frac{3}{2}}\gamma_3 z^2\right] \tag{7a}$$

alebo zavedením dĺžky poloosí a, b, c v tvare:

$$\gamma = \frac{\gamma_1\frac{x^2}{a^3} + \gamma_2\frac{y^2}{b^3} + \gamma_3\frac{z^2}{c^3}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}. \tag{7b}$$

5. Hlavné hodnoty zrýchlenia tiaže.

Vzorce (4),(6) udávajú hlavné hodnoty zrýchlenia tiaže γ_1, γ_2 a γ_3 na trojosovom hladinovom elipsoide a platia pri akýchkoľvek kladných hodnotách A, B, C. V týchto vzorcoch teraz vyjadríme všetky v nich vystupujúce konštanty pomocou A, ε_1, ε_2 a ω. Budeme sa pritom opäť obmedzovať na členy druhého rádu v ε_1, ε_2 a ω^2 a zanedbávať členy vyšších rádov (napr. $\varepsilon_1^2\omega^2$, $\varepsilon_1\varepsilon_2^2$, $\varepsilon_1\varepsilon_2\omega^2$ a pod). Takto zjednodušené úvahy a vzorce platia potom pre elipsoidy s malým sploštením pri pomalej rotácii, a preto tiež pre zemský elipsoid.

Použijeme teda vzorce (4),(1), ktorými sme definovali konštanty vystupujúce na pravej strane vzorcov (4),(6) a ďalej tiež vzorce 3,(8), 2,(4) a 2,(5). Pre s_0 napr. jednoduchým výpočtom dostávame:

$$s_0 = \frac{2k}{\sqrt{ABC}} = \frac{2k}{A^{\frac{3}{2}}}(1 - \varepsilon_1)^{-\frac{1}{2}}(1 - \varepsilon_2)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{2k}{A^{\frac{3}{2}}}\left[1 + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{3}{8}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + \frac{1}{4}\varepsilon_1\varepsilon_2\right], \tag{1a}$$

kým vzorce pre ďalšie konštanty sú takéto:

$$\left.\begin{aligned}p_0 &= \frac{3}{2}\omega^2\left(1 + \frac{8}{21}\varepsilon_1 + \frac{1}{7}\varepsilon_2\right),\\ q_0 &= \frac{3}{2}\omega^2\left(1 + \frac{29}{21}\varepsilon_1 + \frac{1}{7}\varepsilon_2\right),\\ r_0 &= \frac{3}{2}\omega^2\left(1 + \frac{8}{21}\varepsilon_1 + \frac{8}{7}\varepsilon_2\right),\\ p_1 &= -\frac{5}{4A}\omega^2\left(1 + \frac{9}{7}\varepsilon_1 + \frac{6}{7}\varepsilon_2\right),\\ p_2 &= -\frac{5}{4A}\omega^2\left(1 + \frac{32}{7}\varepsilon_1 + \frac{6}{7}\varepsilon_2\right)\\ p_3 &= -\frac{15}{4A}\omega^2\left(1 + \frac{11}{21}\varepsilon_1 + \frac{13}{7}\varepsilon_2\right),\\ p_4 &= -\frac{5}{4}\omega^2\left(1 + \frac{9}{7}\varepsilon_1 + \frac{6}{7}\varepsilon_2\right).\end{aligned}\right\} \tag{1b}$$

Hlavné hodnoty zrýchlenia tiaže γ_1, γ_2, a γ_3 dostávame vsadením výrazov (1a),(1b) do vzorcov 4,(2), pričom si súčasne vyjadríme B a C pomocou A, ε_1 a ε_2 podľa vzorcov 2,(1). Výpočty, ktoré sú zdĺhavé, avšak ináč celkom jednoduché, neuvádzame, ale obmedzíme sa na ich výsledky:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{2k}{A}\left[1 + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{3}{8}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + \frac{1}{4}\varepsilon_1\varepsilon_2\right] - \\
&\quad - \frac{3}{2}\omega^2\sqrt{A}\left[1 + \frac{8}{21}\varepsilon_1 + \frac{1}{7}\varepsilon_2\right], \\
\gamma_2 &= \frac{2k}{A}\left[1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2 + \frac{3}{8}\varepsilon_2^2\right] - \frac{3}{2}\omega_2\sqrt{A}\left[1 - \frac{43}{42}\varepsilon_1 + \frac{1}{7}\varepsilon_2\right], \\
\gamma_3 &= \frac{2k}{A}\left[1 + \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{3}{8}\varepsilon_1^2\right] + \omega^2\sqrt{A}\left[1 - \frac{3}{14}\varepsilon_1 - \frac{1}{14}\varepsilon_2\right].
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Zavedieme teraz tieto pomocné veličiny:

$$\gamma_0 = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2), \qquad q' = \frac{\omega^2\sqrt{A}}{\gamma_0}, \tag{3}$$

ktoré budeme ďalej považovať za známe. Prvá z nich predstavuje strednú normálnu hodnotu tiaže na rovníku hladinového elipsoidu, druhá analógiu podobným spôsobom definovanej veličiny v teórii tiahového poľa pri rotačnom elipsoide. Z prvých dvoch rovníc (2). potom vyplýva:

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \frac{2k}{A}\left[1 + \frac{1}{4}\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2 + \frac{3}{16}\varepsilon_1^2 + \frac{3}{8}\varepsilon_2^2 + \frac{1}{8}\varepsilon_1\varepsilon_2\right] - \\
&\quad - \frac{3}{2}\gamma_0 q'\left[1 - \frac{9}{28}\varepsilon_1 + \frac{1}{7}\varepsilon_2\right],
\end{aligned}$$

z čoho:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{2k}{A} &= \gamma_0\left[1 + \frac{3}{2}q' - \frac{1}{4}\varepsilon_1 - \frac{1}{2}\varepsilon_2 - \frac{6}{7}q'\varepsilon_1 - \frac{15}{28}q'\varepsilon_2 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{8}\varepsilon_1^2 - \frac{1}{8}\varepsilon_2^2 + \frac{1}{8}\varepsilon_1\varepsilon_2\right].
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ak tento výraz vsadíme opäť do všetkých troch rovníc (2)., vyjadríme tým hlavné hodnoty tiaže pomocou γ_0, q', ε_1 a ε_2. Trocha zdĺhavým, ináč však zase veľmi jednoduchým výpočtom, pri ktorom zanedbávame všetky malé veličiny tretieho a vyšších rádov v ε_1, ε_2 a q', dostávame tieto výsledky:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_1 &= \gamma_0\left[1 + \frac{1}{4}\varepsilon_1 + \frac{1}{8}\varepsilon_1^2 - \frac{19}{28}q'\varepsilon_1\right], \\
\gamma_2 &= \gamma_0\left[1 - \frac{1}{4}\varepsilon_1 - \frac{1}{8}\varepsilon_1^2 + \frac{19}{28}q'\varepsilon_1\right], \\
\gamma_3 &= \gamma_0\left[1 + \frac{5}{2}q' + \frac{1}{4}\varepsilon_1 - \frac{1}{2}\varepsilon_2 - \frac{9}{28}q'\varepsilon_1 - \frac{17}{28}q'\varepsilon_2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{8}\varepsilon_1^2 - \frac{1}{8}\varepsilon_2^2 - \frac{1}{8}\varepsilon_1\varepsilon_2\right].
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ukazuje sa veľmi účelným vykonať v rovniciach (5). ešte ďalšiu úpravu. Zavedieme v nich namiesto ε_1 a ε_2 hodnoty sploštení α_1 a α_2 použitím vzťahov (2).(3). Súčasne namiesto q' definujeme ďalšiu základnú veličinu

$$q = \frac{\omega^2}{2\gamma_0}\left(\sqrt{A} + \sqrt{B}\right), \tag{6}$$

z čoho

$$q' = q\left(1 + \frac{\alpha_1}{2}\right).$$

Pritom je q opäť malá veličina toho istého rádu ako q'. Po vykonaní príslušných výpočtov dospievame k výsledku:

$$\gamma_1 = \gamma_0(1 + \beta'), \quad \gamma_2 = \gamma_0(1 - \beta'), \quad \gamma_3 = \gamma_0(1 + \beta), \tag{7}$$

kde

$$\left.\begin{aligned}
\beta &= \frac{5}{2}q + \frac{1}{2}\alpha_1 - \alpha_2 + \frac{1}{4}\alpha_1^2 - \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2 + \frac{17}{28}\alpha_1 q - \frac{17}{14}\alpha_2 q \\
\beta' &= \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_1^2 - \frac{9}{14}\alpha_1 q.
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Vzťahy (7). a (8). môžeme považovať za riešenie predloženej otázky. Avšak vzorce (8). dajú sa ešte ďalej zjednodušiť zavedením sploštenia α_3 druhého hlavného meridiánového rezu, t. j. poludníkovej elipsy ležiacej v rovine (y, z), namiesto sploštenia rovníkovej elipsy α_1 (α_2 je sploštenie meridiánovej elipsy ležiacej v rovine x, z). V dôsledku definície sploštenia potom je:

$$a(1 - \alpha_2) = b(1 - \alpha_3) = a(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_3) = c,$$

a preto s presnosťou na členy druhého rádu v α_2 a α_3

$$\alpha_1 = 1 - \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_3} = \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 - \alpha_3^2. \tag{9}$$

Po vsadení tohto výrazu do vzťahov 8. vyplýva:

$$\left.\begin{aligned}
\beta &= \frac{5}{2}q - \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3) - \frac{1}{4}(\alpha_2 - \alpha_3)^2 - \frac{17}{28}(\alpha_2 + \alpha_3)q, \\
\beta' &= \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_3) + \frac{1}{4}(\alpha_2^2 - \alpha_3^2) - \frac{19}{14}(\alpha_2 - \alpha_3)q.
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Napokon

$$\frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3) = \alpha \tag{11a}$$

znamená strednú hodnotu oboch hlavných meridiánových sploštení a ich rozdiel je:

$$\alpha_2 - \alpha_3 = \Delta\alpha. \tag{11b}$$

Rovnice (10). možno preto písať v jednoduchom tvare:

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \frac{5}{2}q - \alpha - \frac{17}{14}\alpha q - \frac{1}{4}(\Delta\alpha)^2, \\ \beta' &= \frac{1}{2}\Delta\alpha\left[1 + \alpha - \frac{19}{7}q\right]. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Prvý z týchto vzťahov predstavuje Clairautovu teorému pre trojosý hladinový elipsoid.

Ako je ďalej dobre známe, pri zemskom elipsoide je $\Delta\alpha$ malá veličina druhého rádu. Pre tento elipsoid teda s presnosťou na členy druhého rádu platí:

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \frac{5}{2}q - \alpha - \frac{17}{14}\alpha q, \\ \beta' &= \frac{1}{2}\Delta\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Clairautova teoréma, vyjadrená prvým zo vzťahov (13)., zhoduje sa teda s presnosťou na členy druhého rádu so známym tvarom odvodeným pre rotačný hladinový elipsoid [1], [2]. Špeciálny tvar tejto teorémy pre rotačný elipsoid tu preto platí s tou istou presnosťou aj vo všeobecnejšom prípade trojosého elipsoidu, ak veličiny q a α definujeme vzťahmi (6) a (11a).

6. Celková hmota vo vnútri trojosého hladinového elipsoidu.

Vzhľadom na vzťahy 1.(1), 3.(1) a 3.(2) celkovú hmotu M, uzavretú vo vnútri uvažovaného hladinového elipsoidu, možno vyjadriť vzorcom:

$$\varkappa M = \lim_{R\to\infty} R\,(kI + k_1 I_1 + k_2 I_2),$$

teda v dôsledku vzorcov 3.(3) platí:

$$\varkappa M = 2\,k. \tag{1}$$

Konštantu k sme však vyjadrili rovnicou 5.(4) pomocou $A, \gamma_0, q, \varepsilon_1$ a ε_2. Zavedúc v tejto rovnici namiesto ε_1 a ε_2 opäť sploštenia α_1 a α_2, najprv máme:

$$2k = A\gamma_0\left[1 + \frac{3}{2}q' - \frac{1}{2}\alpha_1 - \alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2 - \frac{12}{7}q'\alpha_1 - \frac{15}{14}q'\alpha_2\right]$$

a ďalej vzhľadom na vzorec 5.(6)

$$2k = A\gamma_0\left[1 + \frac{3}{2}q - \frac{1}{2}\alpha_1 - \alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2 - \frac{27}{28}q\alpha_1 - \frac{15}{14}q\alpha_2\right].$$

Ukazuje sa veľmi účelným vyjadriť tu konštantu A súčinom poloosí elipsoidu ab podľa vzorca

$$A = a^2 = \frac{ab}{1 - \alpha_1} = ab(1 + \alpha_1 + \alpha_1^2),$$

pričom možno písať:

$$2k = ab\gamma_0\left[1 + \frac{3}{2}q + \frac{1}{2}\alpha_1 - \alpha_2 + \frac{1}{4}\alpha_1^2 - \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2 + \frac{15}{28}q\alpha_1 - \frac{15}{14}q\alpha_2\right].$$

V tomto vzorci vyjadríme opäť α_1 pomocou hlavných meridiánových sploštení α_2 a α_3 podľa vzorca 5.(9). Po vykonaní príslušných elementárnych výpočtov dospievame k výsledku:

$$2k = ab\gamma_0\left[1 + \frac{3}{2}q - \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3) - \frac{1}{4}(\alpha_2 - \alpha_3)^2 - \frac{15}{28}(\alpha_2 + \alpha_3)q\right].$$

Ak v tomto vzorci zavedieme strednú hodnotu sploštenia α a rozdiel sploštení hlavných meridiánových rezov $\Delta\alpha$ podľa vzorcov 5.(11a) (11b), vzťah (1). nadobúda tvar:

$$M = \frac{ab\gamma_0}{\varkappa}\left[1 + \frac{3}{2}q - \alpha - \frac{15}{14}\alpha q - \frac{1}{4}(\Delta\alpha)^2\right]. \tag{2}$$

Z príčin, o ktorých sme sa už zmienili, pri zemskom elipsoide môžeme zanedbať v rovnici (2). člen s $(\Delta\alpha)$ a písať:

$$M = \frac{ab\gamma_0}{\varkappa}\left[1 + \frac{3}{2}q - \alpha - \frac{15}{14}\alpha q\right]. \tag{2a}$$

Pravda, pretože presnosť, s akou možno nateraz zisťovať hodnotu gravitačnej konštanty $\varkappa$, zodpovedá približne presnosti na členy prvého rádu v α a q, člen s αq má tu len teoretický význam. Pre praktický výpočet hmoty Zeme možno použiť vzorec:

$$M = \frac{a^2\gamma_0}{\varkappa}\left(1 + \frac{3}{2}q - \alpha\right), \tag{2b}$$

dobre známy z teórie vypracovanej pre rotačnú sféroidovú hladinovú plochu.

7. Vzorce pre normálnu hodnotu tiaže na hladinovom elipsoide.

Smerové kosínusy normály n v ľubovoľnom bode (x, y, z) plochy hladinového elipsoidu sú:

$$\cos(nx) = \frac{x}{A\sqrt{N}}, \quad \cos(ny) = \frac{y}{B\sqrt{N}}, \quad \cos(nz) = \frac{z}{C\sqrt{N}},$$

kde N znamená výraz definovaný rovnicou 1.(4). Šírkový uhol φ (zemepisnú šírku) uvažovaného bodu definujeme obvyklým spôsobom ako uhol, ktorý zviera normála n s rovníkovou rovinou (x, y). Preto je:

$$\cos(nz) = \sin\varphi = \frac{z}{C\sqrt{N}}. \tag{1a}$$

Dĺžkový uhol λ definujeme však na trojosom elipsoide ináč ako na rotačnom. Myslíme si napr. v strede elipsoidu rovnobežku s normálou n. Dĺžkovým uhlom λ (zemepisnou dĺžkou) bodu (x, y, z) nazývame uhol, ktorý zviera rovina preložená touto rovnobežkou a polárnou osou z s rovinou (x, z). Kladným smerom pri meraní tohto uhla nech je smer otáčania kladnej polovic osi x o 90° do kladnej polovice osi y. Teda je:

$$\left.\begin{aligned} \cos(nx) &= \cos\varphi\cos\lambda = \frac{x}{A\sqrt{N}}, \\ \cos(ny) &= \cos\varphi\sin\lambda = \frac{y}{B\,.\sqrt{N}}. \end{aligned}\right\} \tag{1b}$$

Z rovníc (1b) je jasné, že body hladinového elipsoidu, ležiace na jednom a tom istom meridiáne, majú rovnakú dĺžku λ.

Zdvojmocníme rovnice (1a) (b) a píšeme ich takto:

$$\left.\begin{aligned} NA\cos^2\varphi\cos^2\lambda &= \frac{x^2}{A}, \\ NB\cos^2\varphi\sin^2\lambda &= \frac{y^2}{B}, \\ NC\sin^2\varphi &= \frac{z^2}{C}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Vzhľadom na rovnicu elipsoidu dostávame sčítaním týchto troch rovníc

$$N = \frac{1}{A\cos^2\varphi\cos^2\lambda + B\cos^2\varphi\sin^2\lambda + C\sin^2\varphi}. \tag{3}$$

Pre zrýchlenie tiaže v bode (x, y, z) na hladinovom elipsoide odvodili sme už vzorec 4.(7)a). Ak do tohto vzorca vsadíme hodnoty x^2, y^2, z^2, vyjadrené rovnicami (2), dostávame vzťah vyjadrujúci závislosť normálnej hodnoty tiaže γ od šírky φ a dĺžky λ:

$$\gamma = \sqrt{N}\left[\sqrt{A}\,\gamma_1\cos^2\varphi\cos^2\lambda + \sqrt{B}\,\gamma_2\cos^2\varphi\sin^2\lambda + \sqrt{C}\,\gamma_3\sin^2\varphi\right].$$

Vsadíme tu za N z rovnice (3). a zavedieme namiesto A, B, C dĺžky poloosí a, b, c podľa vzorcov $\sqrt{A} = a$ atď. Dostávame takto obdobu Somiglianovho vzorca pre trojosý elipsoid, ktorá má tvar:

$$\gamma = \frac{a\gamma_1\cos^2\varphi\cos^2\lambda + b\gamma_2\cos^2\varphi\sin^2\lambda + c\gamma_3\sin^2\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi\cos^2\lambda + b^2\cos^2\varphi\sin^2\lambda + c^2\sin^2\varphi}}. \tag{4}$$

Pre rotačný elipsoid $(b = a)$ tento vzorec nadobúda známy tvar [1], [2]

$$\gamma = \frac{a\gamma_1\cos^2\varphi + c\gamma_3\sin^2\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + c^2\sin^2\varphi}}. \tag{4a}$$

Kým úvahy a výsledky, ku ktorým sme dospeli v predchádzajúcich kapitolách 5. a 6., platili len pri malých hodnotách sploštení a pomalej rotácii, vzorec (4). platí samozrejme pri ľubovoľných hodnotách α_2, α_3 a ω. Vyjadrime v ňom teraz a a b pomocou c, α_2 a α_3, obmedzujúc sa opäť na veličiny prvého a druhého rádu a kladúc:

$$a = \frac{c}{1 - \alpha_2} = c(1 + \alpha_2 + \alpha_2^2), \qquad b = c(1 + \alpha_3 + \alpha_3^2).$$

Súčasne vyjadrime tiež γ_1, γ_2 a γ_3 pomocou γ_0, β a β' podľa vzorcov 5.(7). Po úprave dostávame:

$$\gamma = \gamma_0\frac{1 + \beta\sin^2\varphi + u_1\cos^2\varphi\cos^2\lambda + u_2\cos^2\varphi\sin^2\lambda}{\sqrt{1 + v_1\cos^2\varphi\cos^2\lambda + v_2\cos^2\varphi\sin^2\lambda}}, \tag{5}$$

kde u_1, u_2, v_1, v_2 sú dané vzorcami:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \alpha_2 + \beta' + \alpha_2^2 + \alpha_2\beta', & v_1 &= 2\alpha_2 + 3\alpha_2^2, \\ u_2 &= \alpha_3 - \beta' + \alpha_3^2 - \alpha_3\beta', & v_2 &= 2\alpha_3 + 3\alpha_3^2. \end{aligned}\right\} \tag{5a}$$

Ak v rovnici 5. vyjadríme $\cos^2\lambda$ a $\sin^2\lambda$ pomocou $\cos 2\lambda$, po ďalšej úprave dostávame:

$$\gamma = \gamma_0\frac{1 + \beta\sin^2\varphi + U_1\cos^2\varphi + U_2\cos^2\varphi\cos 2\lambda}{\sqrt{1 + V_1\cos^2\varphi + V_2\cos^2\varphi\cos 2\lambda}}, \tag{6}$$

kde

$$\left.\begin{aligned}
U_1 &= \frac{1}{2}(u_1 + u_2) = \frac{1}{2}[\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + (\alpha_2 - \alpha_3)\beta'],\\
U_2 &= \frac{1}{2}(u_1 - u_2) = \frac{1}{2}[\alpha_2 - \alpha_3 + 2\beta' + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 + (\alpha_2 + \alpha_3)\beta'],\\
V_1 &= \alpha_2 + \alpha_3 + \frac{3}{2}(\alpha_2^2 + \alpha_3^2),\\
V_2 &= \alpha_2 - \alpha_3 + \frac{3}{2}(\alpha_2^2 - \alpha_3^2).
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Vo vzorcoch (7). môžeme namiesto α_2 a α_3 zaviesť stredné sploštenie α a rozdiel hlavných hodnôt sploštenia $\Delta\alpha$, vychádzajúc z ich definícií (5.11a),(b). Vsadením

$$\alpha_2 = \alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha, \qquad \alpha_3 = \alpha - \frac{1}{2}\Delta\alpha$$

tieto vzorce nadobúdajú tvar:

$$\left.\begin{aligned}
U_1 &= \alpha + \alpha^2 + \frac{1}{4}(\Delta\alpha)^2 + \frac{1}{2}\Delta\alpha\,.\,\beta',\\
U_2 &= \frac{1}{2}\Delta\alpha + \beta' + \alpha\,.\,\Delta\alpha + \alpha\beta',\\
V_1 &= 2\alpha + 3\alpha^2 + \frac{3}{4}(\Delta\alpha)^2,\\
V_2 &= \Delta\alpha\,(1 + 3\alpha).
\end{aligned}\right\} \tag{7a}$$

Keďže U_1, U_2, V_1, V_2 a β sú malé veličiny prvého rádu, reciprokú hodnotu odmocniny vystupujúcej vo vzorci (6). možno vyjadriť binomickým radom. S presnosťou na členy druhého rádu takto po vykonaní príslušných elementárnych výpočtov najprv dostaneme:

$$(1 + V_1\cos^2\varphi + V_2\cos^2\varphi\cos 2\lambda)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}V_1\cos^2\varphi - \frac{1}{2}V_2\cos^2\varphi\cos 2\lambda + $$
$$+ \frac{3}{8}V_1^2\cos^4\varphi + \frac{3}{8}V_2^2\cos^4\varphi\cos^2 2\lambda + \frac{3}{4}V_1V_2\cos^4\varphi\cos 2\lambda$$

a ďalej

$$\left.\begin{aligned}
\gamma = \gamma_0\,[1 + h_1 + (\beta - h_1)\sin^2\varphi - \beta_1\sin^2 2\varphi +\\
+ (h_2 + h_3\cos^2\varphi)\cos 2\lambda + h_4\cos^4\varphi\cos 4\lambda],
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

kde

$$\left.\begin{aligned}
h_1 &= U_1 - \frac{1}{2}V_1 + \frac{3}{8}V_1^2 - \frac{1}{2}U_1V_1 + \frac{3}{16}V_2^2 - \frac{1}{4}U_2V_2 =\\
&= \frac{1}{4}\beta'\,.\,\Delta\alpha - \frac{1}{16}(\Delta\alpha)^2,\\
h_2 &= U_2 - \frac{1}{2}V_2 - \frac{1}{2}\beta V_2 = \beta' - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\,.\,\Delta\alpha + \alpha\beta',\\
h_3 &= \frac{1}{2}\beta V_2 + \frac{3}{4}V_1V_2 - \frac{1}{2}U_1V_2 - \frac{1}{2}U_2V_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\,.\,\Delta\alpha - \alpha\beta',\\
h_4 &= \frac{3}{16}V_2^2 - \frac{1}{4}U_2V_2 = -\frac{1}{4}\beta'\,.\,\Delta\alpha + \frac{1}{16}(\Delta\alpha)^2 = -h_1,\\
\beta_1 &= \frac{1}{8}\beta V_1 + \frac{3}{32}V_1^2 - \frac{1}{8}U_1V_1 + \frac{3}{64}V_2^2 - \frac{1}{16}U_2V_2 =\\
&= \frac{1}{8}\alpha^2 + \frac{1}{4}\alpha\beta + \frac{1}{64}(\Delta\alpha)^2 - \frac{1}{16}\beta'\,.\,\Delta\alpha.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

β a β' sme však vyjadrili už v Clairautovej teoréme pomocou základných veličín α, $\Delta\alpha$ a q. Do vzorcov (9). môžeme preto vsadiť tieto hodnoty zo vzťahov 5.(12) a písať:

$$\left.\begin{aligned}
h_1 &= -h_4 = \frac{1}{16}(\Delta\alpha)^2,\\
h_2 &= \frac{1}{2}\Delta\alpha\left(1 + 2\alpha - \frac{73}{14}q\right),\\
h_3 &= \frac{1}{2}\Delta\alpha\left(\frac{5}{2}q - \alpha\right) = \frac{1}{2}\beta\,.\,\Delta\alpha\\
\beta_1 &= \frac{5}{8}\alpha q - \frac{1}{8}\alpha^2 - \frac{1}{64}(\Delta\alpha)^2.
\end{aligned}\right\} \tag{9a}$$

Pri zemskom elipsoide je, ako sme už opätovne podotkli, $\Delta\alpha$ malá veličina druhého rádu. Preto, ak sa obmedzíme naďalej na presnosť zodpovedajúcu členom druhého rádu, vzorce (9a) sa zjednodušujú takto:

$$h_1 = h_3 = h_4 = 0, \qquad h_2 = \frac{1}{2}\Delta\alpha = \beta', \qquad \beta_1 = \frac{5}{8}\alpha q - \frac{1}{8}\alpha^2. \tag{9b}$$

Závislosť normálnej hodnoty tiaže od zemepisných súradníc φ a λ nadobúda v tomto prípade známy tvar:

$$\gamma = \gamma_0\,[1 + \beta\sin^2\varphi - \beta_1\sin^2 2\varphi + \beta'\cos^2\varphi\cos 2\lambda]. \tag{10}$$

Došlo 10. X. 1954.

Katedra baníckeho meračstva a geofyziky
VŠT, Košice

LITERATÚRA

1. Michailov, Kurs gravimetrii i teorii figury zemli 2 vyd. Moskva 1939, kap. 4—6. 2. Subbotin: Kurs nebesnoj mechaniki, Moskva 1949, III. sv., § 88—95. 3. Haalck: Das physikalische Bildungsgesetz der Erde. (Theorie der normalen Erdgestalt.) Veröffentlichungen des Geodätischen Institutes in Potsdam, 4,1950. 4. C. Baeschlin: Lehrbuch der Geodäsie, § 76—81, Zürich 1948.

К МЕТОДИКЕ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ СТОКСА ДЛЯ ТРЁХОСНОГО ЭЛЛИПСОИДА

Т. КОЛБЕНГЕЙЕР

Выводы

Проблема Стокса трёхосного эллипсоида для решейя с помощью трёх гармонических функций I, I_1, I_2, определяемых соотношениями 1.6, 1.7, и 1,10. Потенциал тяжести выражается как сумма потенциала центробежной силы и удобно выбранной линейной комбинации приведенных трёх функций. Из полученных основных соотношений выведены главные значения величины ускорения тяжести на уровенном эллипсоиде и выведена теорема Клэро с точностью до членов второго порядка. Формула Сомиляна обобщена для случая трёхосного эллипсоида и из её общего вида выведены соотношения для нормального значения величины тяжести. Эти соотношения точны вплоть до членов второго порядка.

BEITRAG ZUR LÖSUNG DES STOKESSCHEN PROBLEMS FÜR EIN DREIACHSIGES NIVEAUELLIPSOID

T. KOLBENHEYER

Zusammenfassung

Das Stokessche Problem wird für den allgemeinen Fall eines dreiachsigen Niveauellipsoides mittels der in 1.6, 1.7 und 1.10 näher definierten harmonischen Funktionen I, I_1 und I_2 gelöst. Das Schwerepotential wird dabei als Summe des Potentials der Fliehkraft und einer zweckmäßig gewählten linearen Kombination der obenerwähnten drei Funktionen dargestellt. Auf Grund der abgeleiteten Beziehungen werden die Hauptwerte der Schwerkraft auf dem Niveauellipsoid und das Clairautsche Theorem bis auf Glieder zweiter Ordnung ausgedrückt. Die Formel von Somigliana wird für den Fall des dreiachsigen Ellipsoides verallgemeinert und schließlich wird die übliche Formel für die Normalschwere abgeleitet.