K VZŤAHOM „MEDZI" VO SVÄZOCH

MILAN KOLIBIAR, Bratislava

V práci [1][1] zaviedol M. S. Geľfand vzťah „*medzi*" vo sväze takto: Prvok x sväzu S je medzi prvkami $a, b \in S$, ak $(a \cap x) \cup (b \cap x) = x = (a \cup x) \cap (b \cup x)$ a dokázal vetu (uvádzame ju v inej formulácii):

(G) *V modulárnom sväze množina $G(a, b)$ prvkov x, ktoré sú medzi prvkami a, b, tvorí podsväz s najmenším prvkom $a \cap b$ a s najväčším prvkom $a \cup b$.*

Tento podsväz budeme označovať tiež znakom $G(a, b)$. Zrejme $a, b \in G(a, b)$.

V nasledujúcich poznámkach budeme uvažovať ešte o vzťahu „medzi", definovanom takto: Prvok x sväzu S je medzi prvkami $a, b \in S$ vtedy a len vtedy, keď x leží v intervale $< a \cap b, a \cup b >$, t. j. platí $a \cap b \leqq x \leqq a \cup b$. Množinu prvkov $x \in S$, ktoré ležia medzi prvkami a, b v tomto druhom zmysle, označíme $M(a, b)$.

V ďalšom poukážeme na niektoré súvislosti Geľfandovho vzťahu „medzi" (nazveme ho prvým vzťahom „medzi") s práve definovaným vzťahom „medzi" (nazveme ho druhým vzťahom „medzi") a s niektorými vlastnosťami dvojíc sväzov definovaných na tej istej množine M (prvé dve vlastnosti boli zavedené v práci [2]), a to (S_1, S_2 značia sväzy definované na množine M):

B. Ak množina X tvorí konvexný podsväz v S_1, tvorí aj konvexný podsväz v S_2 a obrátene.

D. Existujú sväzy A, B (definované na množinách M_1, M_2) a prosté zobrazenie φ množiny M na kartézsky súčin $M_1 \times M_2$, také, že φ je izomorfné zobrazenie sväzu S_1 na kardinálny súčin $A \times B$ sväzov A, B a súčasne izomorfné zobrazenie sväzu S_2 na sväz $\tilde{A} \times B$ ($\tilde{A}$ je sväz duálny k sväzu A).[2]

G. Ak x je medzi prvkami a, b v prvom zmysle v S_1, je medzi tými prvkami v prvom zmysle aj v S_2 a obrátene.

H. Ak prvok x je medzi prvkami a, b v druhom zmysle v S_1, je medzi tými prvkami v druhom zmysle aj v S_2 a obrátene.

V práci [2] bolo dokázané, že v prípade, keď sväzy S_1, S_2 sú distributívne, vlastnosti B, D sú ekvivalentné. V odseku 3 ukážeme, že tieto vlastnosti sú ekvivalentné pre ľubovoľné sväzy S_1, S_2 a že sú súčasne ekvivalentné s vlastnosťami G, H.

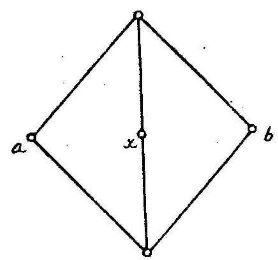
[1] Práca mi bola neprístupná a poznám ju len z referátu v časopise Referativnyj žurnal, Matematika, 1954, реф. № 4762.

[2] V práci [2] na str. 1 je vlastnosť D formulovaná chybne. (Pozri pozn. [6] pod čiarou).

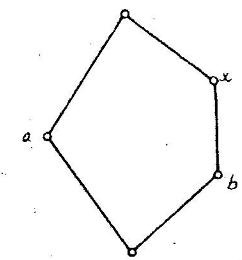
1. V celom tomto odseku S značí sväz, a, b jeho prvky. Množina $G(a, b)$ je zrejme časťou intervalu $< a \cap b, a \cup b >$, t. j. množiny $M(a, b)$.

1.1. *Nevyhnutná a postačujúca podmienka, aby pre každé dva prvky $a, b \in S$ platilo $G(a, b) = M(a, b)$, je, aby sväz S bol distributívny.*

Dôkaz. Ak S je distributívny sväz, pre každý prvok $x \in < a \cap b, a \cup b >$ zrejme platí $x \in G(a, b)$. Nech obrátene pre ľubovoľné prvky $a, b \in S$ a ľubovoľný



Obr. 1a.



Obr. 1b.

prvok $x \in M(a, b)$ platí $x \in G(a, b)$. Keby sväz S nebol distributívny, obsahoval by niektorý z podsväzov na obr. 1a, 1b. Pre prvok x by potom platilo $x \in M(a,b)$ avšak neplatilo by $x \in G(a, b)$.

Poznámka. Ľahko sa vidí, že ak a je neutrálny prvok v ľubovoľnom sväze S, pre každé $b \in S$ platí $G(a, b) = M(a, b)$.

1.2. *Nech $a, b \in S$; označme $A = < a \cap b, a >$, $B = < a \cap b, b >$. Nevyhnutná a postačujúca podmienka, aby $G(a,b) = M(a, b)$, je, aby interval $< a \cap b, a \cup b >$ bol izomorfný s kardinálnym súčinom $A \times B$, pričom prvku a zodpovedá prvok $(a, a \cap b) \in A \times B$, prvku b prvok $(a \cap b, b)$.*

Dôkaz a). Nech $G(a, b) = M(a, b)$. Uvažujme o zobrazení φ, ktoré každému prvku $u \in < a \cap b, a \cup b >$ priraďuje prvok $(a \cap u, b \cap u) \in A \times B$. Pretože $(a \cap u) \cup (b \cap u) = u$, zobrazenie φ je prosté. Prvkom a, b zodpovedajú prvky (v tomto poradí) $(a, a \cap b)$, $(a \cap b, b)$.

Ak $x \in A$, $y \in B$, obrazom prvku $x \cup y$ v zobrazení φ je (x, y). Platí totiž $x \cup y \in G(a, b)$, t. j. $x \cup y = (a \cup x \cup y) \cap (b \cup x \cup y) = (a \cup y) \cap (b \cup x)$, teda $a \cap (x \cup y) = a \cap (a \cup y) \cap (b \cup x) = a \cap (b \cup x) = (a \cup x) \cap (b \cup x) = x$ a podobne $b \cap (x \cup y) = y$. Z toho vyplýva, že φ je zobrazenie množiny $<a \cap b, a \cup b>$ na množinu $A \times B$.

Nech u, u' sú prvky intervalu $<a \cap b, a \cup b>$ a (x, y), (x', y') ich obrazy v zobrazení φ. Z konštrukcie zobrazenia φ vidieť, že $u \leqq u'$ vtedy a len vtedy, keď $(x, y) \leqq (x', y')$. Zobrazenie φ je teda izomorfné.

b) Nech interval $< a \cap b, a \cup b >$ je izomorfný s kardinálnym súčinom $A \times B$, pričom prvkom a, b zodpovedajú prvky (v tomto poradí) $\bar{a} = (a, a \cap b)$, $\bar{b} = (a \cap b, b)$. Stačí dokázať, že pre ľubovoľný prvok $\bar{x} = (x, y) \in A \times B$ platí (vo sväze $A \times B$) $(\bar{a} \cup \bar{x}) \cap (\bar{b} \cup \bar{x}) = \bar{x} = (\bar{a} \cap \bar{x}) \cup (\bar{b} \cap \bar{x})$. Je však $(\bar{a} \cup \bar{x}) \cap \cap (\bar{b} \cup \bar{x}) = ((a \cup x) \cap [(a \cap b) \cup x], [(a \cap b) \cup y] \cap (b \cup y)) = ((a \cup x) \cap x, y \cap \cap (b \cup y)) = (x, y) = \bar{x}$ a podobne $(\bar{a} \cap \bar{x}) \cup (\bar{b} \cap \bar{x}) = \bar{b}$.

Poznámka 1. V časti b) sme vlastne dokázali tvrdenie: Nech sväz S s najväčším a najmenším prvkom je izomorfný s kardinálnym súčinom sväzov A, B. Nech O, I (O', I') sú najmenší a najväčší prvok sväzu A (B). Nech v uvažovanom izomorfizme prvku (I, O') $\in A \times B$ zodpovedá prvok $a \in S$, prvku (O, I') prvok b. Potom $G(a, b) = S$.

Poznámka 2. Ľahko sa dokáže správnosť tvrdenia: Ak S je kardinálnym súčinom sväzov $A, B, S = A \times B$, je prvok $(u, v) \in S$ medzi prvkami (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in S$ (v prvom zmysle) vtedy a len vtedy, keď vo sväze A je prvok u medzi prvkami x_1, x_2 a vo sväze B je prvok v medzi prvkami y_1, y_2.

Poznámka 3. Ak $a \leqq b$, vyplýva z 1.2, že $G(a, b) = < a, b >$; to vyplýva aj priamo z definície množiny $G(a, b)$.

1.3.1. *Ak intervaly* $< a \cap b, b >, < a, a \cup b >$ *sú obsažené v* $G(a, b)$, *potom zobrazenia* $x \to a \cup x$ $(x \in < a \cap b, b >)$ *a* $y \to b \cap y$ $(y \in < a, a \cup b >)$ *sú inverznými izomorfizmami medzi intervalmi* $< a \cap b, b >, < a, a \cup b >$.

Dôkaz 1. Uvažujme o zobrazení φ, ktoré každému prvku $x \in < a \cap b, b >$ priraďuje prvok $a \cup x \in < a, a \cup b >$. Pre $x \in < a \cap b, b >$ platí $x \in G(a, b)$, t. j. $x = (a \cup x) \cap (b \cup x) = (a \cup x) \cap b$. Z toho vyplýva, že zobrazenie φ je prosté, lebo ak $a \cup x, a \cup x'$ sú obrazy prvkov x, x', vyplýva z rovnosti $a \cup x = a \cup x'$ rovnosť $x = (a \cup x) \cap b = (a \cup x') \cap b = x'$. Ak $y \in < a, a \cup b >$, pre prvok $x = b \cap y$ platí $a \cup x = a \cup (b \cap y) = (a \cap y) \cup (b \cap y) = y.\varphi$ je teda zobrazenie množiny $< a \cap b, b >$ na množinu $< a, a \cup b >$, v ktorom vzor prvku y je prvok $b \cap y$.

Ak pre prvky $x, x' \in < a \cap b, b >$ platí $x \leqq x'$, je $\varphi(x) = a \cup x \leqq a \cup x' = \varphi(x')$. Obrátene, ak $\varphi(x) \leqq \varphi(x')$, t. j. $a \cup x \leqq a \cup x'$, je $x = (a \cup x) \cap b \leqq (a \cup x') \cap b = x'$. Zobrazenie φ je teda izomorfné.

2. Zobrazenie, ktoré každému prvku $y \in < a, a \cup b >$ priraďuje prvok $b \cap y$, je podľa 1. časti dôkazu inverzné k zobrazeniu φ a je zrejme izomorfné.

1.3.2. *V modulárnom sväze sú intervaly* $< a \cap b, a >, < a \cap b, b >, < a, a \cup b >, < b, a \cup b >$ *obsažené v množine* $G(a, b)$.

Dôkaz je ľahký.

Poznámka. Z 1.3.1 a 1.3.2 vyplýva veta ([3], kap. V, veta 6): Nech a, b sú prvky modulárneho sväzu. Potom zobrazenia $x \to a \cup x$ a $y \to b \cap y$ sú inverznými izomorfizmami medzi intervalmi $< a \cap b, b >, < a, a \cup b >$.

1.4. *V modulárnom sväze* S *je podsväz* $G(a,b)$ *izomorfný s kardinálnym súčinom* $A \times B$, *kde* $A = < a \cap b, a >$, $B = < a \cap b, b >$. *V tomto izomorfizme zodpovedá prvku* a *prvok* $(a, a \cap b) \in A \times B$, *prvku* b *prvok* $(a \cap b, b)$.

Dôkaz. Podľa vety (G) je $G(a,b)$ podsväz sväzu S. Podľa 1.3.2 sú intervaly A, B obsažené v $G(a, b)$. Uvažujme o zobrazení φ, ktoré každému prvku $u \in G(a,b)$

priraďuje prvok $(a \cap u, b \cap u) \in A \times B$. Další postup je rovnaký ako v časti a) dôkazu tvrdenia 1.2.

Poznámka. Nech sväz S je distributívny. Nech a je prvok, ktorý má komplement a'. Označme $A = < 0, a >, A' = < 0, a' >$. Podľa 1.1 je $G(a, a') = S$, podľa 1.4 je teda $S \simeq A \times A'$.

1.5. Nech S je sväz s najmenším a najväčším prvkom. Nech C je podmnožina sväzu S, definovaná takto: $a \in C$ vtedy a len vtedy, keď existuje prvok $b \in S$ taký, že platí $G(a, b) = S$.

1.5.1. *C je centrum sväzu S.*

Dôkaz a). Nech $a \in C$. Potom pre určitý prvok $b \in S$ platí $G(a, b) = S$. Pretože $G(a, b) \subset < a \cap b, a \cup b >$, je $S = < a \cap b, a \cup b >$ a prvky a, b sú navzájom komplementárne. Podľa 1.2 je $S \simeq A \times B$, kde $A = < 0, a >$, $B = < 0, b >$ a v tomto izomorfizme zodpovedajú prvkom a, b prvky (v tomto poradí) $(a, 0), (0, b)$. Odtiaľ vyplýva, že a (a tiež b) je prvok centra (pozri [3], kap. II, § 9).

b) Nech a je prvok centra. Potom prvok a má (jediný) komplement b a existuje rozklad sväzu S na kardinálny súčin $S = X \times Y$, pričom $a = (I, 0)$ ([3], kap. II, § 9). Zrejme potom $b = (0, \mathrm{I}')$ (0, I (0', I') sú najmenší a najväčší prvok sväzu X (Y)). Podľa poznámky 1 v 1.2 je $G(a, b) = S$, teda $a \in C$.

Dôsledok 1. *Ak* $a \in C$, *má prvok* a *jediný komplement, a to prvok* b, *pre ktorý platí* $G(a, b) = S$.

Dôsledok 2. Ak $a \in C$, zobrazenia $x \to x \cap a, x \to x \cup a$ *sú endomorfizmami sväzu S.*

Dôkaz. Pretože a je prvok centra, je neutrálnym prvkom a tvrdenie vyplýva z lemmy § 10. kap. II knihy [3].

Poznámka 1. Z dôsledku 2 vyplýva: Ak a, b sú ľubovoľné prvky modulárneho sväzu, sú zobrazenia $x \to x \cap a, x \to x \cup a$ endomorfizmami na podsväze $G(a, b)$ $(x \in G(a, b))$.

Poznámka 2. Zrejme C je Booleova algebra. Platí teda $C = S$ vtedy a len vtedy, keď S je Booleova algebra.

1.6. *Ak* $G(a,b)$ *je podsväz sväzu* S *a pre prvky* $a, b, c, d \in S$ *platí* $G(a,b) = G(c, d)$, *potom* $G(a \cap c, b \cup d) = G(a \cup c, b \cap d) = G(a, b)$. *Špeciálne, ak* a, b, c, d *sú prvky centra sväzu S a dvojice prvkov* a, b *a* c, d *sú navzájom komplementárne, sú aj dvojice* $a \cap c, b \cup d$ *a* $a \cup c, b \cap d$ *navzájom komplementárne.*

Dôkaz. Označme C' centrum podsväzu $G(a, b)$. C' je podsväzom v $G(a, b)$ a je to Booleova algebra. Podľa 1.5.1 $a, b, c, d \in C'$. Prvky $a \cap c, b \cup d$ $(a \cup c, b \cap d)$ patria do C' a sú navzájom komplementárne, pretože dvojice $a, b; c, d$ sú v C' komplementárne. Z toho vyplýva vzhľadom na 1.5.1 dané tvrdenie.

2. Teraz si všimneme, ako navzájom súvisia oba vzťahy „medzi“ zavedené v úvode. Všade S značí sväz, a, b jeho prvky.

2.1 *Pre ľubovoľný prvok $x \in S$ platí:*
$M(a,x) \cap M(b, x) = < (a \cap x) \cup (b \cap x), (a \cup x) \cap (b \cup x) >$.[3]
Dôkaz. $u \in M(a, x) \cap M(b, x) \Leftrightarrow a \cap x \leqq u \leqq a \cup x, b \cap x \leqq u \leqq b \cup x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a \cap x) \cup (b \cap x) \leqq u \leqq (a \cup x) \cap (b \cup x) \Leftrightarrow u \in < (a \cap x) \cup (b \cap x),$
$(a \cup x) \cap (b \cup x)>$.

2.2. Prvý vzťah „medzi" možno definovať pomocou druhého vzťahu, „medzi" takto:
$x \in G(a, b)$ vtedy a len vtedy, keď $M(a, x) \cap M(b, x) = \{x\}$.[4]
Tvrdenie vyplýva z 2.1.

2.3 *Nech A je podmnožina sväzu S. Množina A tvorí konvexný podsväz sväzu S vtedy a len vtedy, keď pre každé $a, b \in A$ je $G(a, b) \subset A$.*

Dôkaz. Ak A je konvexný podsväz sväzu S, pre $a, b \in A$ zrejme platí $G(a,b) \subset A$. Nech obrátene $a, b \in A \Rightarrow G(a, b) \subset A$. Pretože $a \cup b, a \cap b \in G(a,b)$, je A podsväz. Ak $a \leqq b$, je $G(a, b) = < a,b >$, teda A je konvexný podsväz.

2.4. Druhý vzťah „medzi" možno definovať pomocou prvého vzťahu „medzi": $M(a,b)$ je najmenší konvexný podsväz sväzu S, obsahujúci prvky a, b. Podľa 2.3 konvexný podsväz možno definovať pomocou prvého vzťahu „medzi".

Poznámka. Podľa 1.1 sú oba vzťahy „medzi" totožné vtedy a len vtedy, keď sväz S je distributívny.

3. V celom tomto odseku S_1, S_2 značia sväzy definované na tej istej množine. Sväzové operácie v S_1 (S_2) budeme označovať $\cup, \cap$ ($\vee, \wedge$), inklúziu $\sqsubseteq$ ($\leqq$).

3.1. *Vlastnosti G, H sú ekvivalentné.*

Dôkaz. Tvrdenie vyplýva z 2.2 a 2.4.

3.2. *Vlastnosti B, G sú ekvivalentné.*

Dôkaz. Implikácia $G \Rightarrow B$ vyplýva z 2.3. Implikácia $B \Rightarrow G$ vyplýva z 2.2, pretože $M(u, v)$ je najmenší konvexný podsväz, obsahujúci prvky u, v.

3.3. *Vlastnosť D implikuje vlastnosť G.*

Dôkaz. Označme $A \times B = S_1'$, $A \times B = S_2'$. Dvojica sväzov $A, \tilde{A}$ má zrejme vlastnosť G. Nech vo sväze S_1' je prvok $x = (x_1, x_2)$ medzi prvkami $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ v prvom zmysle. Podľa poznámky 2 v 1.2 je vo sväze B prvok x_2 medzi prvkami a_2, b_2, vo sväze A a teda aj vo sväze $\tilde{A}$ prvok x_1 medzi prvkami a_1, b_1. Podľa tej istej poznámky je vo sväze S_2' prvok x medzi prvkami a, b.

3.4. *Vlastnosť D implikuje vlastnosť B.*

Dôkaz. Trvanie vyplýva z 3.3 a 3.2.

Poznámka. Ľahko sa ukáže na jednoduchom príklade (za A možno zvoliť napr. sväz na obr. 1a, za B sväz o dvoch prvkoch), že ak dvojica sväzov S_1, S_2

[3] $\cap$ je označenie pre prenik množín.
[4] $\{x\}$ značí množinu s jediným prvkom x.

má vlastnosť D a množina X tvorí podsväz v S_1, nemusí tvoriť podsväz v S_2.

3.5. V celom odseku 3.5 predpokladáme, že dvojica sväzov S_1, S_2 má vlastnosť B. Dokážeme, že potom *táto dvojica má vlastnosť D.*

V práci [2] bola dokázaná veta:

(J) *Ak sväzy S_1, S_2 (definované na tej istej množine) sú distributívne a každý vytvorujúci rozklad*[5] *na jednom z nich je vytvorujúcim rozkladom aj na druhom sväze), potom dvojica S_1, S_2 má vlastnosť D.*[6]

Dôkaz implikácie $B \Rightarrow D$ (nepredpokladáme pritom, že sväzy S_1, S_2 sú distributívne) možno urobiť tým istým postupom, ako dôkaz vety (J) v práci [2]. Tento dôkaz sa opiera o niekoľko pomocných viet, ktoré tu uvedieme. Dôkazy z práce [2] nebudeme opakovať, uvedieme len tie časti postupu, v ktorých treba urobiť zmeny vzhľadom na náš predpoklad (vlastnosť B).

3.5.1a. *Pre každé dva prvky $x_1, x_2 \in S_1$ platí:*
$(x_1 \cap x_2) \vee (x_1 \cup x_2) = x_1 \vee x_2$,
$(x_1 \cap x_2) \wedge (x_1 \cup x_2) = x_1 \wedge x_2$, $(x_1 \wedge x_2) \cup (x_1 \vee x_2) = x_1 \cup x_2$.
$(x_1 \wedge x_2) \cap (x_1 \vee x_2) = x_1 \cap x_2$,

Dôkaz. Ako bolo ukázané v práci [2] (ods. 3.2), platí:
$(x_1 \cap x_2) \wedge (x_1 \cup x_2) \leqq x_1 \wedge x_2, x_1 \wedge x_2 \leqq x_1 \cap x_2, x_1 \wedge x_2 \leqq x_1 \cup x_2$.
Z toho vyplýva prvá rovnosť. Ostatné tri sa dokážu podobne.

3.5.1b. Pre prvky $a, b, c \in S_1$ platí ([2], ods. 3.3 a 3.2)
$a \sqsubseteq b \Rightarrow a \wedge c \sqsubseteq b \wedge c, a \vee c \sqsubseteq b \vee c,$
$a \leqq b \Rightarrow a \cap c \leqq b \cap c, a \cup c \leqq b \cup c,$
$a \leqq c \leqq b \Rightarrow a \cap b \sqsubseteq c \sqsubseteq a \cup b,$
$a \sqsubseteq c \sqsubseteq b \Rightarrow a \wedge b \leqq c \leqq a \vee b$
(posledné dve implikácie vyplývajú bezprostredne z vlastnosti B).

3.5.2. [6.2.1][7] *Nech $a \sqsubseteq b$, $a \wedge b = u$, $a \vee b = v$. Potom $u \cap v = a$, $u \cup v = b$.*

Dôkaz. Tvrdenie vyplýva bezprostredne z 3.5.1a.

3.5.3. [6.2.2] *Ak $a \sqsubseteq b$, $a \leqq b$, platí $< a, b > (S_1) = < a, b > (S_2)$*[8] (táto rovnosť platí nielen čo sa týka množín, ale aj čiastočného usporiadania).

Dôkaz. Rovnosť v zmysle množinovom vyplýva priamo z vlastnosti B. Ďalší postup je rovnaký ako v [6.2.2] (časť b).

3.5.4. [6.2.3] *Nech $a \sqsubseteq b$, $b \leqq a$. Ak označíme $< a, b > (S_1) = A$, $< b, a > (S_2) = B$, platí $A = \tilde{B}$.*

[5] Vytvorujúcim rozkladom nazývame rozklad definovaný kongruenciou.
[6] Vo formulácii tejto vety v práci [2] (6.2.15) je chyba. (Pozri formuláciu vlastnosti D v úvode.)
[7] Tu a v ďalšom sú v hranatej zátvorke uvedené čísla príslušných viet v práci [2].
[8] Znak $< a, b > (S_1)$ ($< a, b > (S_2)$) značí interval v S_1 (S_2). Obdobný význam majú iné podobné označenia.

3.5.5. [6.2.4] *Nech* $a \subseteq b$, $< a, b > (S_1) = A$, $a \wedge b = u$, $a \vee b = v$, $< u, v >$
$(S_2) = B$. *Označme* $< a, u > (S_1) = U$, $< a, v > (S_1) = V$.
Potom $A \simeq U \times V$, $B \simeq \tilde{U} \times V$.
Dôkaz. Podľa 3.5.2 $u \cup v = b$, $u \cap v = a$, teda $u, v \in < a, b > (S_1)$. Vzhľa-
dom na vlastnosť B tvorí množina $|< a, b > (S_1)|$[9] konvexný podsväz v S_2,
teda $|< u, v > (S_2)| \subset |< a, b > (S_1)|$. Podobne sa ukáže $|< a, b > (S_1)| \cup$
$|< u, v > (S_2)|$. Platí teda $|A| = |B|$.
Platí $a \subseteq u$, $u \leqq a$, $u \subseteq b$, $u \leqq b$. Označme $< u, a > (S_2) = U_1$, $< u, b >$
$(S_2) = V_1$. Podľa 3.5.4 je $U_1 = \tilde{U}$, podľa 3.5.3 je $V_1 = < u, b > (S_1)$.
Podľa poznámky 3 v odst. 1.2 je $|B| = |G(u, v)(S_2)|$. Podľa 3.2 má dvojica
S_1, S_2 vlastnosť G. Teda $|G(u, v)(S_2)| = |G(u, v)(S_1)|$, t. j. platí $|G(u, v)(S_1)| =$
$= |A| = M(u, v)(S_1)$. Podľa 1.2 je $A \simeq U \times V$ (i_2).
Pretože intervaly $< a, v > (S_1) = < u \cap v, v > (S_1)$ a $< u, b > (S_1) =$
$= < u, u \cup v > (S_1)$ sú obsažené v množine $|A| = |G(u, v)(S_1)|$, je podľa 1.3.1
$< u, b > (S_1) \simeq < a, v > (S_1) = V$, teda platí (vzhľadom na S_1) $V_1 \simeq V$ (i_1).
Podobne $|A| = |G(a, b)(S_1)| = |G(a, b)(S_2)|$; pretože $|A| = |B| =$
$= M(a, b)(S_2)$, platí $|G(a, b)(S_2), I = M(a, b)(S_2)$. Podľa 1.2 platí (vzhľadom
na S_2) $B \simeq U_1 \times V_1$ (i_3) a teda vzhľadom na izomorfizmus (i_1) $B \simeq \tilde{U} \times V$ (i_4).
Poznámka. [Poznámka 1.] *Pre izomorfizmy* (i_2), (i_4) *platí: ak* $z \to (x, y)$
(i_2), *potom* $z \to (x, y)$ (i_4).
Dôkaz a). Nech $z \to (x, y)$ (i_2). Potom $z = x \cup y$. Ak $z \to (x_1, y_1)$ (i_3), je
$x_1 = a \wedge z$, $y_1 = b \wedge z$. Pretože $a = x \cap y$ a $x \in < u, a > (S_2)$, $y \in < a, v >$
$(S_1) = < a, v > (S_2)$, teda $x \leqq a \leqq y$, podľa 3.5.1a dostávame $x_1 = (x \cap y) \wedge$
$\wedge (x \cup y) = x \wedge y = x$.
b) Ďalej platí $y \cup u = y \wedge b$. Oba prvky $y \cup u$, $y \wedge b$ majú totiž v izo-
morfnom zobrazení $V_1 \to V$ (i_1) ten istý obraz y. (Obraz prvku $y' \in V_1$ je $y' \cap v$.)
Platí totiž $(y \cup u) \cap v = (y \cup u) \cap (y \cup v) = y$ [pretože $y \in G(u, v)(S_1)$],
$(y \wedge b) \cap v = (y \wedge b) \cap (y \vee b) = y \cap b = y$ (podľa 3.5.1a).
c) Pretože $z = x \cup y \supseteq y$, podľa 3.5.1b je $y_1 = b \wedge z \supseteq b \wedge y$. Ďalej je
$u \leqq b \wedge z \leqq z$, teda podľa 3.5.1b $b \wedge z \subseteq u \cup z = u \cup x \cup y = u \cup y$. Zo
vzťahov $b \wedge y \subseteq y_1 \subseteq u \cup y$, $u \cup y = b \wedge y$ vyplýva $y_1 = u \cup y$. Podľa
b) zodpovedá v izomorfizme (i_1) prvku $y_1 = y \cup u \in V_1$ prvok $y \in V$.
d) Z a) a c) vyplýva, že v izomorfizme (i_4) prvku z zodpovedá prvok (x, y).

3.5.6. *Nech* $c \in S_1$. *Označme* X_c *množinu všetkých prvkov* $x \in S_1$, *pre ktoré*
$c \cap x = c \vee x$, $c \cup x = c \wedge x$. *Pre ľubovoľné prvky* x_1, x_2 *množiny* X_c *platí:*
$c \cup (x_1 \cup x_2) = c \wedge (x_1 \cup x_2)$, $c \cap (x_1 \cap x_2) = c \vee (x_1 \cap x_2)$.
Poznámka. Pretože $c \in X_c$, je množina X_c neprázdna.
Dôkaz. $c \cup (x_1 \cup x_2) = (c \cup x_1) \cup (c \cup x_2) = (c \wedge x_1) \cup (c \wedge x_2) \subseteq c \wedge$
$(x_1 \cup x_2)$ (posledný vzťah vyplýva zo vzťahov $x_1 \subseteq x_1 \cup x_2$, $x_2 \subseteq x_1 \cup x_2$

[9] Ak S je sväz, budeme znakom $|S|$ označovať množinu prvkov sväzu S.

a 3.5.1b). Podľa 3.5.1a je $c \wedge (x_1 \cup x_2) \subseteq c \cup (x_1 \cup x_2)$, teda $c \cup (x_1 \cup x_2) =$
$= c \wedge (x_1 \cup x_2)$. Podobne sa dokáže druhá rovnosť.

3.5.7. [6.2.6] *Ak* $x_1, x_2 \in X_c$, *platí* $x_1 \cap x_2 = x_1 \vee x_2$, $x_1 \cup x_2 = x_1 \wedge x_2$.

Dôkaz (rovnaký ako v [2]). Označme $x_1 \cap x_2 \cap c = a$, $x_1 \cup x_2 \cup c = b$.
x_1, x_2, c sú prvky sväzu $A = < a, b > (S_1)$. Platí $a \subseteq b$ a súčasne podľa 3.5.6
$a = (x_1 \cap x_2) \cap c = (x_1 \cap x_2) \vee c \geqq c \geqq (x_1 \cup x_2) \wedge c = (x_1 \cup x_2) \cup c = b$,
teda $a \geqq b$. Podľa 3.5.4 $< b, a > (S_2) = \tilde{A}$, čím je tvrdenie dokázané.

Poznámka. (Používame označenia ako v 3.5.7.) Pretože $c \in A$, vyplýva
z duálnosti intervalov A, $< b, a > (S_2)$, že $A \subset X_c$. Pretože $x_1 \cup x_2 \in A$,
$x_1 \cap x_2 \in A$, sú $x_1 \cup x_2$, $x_1 \cap x_2$ prvkami množiny X_c, platí:

3.5.8. [6.2.5] *Množina* X_c *tvorí podsväz vo sväze* S_1 *aj vo sväze* S_2.

3.5.9. [6.2.7] *Množina* X_c *tvorí konvexný podsväz vo sväze* S_1 *aj vo sväze* S_2.

Dôkaz ako v [2].

3.5.10. [6.2.8] *Nech* Y_c *je množina všetkých prvkov* $x \in S_1$, *pre ktoré platí*
$c \cap x = c \wedge x$, $c \cup x = c \vee x$. *Množina* Y_c *tvorí konvexný podsväz v* S_1 *aj v* S_2.

Poznámka. Množiny X_c, Y_c budeme v ďalšom uvažovať ako podsväzy
sväzu S_1. Vo sväze S_2 množina $|X_c|$ tvorí podsväz duálny k sväzu X_c, mno-
žina $|Y_c|$ sväz rovnaký ako Y_c.

3.5.11. [6.2.13] *Nech* c *je ľubovoľný prvok sväzu* S_1. *Uvažujme kardinálny
súčin* $D = X_c \times Y_c$. *Existuje prosté zobrazenie* φ *množiny* $|S_1|$ *na množinu* $|D|$.

Dôkaz ako v [2]. V zobrazení φ prvku $z \in S_1$ zodpovedá prvok $(x, y) \in D$,
ktorého zložka x je spoločným prvkom množín Y_c a X_c, zložka y je spoločným
prvkom množín X_c a Y_c.

3.5.12. [6.2.14] *Zobrazenie* φ *v 3.5.11 je izomorfné zobrazenie sväzu* S_1 *na
sväz* D.

3.5.13. *Zobrazenie* φ *v 3.5.11 je izomorfné zobrazenie sväzu* S_2 *na sväz* $\tilde{X}_c \times Y_c$.

Dôkaz. Tvrdenie vyplýva z 3.5.12 a z poznámky za 3.5.10.

3.5.14. *Nech dvojica sväzov* S_1, S_2 *má vlastnosť* B. *Potom má táto dvojica vlast-
nosť* D.

Dôkaz. Tvrdenie vyplýva z 3.5.12 a 3.5.13.

Z 3.4 a 3.5.14 vyplýva, že vlastnosti B, D sú ekvivalentné, t. j. platí veta:

3.6. *Nech* S_1, S_2 *sú sväzy definované na tej istej množine* M. *Nevyhnutná
a postačujúca podmienka, aby každá podmnožina* $X \subset M$, *ktorá tvorí konvexný
podsväz v jednom zo sväzov* S_1, S_2, *tvorila konvexný podsväz aj v druhom sväze,
je: Existujú sväzy* A, B *a zobrazenie* φ *množiny* M *na kartézsky súčin* $|A| \times$
$\times |B|$ *také, že* φ *je izomorfným zobrazením sväzu* S_1 *na kardinálny súčin*
$A \times B$ *a súčasne izomorfným zobrazením* S_2 *na* $\tilde{A} \times B$.[10]

3.7. *Vlastnosti* B, D, G, H *sú ekvivalentné.*
Tvrdenie vyplýva z 3.1, 3.2 a 3.6.

[10] V prípade, že sväzy S_1, S_2 sú distributívne, bola táto veta dokázaná v práci [2].

Poznámka. V prácach [2] a [4] J. Jakubík skúmal túto vlastnosť dvojice konečných sväzov S_1, S_2:

F. Grafy sväzov S_1, S_2 sú izomorfné, t. j. existuje prosté zobrazenie sväzu S_1 na sväz S_2, v ktorom susedným prvkom jedného zo sväzov S_1, S_2 zodpovedajú susedné prvky druhého sväzu. (Prvky x, y sväzu nazývame susednými, ak alebo x pokrýva y, alebo y pokrýva x.)

V práci [4] je dokázané, že v prípade, keď sväzy S_1, S_2 sú modulárne, vlastnosti F, D sú ekvivalentné. Pre semimodulárne sväzy neplatí implikácia $F \Rightarrow D$ [5].

Ľahko sa vidí, že pre ľubovoľnú dvojicu konečných sväzov (definovaných na tej istej množine) vlastnosť B (a teda aj každá z vlastností D, G, H) implikuje vlastnosť F.

Došlo 1. IV. 1955.

LITERATÚRA

1. М. С. Гельфанд: Отрезки в дедекиндовой структуре. Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та 71, 1953, 199—204. 2. J. Jakubík, M. Kolibiar: О некоторых свойствах пар структур. Чехослов. мат. журнал 4 (79), 1954, 1—27. 3. G. Birkhoff: Lattice theory. New York 1948 (ruský preklad Moskva, 1952). 4. J. Jakubík: О графическом изоморфизме структур. Чехосзов. мат. журнал 4 (79), 1954, 131—142. 5. J. Jakubík: O grafovom izomorfizme semimodulárnych sväzov. Matematicko-fyzikálny časopis SAV, IV, 1954, 162—177.

К ОТНОШЕНИЯМ „МЕЖДУ" В СТРУКТУРАХ

МИЛАН КОЛИБЯР, Братислава

Выводы

В статье рассматриваются два отношения „между" в структуре: (i) Элемент x структуры S находится между элементами $a, b \in S$, если $(a \cap x) \cup (b \cap x) = x = (a \cup x) \cap (b \cup x)$. ($ii$) Элемент x находится между a, b, если $a \cap b \leqq x \leqq a \cup b$. Множество элементов находящихся между a, b в смысле (i), (ii) соответственно обозначаем $G(a, b)$, $M(a, b)$ соответственно.

Отношение „между" (i) исследовано М. С. Гельфандом в работе [1].[1] В этой работе доказана теорема: В дедекиндовой структуре множество $G(a, b)$ образует подструктуру с наименьшим и наибольшим элементом.

В связи с этими отношениями „между" рассматриваются в настоящей статье следующие свойства пары структур S_1, S_2 определенных на одном и томже множестве M (смотри [2]):[2]

B. Если множество X является выпуклой подструктурой в S_1, то оно является выпуклой подструктурой также в S_2 и наоборот.

[1] Работа автору недоступна и он знает ее только из реферата в Реферативном журнале, математика, 1954, реф. 4762.

[2] Формулировка свойства D в работе [2] неточка.

D. Существуют структуры A, B (определенные на множествах M_1, M_2 соответственно) и взаимно-однозначное отображение φ множества M на декартово произведение $M_1 \times M_2$ такое, что φ — изоморфное соответствие одновременно между S_1 и $A \times B$ и между S_2 и $\tilde{A} \times B$. (При этом $\tilde{A}$ обозначает структуру, двойственную структуре A, $A \times B$ означает прямое произведение структур A, B.)

G. Если $x \in G(a, b)$ в S_1, то $x \in G(a, b)$ в S_2 и наоборот.

H. Если $x \in M(a, b)$ в S_1, то $x \in M(a, b)$ в S_2 и наоборот.

Доказывается, что свойства B, D, G, H эквивалентны. (Эквивалентность свойств B, D для дистрибутивных структур доказана в работе [2].) В структуре S имеет место $M(a, b) = G(a, b)$ для любых элементов $a, b \in S$ тогда и только тогда, когда структура S дистрибутивна.

В качестве вспомогательных теорем доказывается например: Если интервалы $\langle a \cap b, b \rangle$, $\langle a, a \cup b \rangle$ содержатся в $G(a, b)$, то соответствия $x \to a \cup x$ и $y \to b \cap y$ являются инверсными изоморфизмами между интервалами $\langle a \cap b, b \rangle$, $\langle a, a \cup b \rangle$. (Это утверждение обобщает теорему 6 гл. V книги Г. Биркгофа [3], так как в дедекиндовой структуре условие $\langle a \cap b, b \rangle \subset G(a, b)$, $\langle a, a \cup b \rangle \subset G(a, b)$ всегда выполнено.) В дедекиндовой структуре подструктура $G(a, b)$ изоморфна с прямым произведением $A \times B$, где $A = \langle a \cap b, a \rangle$, $B = \langle a \cap b, b \rangle$. В любой структуре имеет место $G(a, b) = M(a, b)$ тогда и только тогда, когда интервал $\langle a \cap b, a \cup b \rangle$ изоморфный с прямым произведением $A \times B$. Если S — структура с наибольшим и наименьшим элементом и C — множество всех элементов $a \in S$, для которых существует элемент $b \in S$ такой, что $G(a, b) = S$, то C — центр структуры S.