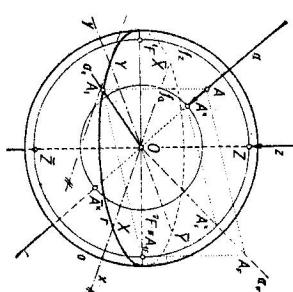
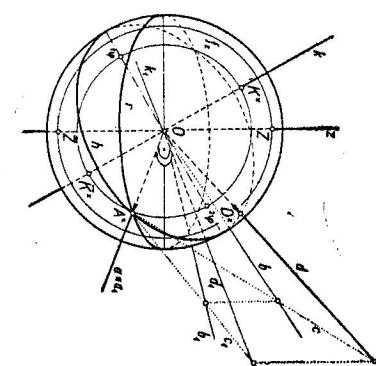


## 1. Obraz priesčinkov daného priemeru s guľovou plochou

Priemer (obr. 1) nech je  $a$  obraz jeho ortogonálneho priemetu do vodorovnej roviny  $\varrho$  nech je  $a_1$ . Nech ďalej nesplývajú spolu obrazy  $a$  a  $a_1$  a ani  $a = a_1$  nesplýva s obrazom osi  $z$  a obrazom priamky  $a$  nie je bod. Svislá rovina určená priermi  $a$  a  $z$  pretína guľovú plochu v hľavnej kružnici  $h$ , ktorej obrazom bude elipsa zdržených polomerov  $OA_1$  a  $OZ$ . Hľadané priesčinky priamky  $a$  sú body  $A^x$  a  $A^z$ . Sí to vlastné priesčinky priamky  $a$  s hlavnou kružnicou  $h$ . S elipsou obrazu kružnice  $h$  je perspektívne afiná kružnica  $f$ , ktorá



Obr. 1.



Obr. 2.

Úloha zostrojiť osvetlenie guľovej plochy zobrazenej v ortogonálnej axonometrii vyzaduje zostrojiť obraz kružnice medze svetla a tieňa a obraz jej vrchnutého tieňa na určitú rovinu. Ide tu zväčša o zostrojenie kužeľosečiek a pre ich určenie použírajú sa v doterajšej literatúre rozličné vlastnosti a metódy ortogonálneho aj axonometrického premietania, najmä určenie axonometrickej priemetyne  $\pi$ . Pelcovým spôsobom; zavádzajú sa pomocné konštrukcie v otočených, resp. sklopetých rovinných rezoch guľovej plochy, transformujú sa priemetre a používajú aj pomocné guľové plochy, vždy podľa toho, ako si autori určujú základ vlastného axonometrického ortogonálneho premietania.

Ortogonalné axonometrické premietanie osami  $x, y, z$  a počiatkom  $O$  si však môžeme určiť priamo obrysom guľovej plochy, t. j. kružnicou  $o$  so stredom v bode  $O$  a obrazom bodu  $Z$ , v ktorom guľovú plochu pretína svislá os  $z$  axonometrického zobrazenia (obr. 1).  $Z$  vlastnosti ortogonálneho priemetu kružnice vyplýva, ako z uvedených údajov zostrojíme obrazy všetkých troch osi  $x, y, z$  a stanovíme aj priemety rovnakých (jednotkových) úsečiek na nich, t. j. úsečky  $OX$  a  $OY$  pri hľavolejkej volbe jedného smeru  $x$  alebo  $y$  v rovine  $\varrho$  hlavnej kružnice  $r$  kolmej na os  $z$ . Ved  $OZ$  je dĺžka lineárnej excentricity elipsy obrazu kružnice  $r$ , jej hlavná os má dĺžku skutočného priemera guľovej plochy a je kolma na obraz osi  $z$ .

Vlastné konštrukcie osvetlenia guľovej plochy, či už pri osvetlení páralelnom alebo centrálnom, vyzadujú schopnosť pri tomto určení ortogonálne axonometrického zobrazenia vyriešiť niektoré úlohy. Po prvej pôjde o stanovenie obrazov priesčinkov hľavolného priemera guľovej plochy s plochou, po druhé bude treba zostrojiť obraz toho priemera guľovej plochy, ktorý je na danú rovinu kolmý.

GABRIEL ČENĚK, Bratislava  
(Metodický príspevok)

## GUĽOVEJ PLOCHY V ORTOGONÁLNE AXONOMETRICKOM PREMIETANÍ

**2. Druhá pomocná konštrukcia hľadá obraz priemeru  $k$  guľovej plochy, ktorý je kolmý na danú rovinu  $\alpha$ . Súčasne riše aj úlohu zostrojiť stredom guľovej plochy rovinu  $\alpha_0$  rovnobežnú s danou rovinou  $\alpha$  a obraz hľavnej kružnice  $k$  v tejto rovine**

Konštrukcia stanoví aj kružnicu  $f_k$  ohniskového meridiánu pre smer  $k$  (obr. 2).

Rovinu  $\alpha_0$ , ktorá ide stredom  $O$  rovnobežne s danou rovinou  $\alpha$  a o ktorej predpokladame, že nie je ani rovnobežná ani kolmá na axonometrickú priemetu  $\pi$ , určíme si dvoma priamkami  $a, b$ , rovnobežnými s dvoma navzájom rôznobežnými priamkami roviny  $\alpha$  tak, aby prechádzali stredom  $O$ . Jedna

z nich  $a$  nech leží vo vodorovnej rovine  $\varrho$ , druhá nech má svoj obraz  $b$  a  $b_1$  nech je obraz jej ortogonálneho priemetu do roviny  $\varrho$ .

Úlohu môžeme riešiť tak, že si stanovíme priesčníky  $A^x \bar{A}^x$  a  $B^x \bar{B}^x$  priektorá je nimi určená.

Alebo si pre elipsu obrazu hľavnej kružnice  $h$  stanovíme priemer  $OD^x \equiv d$  zdrobený k polomeru  $OA^x$ . Obraz jeho priemetu do roviny  $\varrho$  je priamka  $d_1$ , pričom smery  $a_1$  a  $d_1$  sú smery zdrobených priemerov elipsy  $r$ . Z  $d_1$  vieme určiť obraz priamky  $d$  v rovine  $\alpha_0$  napr. pomocou ďalšej priamky  $c$  tejto roviny. Vieme ďalej zstrojíť aj priesčník  $D^x$  priemeru  $d$  s gulovou plochou. Zo zdrobených polomerov  $OA^{xx}, OD$  si zstrojíme niektorou zo známych konštrukcií osi elipsy  $h$ , určíme si aj jej ohniská  ${}^1\varphi, {}^2\varphi$  a z toho dostaneme ohniskový meridián hľadaného smeru  $k$  a obrazy priesčníkov priemeru  $k$  s gulovou plochou, t. j. body  $K^x, \bar{K}^x$ .

### I. Paralelné osvetlenie gulovej plochy.

A. Ortogonálne axonometrický priemet gulovej plochy si určíme jej obrysom — kružnicou  $o$  — a svislou úsečkou  $OZ$ , pričom bod  $Z$  je obrazom priesčníka osi  $z$  s gulovou plochou. Z týchto údajov vieme si zstrojíť aj elipsu obrazu hľavnej kružnice  $r$ , ktorá leží vo vodorovnej rovine  $\varrho$  (obr. 3).

Smer lúčov rovnobežného osvetľovania nech je  $s$  a predbežne o ňom predpokladajme, že nie je ani rovnobežný s axonometrickou priemetnou  $\pi$  ani neleží v ortogonálne premetiaci rovine osi  $z$ . Vyhľeme aj triviálny prípad, že smer  $s$  je kolmý na priemetu  $\pi$ . Jeho polohu v priestore si určíme obrazom lúča  $s_0$ , ktorý ide stredom gulovej plochy a obrazom jeho ortogonálneho priemetu  $s_1$  do vodorovnej roviny  $\varrho$ . Treba si pritom uvedomiť, že priamka  $s_1$  je súčasne priesčnicou svislej svetelnej roviny — určenej smerom osvetľovania  $s_0$  a osou  $z$  — s vodorovnou rovinou  $\varrho$ . Je to teda obraz vrhnutého tieňa osi  $z$  do roviny  $\varrho$ .

Medzom vlastného tieňa bude hľavná kružnica  $m$  v rovine  $\mu$  kolmej na smer svetelných lúčov. Podľa tejto kružnice dotýká sa gulovej plochy rotačná valcová plocha s povrchovými priamkami rovnobežnými so smerom svetla. Budeme ju nazývať svetelným valecom.

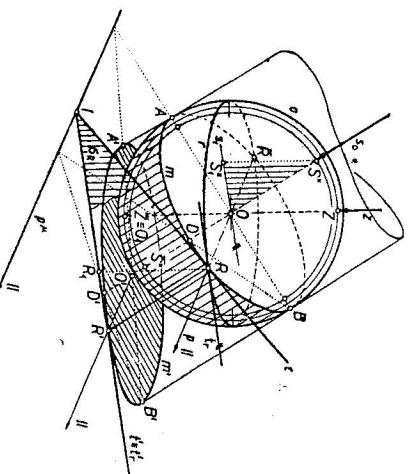
Obrazom kružnice  $m$  bude určitá elipsa, ktorej hľavná os  $AB$  je kolmá na obraz svetelného lúča  $s$  a ktoréj lineárna excentricita sa rovná úsečke  $OS^*$ , ak  $S^*$  je obraz priesčníka gulovej plochy so svetelným lúčom  $s_0$ , ktorý ide stredom gulovej plochy.

Roviny  $\varrho$  a  $\mu$  sa pretínajú v priamke  $p$ , ktorá je priemerom kružnice  $r$  a ktoréj koncové body  $R, R'$  ležia v priesčníkoch kružíc  $m$  a  $r$ . Tangenta  $t$ , kružnice  $r$  v bode  $R$  je rovnobežná so smerom  $s_1$ , pretože v bode  $R$  dotýká sa gulovej plochy tangenciálna rovina, rovnobežná so zvislou svetelnou rovinou.

Priemer  $p = ROR'$  je teda zdrobený k priemeru  $s_1$  v kružnici  $r$ , čo platí aj pre ich obrazy. Konštrukcia bodu  $R$  používa sa často aj pre stanovenie obrazu kružnice  $m$ .

Vrhnutým tieňom gulovej plochy na lubovolnú rovinu  $\alpha$  bude rovinný rez rotačného svetelného valca s touto rovinou. V tom prípade, že rovina  $\alpha$  nie je rovnobežná so smerom svetelných lúčov, bude to teda kuželosečka  $m'$  typu elipsa, ktorá v prípade, že rovina  $\alpha$  je na smer  $s$  kolmá, bude kružnicou.

Medzi obrazmi  $m$  a  $m'$  platí preto vzťah perspektívnej afinity, ktorej smer je smer  $s$ , páry sebe zodpovedajúcich bodov sú body  $OR$  a  $O'R'$ , ak  $O'$  a  $R'$  sú priesčníky príslušných svetelných lúčov s rovinou  $\alpha$ . A tie vieme zstrojíť.



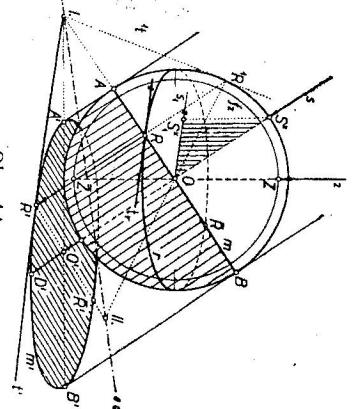
Obr. 3.

jst. Zvislá svetelná tangenciálna rovina  $\sigma_\mu$  v bode  $R$  pretína rovinu  $\mu$  v tangentе  $t$  kružnice  $m$  a rovinu  $\alpha$  v tangentе  $t'$  kuželosečky  $m'$ . Priamky  $t$  a  $t'$  sú v uvažovanej perspektívnej afiniti zodpovedajú. Preto dostaneme os perspektívnej afinity aj v obrazu ako spojnicu priesčníkov  $I = t \times t' \text{ a } II = OR \times O'R'$ .

Je to súčasne obraz priesčnice rovín  $\mu \times \alpha = p^\mu$ . Tým sme afiný vzťah presne určili a vieme zstrojíť zdrobené priemery  $A'B', C'D'$  obrazu elipsy  $m'$ , ktoré zodpovedajú zdrobeným priemerom čiar medze svetla a tieňa a zistrojili sme tak obraz kuželosečky vrhnutého tieňa gulovej plochy na rovinu  $\alpha$ .

Na obr. 3 je zstrojený vrhnutý tieň na tangenciálnu rovinu  $\alpha$ , rovnobežnú s rovinou  $\varrho$ , ktorá sa danej gulovej plochy dotýka v bode  $\bar{Z}$ . Všetky konštrukcie, nech priamky  $p$ , bodov  $RR'$  alebo tangent  $t$  a  $t'$  možno zstrojíť presne pomocou perspektívnej afinitnej vzťahov medzi kružnicou obrysu  $o$  a elipsami obrazov  $m$ , resp.  $m'$ . Pretože v tomto prípade je  $OR \# O'R'$ , je  $p^\mu$  ako os afinity rovnobežná so smerom  $p$  a tangentou  $t'$  bodom  $R'$  je rovnobežná s  $s_1$  aj s  $t'$ .

B. Elipsa  $m'$  a kružnica  $o$  majú v našom zobrazení spoločné, navzájom rovnobežné tangenty, ktoré sa dotýkajú kružnice  $o$  v bodech  $A^x, B^x$ . Preto aj medzi  $m'$  a  $o$  platí vzťah perspektívnej afinity, ktorej smerom je smer spoločných tangent, t. j. smer  $s$  obrazu svetelného lúča. V tejto afiniti bodu  $O$  zodpo-



Obr. 4.

vedá bod  $O'$  a bodu  $R$  bod  $R'$ . Tangente  $t$  kružnice  $o$  v bode  $R$  zodpovedá tangenta  $t'$  v bode  $R'$ . Preto vieme stanoviť aj os tejto affinity a na podklade afiného vzťahu stanoviť pre obraz elipsy vrhnutého tieňa príslušné združné premery, alebo v tomto prípade priamo aj osi.

Tento afinný vzťah použijeme pre zostrojenie obrazu vrhnutého tieňa aj v tom prípade, ak smer svetelného lúča je rovnobežný s axonometrickou priemetňou (Obr. 4.) Obrazom medze svetla a tieňa je tu úsečka, (priemer)  $A B$ , ktorá pretína obraz kružnice  $r$  v bodech  $\bar{R}, \bar{R}'$ . Tangentaelipsy  $r$  v bode  $R$  je obrazom rovnobežky s obrazom ortogonálneho priemetu  $s_1$  smeru svetla  $s$  do roviny  $e$ . Body  $S^x, S^z$  ležia na kružnici  $o$ .

C. V prípade, že obraz svetelného lúča splýva s obrazom svojho ortog. priemetu do roviny  $e$ , t. j. ak svetelný lúč leží v rovine kružnice  $r$ , konštrukcia medze vlastného tieňa nevyžaduje zvláštne obraty. Len v tom prípade, že svetelný lúč leží v ortogonálne premietacej rovine osi  $z$ , polohu lúča treba presne určiť, čo spravíme stanovením uhla, ktorý lúč zvierá s rovinou  $e$  alebo s osou  $z$ , alebo určením jeho priesečníka  $S^x$  s guľovou plochou. Pre konštrukciu môžeme použiť ohniskový meridián smeru  $z$  alebo axonometrickú premietaciu roviny osi  $z$  za novú pomocnú priemetňu (obr. 5).

D. Vrhnutý tieň  $m''$  guľovej plochy na lubovoľnú diaľku roviny  $\beta$  zostrojime stanovením perspektívnej affinity medzi elipsami obrazov  $m$  a  $m''$ , alebo určením inej perspektívnej affinity medzi  $m'$  a  $m''$ , ktorej osou je obraz priesečnice rovín  $\alpha$  a  $\beta$ . V prvom prípade stačí zstrojiti kolmicu  $k$  stredom guľovej plochy na rovinu  $\beta$  vrhnutého tieňa, stanoviť jej priesečníky  $K^x$  a  $K^z$  s guľovou plochou a v konštrukcii pokračovať ako v prípade A, pričom bod  $K^x$  nahradí bod  $Z$  tohto riešenia.

## II. Centrálné osvetlenie guľovej plochy.

Stred osvetlenia  $S$  musí mať od stredu guľovej plochy vzdialenosť väčšiu ako je polomer guľovej plochy, ak má osvetlenie existovať. Potom z bodu  $S$  vieme ku guľovej ploche zstrojiti dotykový rotačný kužeľ — svetelný kužeľ — s vrcholom v bode  $S$ , ktorý sa plochou dotýka podla jej vedľajšej kružnice  $m$ , čiže medzi svetla a tieňa. Kružnica  $m$  leží v rovine  $\mu$ , kolnej na spojnici  $OS$ .

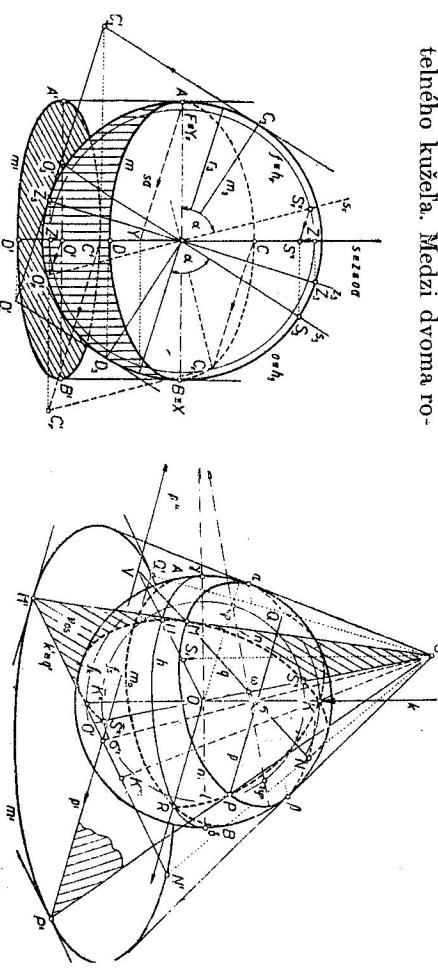
Ak stred  $S$  neleží v rovine  $\pi_0$  iducej stredom guľovej plochy rovnobežne s axonometrickou priemetňou, ani jeho obraz nespĺňa s  $O$ , potom obrazom kružnice  $m$  budé elipsa. Aby sme ju zstrojili, stačí stanoviť priesečníky  $S^x, S^z$  priemetu  $OS$  s guľovou plochou. Tým smeri už určili polomer kružnice ohniskového meridiánu  $f$ , premer  $OS$  a tangenty  $z$  bode  $S$  a dotykajú  $f$ , v bodech  $q^2, q^3$ , do sú už ohniská elipsy  $m$  obrazu kružnice medze svetla a tieňa. Zo známych ohnisk eliptického obrazu vedľajšej kružnice na guľovej ploche vieme obmedziť aj osi elipsy tohto obrazu. Konštrukciu nemožno použiť len v tom prípade, ak obraz bodu  $S$  leží na obrate osi  $z$  alebo priamo v bode  $O$ . Vtedy pre konštrukciu obrazu  $m$  použijeme ohniskový meridián  $f_z$ , podobne ako v prípade rovnobež-

ného osvetľovania v obrazu 5. Pre prípad, že obraz  $S$  splýva s  $O$ , obrazom kružnice  $m$  bude opäť kružnica.

Ak možno z bodu  $S$  zstrojiti tangentu ku kružnici  $o$ , tvoria obrys svetelného kužeľa, a dotykať sa kružnice  $o$  v bodech  $\alpha\beta$ . Body  $\alpha$  a  $\beta$  ležia aj na elipse obrazu kružnice  $m$  a tangentu v nich sú  $S\alpha$  a  $S\beta$ .

Rovina  $\mu_0$  idúca stredom  $O$ , rovnobežne s rovinou  $\mu$ , pretína guľovú plochu v hlavnej kružnici  $m_0$ . Jej obrazom je elipsa s hlavnou osou  $AB$ , ktorá je kolma na obraz spojnice  $SO$  (obr. 6).

Vrhnutý tieň  $m'$  guľovej plochy na lubovoľnú rovinu  $\alpha$ , ktorá neprechádza stredom  $S$ , určíme si ako rovinný rez tohto svetelného kužeľa. Medzi dvoma ro-



Obr. 5.



Obr. 6.

vimými rezmi kužeľa platí vzťah perspektívnej kolineácie, ktoréj osou je priesečníca rovín obidvoch rezov. Tento vzťah tu platí aj o obrazoch, teda aj o kužeľosečkách  $m$  a  $m'$ , ak rovina  $\alpha$  nie je kolmá na priemetňu  $\pi$ . Stredom kolineácie budé obraz stredu osvetľovania  $S$  a osou bude obraz priesečnice rovín  $\mu$  a  $\alpha$ . Kužeľosečka vrhnutého tieňa guľovej plochy na rovinu  $\alpha$  môže mať rozličný typ, podľa toho, či rovina vrhnutého tieňa pretína všetky príamky svetelného kužeľa vo vlastných bodeach, alebo či je rovnobežná s niektorou povrchovou priamkou, alebo rovnobežná s dvoma povrchovými priamkami. To znamená, že vrhnutým tieňom bude parabola, ak rovina  $\alpha$  bude rovnobežná s tangenciálnou rovinou guľovej plochy v niektorom bode  $M$ , kružnica  $m$  medze svetla a tieňa na guľovej ploche. Vrhnutý tieň bude elipsa, ak jeho rovina bude rovnobežná s tang. rovinou guľovej plochy v niektorom bode guľového vrchliku obmedzeného kružnicou  $m$ , ktorá obsahuje bod  $S^x$ . Je jasné, že toto tvrdenie neplatí pre body kružnice  $m$  a pre roviny rovnobežné s tangenciálnou rovinou bodu  $S^x$ , lebo v poslednom prípade to budú kružnice.

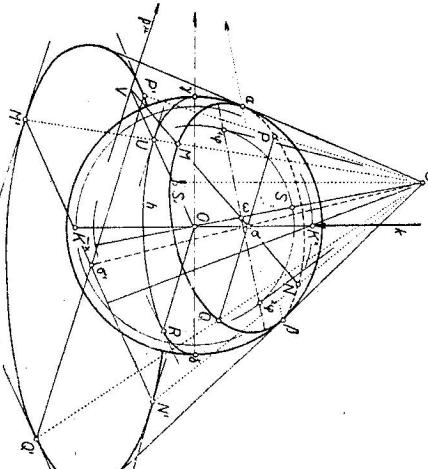
Všeobecne to znamená, že druh kuželosečky vrhnutého tieňa nám určí poloha bodu  $K^z$ , v ktorom plochu pretne priemer kolmý na rovinu vrhnutého tieňa.

#### A. Vrhnutý tieň guľovej plochy je elipsa (obr. 6).

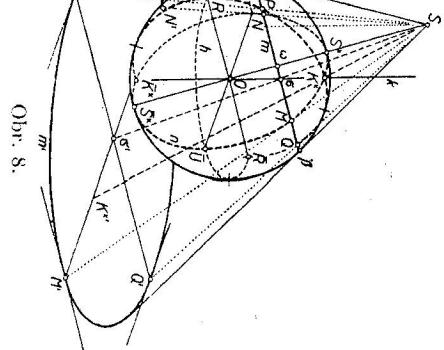
Vieme, že vrhnuté tieňe bodov  $K^z, \bar{K}^z$  do roviny  $\alpha$  sú ohniskami skutočnej kuželosečky vrhnutého tieňa do roviny  $\alpha$ . Ak rovina  $\alpha$  nie je rovnobežná s priemetňou  $\pi$ , nebudú body  $K^z, \bar{K}^z$  ohniskami obrazu kuželosečky vrhnutého tieňa, ale ich spojnica bude priemerom kuželosečky  $m'$  obrazu a poltiaci bod  $\sigma'$  úsečky  $K^z, \bar{K}^z$  bude stredom obrazu  $m'$  v prípade eliptického aj hyperbolického tieňa. Bod  $\sigma'$  je teda vrhnutým tieňom určitého bodu  $\sigma$  spojnice  $k = K^z \bar{K}^z$ . Rovina  $\nu_{**}$  určená stredom osvetľovania  $S$  a priemerom  $k$  pretína guľovú plochu v hlavnej kružnici  $n$  a tangenty  $z$  bodu  $S$  dotýkajú sa jej v bodech  $M$  a  $N$ . Vrhnuté tieňe  $M$  a  $N$  bodov  $M$  a  $N$  obmedzia nám jeden priemer kuželosečky vrhnutého tieňa. Spojnice  $MN$  prechádza aj stredom  $\omega$  kuželosečky  $m$ . Priamka  $q = MN$  je prieseečnicou roviny  $\mu$  s rovinou  $\nu_{**}$ . Z uvedeného dalej vyplýva, že tangenty kuželosečky  $m'$  v bodech  $M'N'$  sú navzájom rovnobežné a sú rovnobežné aj s tangentami bodov  $M$  a  $N$  kružnice  $m$ . Sú teda rovnobežné aj s osou perspektívnej kolineácie, ktorá platí medzi rovinami  $\mu$  a  $\alpha$  a rovnobežné aj s priemerom  $p'$  zdrobeným v kuželosečke  $m'$  s priemerom  $q' = k' = M'N'$ . Obraz tohto smeru  $p'$  môžeme preto zostrojiť rozličným spôsobom. Je to napr. smer v elipse  $m$  zdrobený k priemeru  $q = MN$ . Je to dalej smer priemeru  $OR$ , ktorý je zdrobený k priemeru  $OS$  v hlavnej kružnici  $h$ . Tá leží v rovine  $\alpha_0$  idúcej stredom guľovej plochy rovnobežne s rovinou vrhnutého tieňa a bod  $S_1$  je ortog. priemet bodu  $S$  do tejto roviny. Smer  $p'$  je dalej smer prieseečnice rovín  $p'' = \mu \times \alpha$  aj smer prieseečnice roviny  $\mu$  s rovinou  $\alpha_0$ .

Bodom  $\sigma$  ide priamka  $p$  v rovine  $\mu$ , ktorá pretína kružnicu  $m$  v bodech  $PQ$ . Vŕnuté tieňe  $PQ$  bodov  $PQ$  obmedzia priemer  $p'$  zdrobený k priemeru  $q' = k'$  v kuželosečke  $m'$  medze vrhnutého tieňa guľovej plochy na rovinu  $\alpha$ . Tetiva  $PQ$  leží teda v rovine  $\lambda$  kolmej na rovinu  $\alpha_0$  a guľovú plochu pretína v hlavnej kružnici  $l$ , ktorej dva združené polomeri sú  $OR$  a  $OK$ . Roviny  $\alpha_0 \nu_{**}$  a  $\lambda$  tvoria pravouhlý trojuholník, ktorého prieseečnice sú priamky  $UO\bar{U}$ ,  $RO\bar{R}$ ,  $KO\bar{K}$ . Trojhran pretína guľovú plochu v hlavných kružničach  $h, n, l$ .

a) Vlastná konštrukcia elipsy  $m'$  obrazu vrhnutého tieňa na rovinu  $\alpha$  bude teda vyzerat takto: (obr. 7). Za predpokladu, že stred osvetľovania neleží v rovine idúcej stredom guľovej plochy rovnobežne s axonometrickou priemetňou, zoširojme si obraz bodu  $S^z$  a pomocou neho aj obraz kružnice  $m$  medze vlastného tieňa. Ďalej zoširojme obrazy prieseečníkov  $K^z$  a  $\bar{K}^z$  priemeru  $k$ , kolmého na rovinu  $\alpha$  vrhnutého tieňa s guľovou plochou a obraz hlavnej kružnice  $h$ , ktorá leží v rovine  $\alpha_0$  idúcej stredom guľovej plochy rovnobežne s rovinou  $\alpha$ . Stavovíme aj obraz  $S_1$  ortog. priemetu stredu osvetľovania  $S$  do roviny  $\alpha_0$ . V elipse  $h$  určíme priemer  $UO\bar{U}$ , ktorý leží v spojici  $OS_1$  a k nemu zdrobený



Obr. 7.



Obr. 8.

priemer  $RO\bar{R}$ . Zostrojíme ďalej obraz prieseečnice  $p''$  rovín  $\mu$  a  $\alpha_0$ , ktorá ide prieseečníkom priamok  $\alpha\beta$  a  $\gamma\delta$  rovnobežne so smerom  $OR$ . Na priemeru  $OU$  do staneme tak bod  $V$ . Bodom  $V$  ide priamer  $M_0N$  elipsy  $m$ , pretína ju v bodech  $MN$  a priamku  $k$  v bode  $\sigma$ . Tetiva  $P_0Q$  rovnobežná s  $p''$  určí na  $m$  body  $PQ$ . Vrhnuté tieňe bodov  $MNPQ$  na rovinu  $\alpha$  určia obmedzenie zdrobených pri-

merov elipsy  $m'$  obrazu vrhnutého tieňa. Pritom  $M'N'$  je rovnobežné s priemerom  $UO\bar{U}$  a  $P'Q'$  s priemerom  $OR$  elipsy obrazu kružnice  $h$ . b) Ak stred osvetľovania leží v rovine  $\pi_0$  idúcej stredom guľovej plochy rovnobežne s axonometrickou priemetňou, obraz kružnice  $m$  je potom spojnice bodov  $\alpha\beta$  a body  $S^z, \bar{S}^z$  sú prieseečníky spojnice  $SO$  s kružnicou  $o$  (obr. 8). Rovina  $\mu_0$  pretína rovinu  $\alpha_0$  v priamke  $RO\bar{R}$ . Rovina  $\nu_{**}$  pretína guľovú plochu v hlavnej kružnici  $n$ , ktorej obrazom je elipsa zdrobených polomerov  $OK^z, O\bar{U}$  a hlavnej osi  $S^zO\bar{S}^z$ . Tá pretína  $m$  v bodech  $MN$ . Rovina  $\lambda$  pretína guľovú plochu v hlavnej kružnici  $l$ , ktorej obrazom je elipsa zdrobených polomerov  $OR, OK^z$  a hlavnej osi kolmej na obraz  $OU$ . Tá pretína  $m$  v bodech  $P$  a  $Q$ . Vrhnuté tieňe bodov  $MNPQ$  určia obraz zdrobených priemerov (v skutočnosti osi) elipsy  $m'$  vrhnutého tieňa.

#### B. Vrhnutý tieň guľovej plochy je parabola (obr. 9).

Nech tangenciálna rovina rovnobežná s rovinou vrhnutého tieňa sa dotýka guľovej plochy v bode  $M$ , ktorý musí ležať na kružnici  $m$ , medze svetla a tieňa. Vrhnutý tieň si zoširojme na tu rovinu  $\alpha$ , ktorá je tangenciálnou rovinou guľovej plochy, teda v jej bode  $M$ , diametránom k bodu  $M$ . Rovina  $\nu_{**}$  určená stredom  $S$  a kolmicou  $k$ , pretína rovinu  $\alpha$  v priamke  $k'$ , ktorá je vrhnutým tieňom priemeru  $k$ . Priamka  $k'$  ide preto bodom  $\bar{M}$  rovnobežne s priamkou

*S.M.* Priemer  $M\omega$  pretína  $m$  v bode  $N$ , ktorého vrhnutý tiel $N'$  leží na  $k'$  a v skutočnosti je vrcholom paraboly vrhnutého tiaľa. Priamka  $k'$  je v skutočnosti osou paraboly. Priesecníkom  $MN \times k = I$  ide stopa roviny  $\mu$  do roviny  $\alpha$ ,

Konštrukciu kužeľosečky vrhnutého tiená (paraboly a hyperboly) v prípade, že stred  $S$  leží v rovine idúcej stredom guľovej plochy rovnobežne s priemietácou  $\pi$ , netreba osobitne uvádzat, lebo je aplikáciou riešenia eliptického vrhnutého tiená, uvedeného v texte pre tento prípad polohy bodu  $S$ .

Došlo 4. 1. 1955

ПРИМЕЧАНИЕ к конструкции освещения шарной поверхности в ортогонально-аксонометрической

(Методический май)

## Выводы

<img alt="Figure 9: A perspective drawing showing a circle m and a parabola m' intersecting at points A and B. A line I passes through A and B, representing the common chord of the circle and the parabola. Figure 10: A detailed geometric construction showing the intersection of a circle m and a parabola m'. The circle m has center O and radius OA. The parabola m' has vertex O and passes through point A. The intersection points are labeled B and C. A line I passes through A and B. Other points and lines are labeled with letters and numbers, such as D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, and various numbers like 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 839, 840, 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847, 848, 849, 849, 850, 851, 852, 853, 854, 855, 856, 857, 858, 859, 859, 860, 861, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 877, 878, 879, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 886, 887, 888, 889, 889, 890, 891, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 897, 898, 899, 900, 901, 902, 903, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 919, 920, 921, 922, 923, 924, 925, 926, 927, 928, 929, 929, 930, 931, 932, 933, 934, 935, 936, 937, 938, 939, 939, 940, 941, 942, 943, 944, 945, 946, 947, 948, 949, 949, 950, 951, 952, 953, 954, 955, 956, 957, 958, 959, 959, 960, 961, 962, 963, 964, 965, 966, 967, 968, 969, 969, 970, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 977, 978, 979, 979, 980, 981, 982, 983, 984, 985, 986, 987, 988, 988, 989, 989, 990, 991, 992, 993, 994, 995, 996, 997, 997, 998, 999, 999, 1000, 1001, 1002, 1003, 1004, 1005, 1006, 1007, 1008, 1009, 1009, 1010, 1011, 1012, 1013, 1014, 1015, 1016, 1017, 1018, 1019, 1019, 1020, 1021, 1022, 1023, 1024, 1025, 1026, 1027, 1028, 1029, 1029, 1030, 1031, 1032, 1033, 1034, 1035, 1036, 1037, 1038, 1039, 1039, 1040, 1041, 1042, 1043, 1044, 1045, 1046, 1047, 1048, 1049, 1049, 1050, 1051, 1052, 1053, 1054, 1055, 1056, 1057, 1058, 1059, 1059, 1060, 1061, 1062, 1063, 1064, 1065, 1066, 1067, 1068, 1069, 1069, 1070, 1071, 1072, 1073, 1074, 1075, 1076, 1077, 1078, 1079, 1079, 1080, 1081, 1082, 1083, 1084, 1085, 1086, 1087, 1088, 1088, 1089, 1089, 1090, 1091, 1092, 1093, 1094, 1095, 1096, 1097, 1097, 1098, 1099, 1099, 1100, 1101, 1102, 1103, 1104, 1105, 1106, 1107, 1108, 1109, 1109, 1110, 1111, 1112, 1113, 1114, 1115, 1116, 1117, 1118, 1119, 1119, 1120, 1121, 1122, 1123, 1124, 1125, 1126, 1127, 1128, 1129, 1129, 1130, 1131, 1132, 1133, 1134, 1135, 1136, 1137, 1138, 1139, 1139, 1140, 1141, 1142, 1143, 1144, 1145, 1146, 1147, 1148, 1149, 1149, 1150, 1151, 1152, 1153, 1154, 1155, 1156, 1157, 1158, 1159, 1159, 1160, 1161, 1162, 1163, 1164, 1165, 1166, 1167, 1168, 1169, 1169, 1170, 1171, 1172, 1173, 1174, 1175, 1176, 1177, 1178, 1179, 1179, 1180, 1181, 1182, 1183, 1184, 1185, 1186, 1187, 1188, 1188, 1189, 1189, 1190, 1191, 1192, 1193, 1194, 1195, 1196, 1197, 1197, 1198, 1199, 1199, 1200, 1201, 1202, 1203, 1204, 1205, 1206, 1207, 1208, 1208, 1209, 1210, 1211, 1212, 1213, 1214, 1215, 1216, 1217, 1218, 1219, 1219, 1220, 1221, 1222, 1223, 1224, 1225, 1226, 1227, 1228, 1229, 1229, 1230, 1231, 1232, 1233, 1234, 1235, 1236, 1237, 1238, 1239, 1239, 1240, 1241, 1242, 1243, 1244, 1245, 1246, 1247, 1248, 1249, 1249, 1250, 1251, 1252, 1253, 1254, 1255, 1256, 1257, 1258, 1259, 1259, 1260, 1261, 1262, 1263, 1264, 1265, 1266, 1267, 1268, 1269, 1269, 1270, 1271, 1272, 1273, 1274, 1275, 1276, 1277, 1278, 1279, 1279, 1280, 1281, 1282, 1283, 1284, 1285, 1286, 1287, 1288, 1288, 1289, 1289, 1290, 1291, 1292, 1293, 1294, 1295, 1296, 1297, 1297, 1298, 1299, 1299, 1300, 1301, 1302, 1303, 1304, 1305, 1306, 1307, 1308, 1308, 1309, 1310, 1311, 1312, 1313, 1314, 1315, 1316, 1317, 1318, 1319, 1319, 1320, 1321, 1322, 1323, 1324, 1325, 1326, 1327, 1328, 1329, 1329, 1330, 1331, 1332, 1333, 1334, 1335, 1336, 1337, 1338, 1339, 1339, 1340, 1341, 1342, 1343, 1344, 1345, 1346, 1347, 1348, 1349, 1349, 1350, 1351, 1352, 1353, 1354, 1355, 1356, 1357, 1358, 1359, 1359, 1360, 1361, 1362, 1363, 1364, 1365, 1366, 1367, 1368, 1369, 1369, 1370, 1371, 1372, 1373, 1374, 1375, 1376, 1377, 1378, 1379, 1379, 1380, 1381, 1382, 1383, 1384, 1385, 1386, 1387, 1388, 1388, 1389, 1389, 1390, 1391, 1392, 1393, 1394, 1395, 1396, 1397, 1397, 1398, 1399, 1399, 1400, 1401, 1402, 1403, 1404, 1405, 1406, 1407, 1408, 1408, 1409, 1410, 1411, 1412, 1413, 1414, 1415, 1416, 1417, 1418, 1419, 1419, 1420, 1421, 1422, 1423, 1424, 1425, 1426, 1427, 1428, 1429, 1429, 1430, 1431, 1432, 1433, 1434, 1435, 1436, 1437, 1438, 1439, 1439, 1440, 1441, 1442, 1443, 1444, 1445, 1446, 1447, 1448, 1449, 1449, 1450, 1451, 1452, 1453, 1454, 1455, 1456, 1457, 1458, 1459, 1459, 1460, 1461, 1462, 1463, 1464, 1465, 1466, 1467, 1468, 1469, 1469, 1470, 1471, 1472, 1473, 1474, 1475, 1476, 1477, 1478, 1479, 1479, 1480, 1481, 1482, 1483, 1484, 1485, 1486, 1487, 1488, 1488, 1489, 1489, 1490, 1491, 1492, 1493, 1494, 1495, 1496, 1497, 1497, 1498, 1499, 1499, 1500, 1501, 1502, 1503, 1504, 1505, 1506, 1507, 1508, 1508, 1509, 1510, 1511, 1512, 1513, 1514, 1515, 1516, 1517, 1518, 1519, 1519, 1520, 1521, 1522, 1523, 1524, 1525, 1526, 1527, 1528, 1529, 1529, 1530, 1531, 1532, 1533, 1534, 1535, 1536, 1537, 1538, 1539, 1539, 1540, 1541, 1542, 1543, 1544, 1545, 1546, 1547, 1548, 1549, 1549, 1550, 1551, 1552, 1553, 1554, 1555, 1556, 1557, 1558, 1559, 1559, 1560, 1561, 1562, 1563, 1564, 1565, 1566, 1567, 1568, 1569, 1569, 1570, 1571, 1572, 1573, 1574, 1575, 1576, 1577, 1578, 1579, 1579, 1580, 1581, 1582, 1583, 1584, 1585, 1586, 1587, 1588, 1588, 1589, 1589, 1590, 1591, 1592, 1593, 1594, 1595, 1596, 1597, 1597, 1598, 1599, 1599, 1600, 1601, 1602, 1603, 1604, 1605, 1606, 1607, 1608, 1608, 1609, 1610, 1611, 1612, 1613, 1614, 1615, 1616, 1617, 1618, 1619, 1619, 1620, 1621, 1622, 1623, 1624, 1625, 1626, 1627, 1628, 1629, 1629, 1630, 1631, 1632, 1633, 1634, 1635, 1636, 1637, 1638, 1639, 1639, 1640, 1641, 1642, 1643, 1644, 1645, 1646, 1647, 1648, 1649, 1649, 1650, 1651, 1652, 1653, 1654, 1655, 1656, 1657, 1658, 1659, 1659, 1660, 1661, 1662, 1663, 1664, 1665, 1666, 1667, 1668, 1669, 1669, 1670, 1671, 1672, 1673, 1674, 1675, 1676, 1677, 1678, 1679, 1679, 1680, 1681, 1682, 1683, 1684, 1685, 1686, 1687, 1688, 1688, 1689, 1689, 1690, 1691, 1692, 1693, 1694, 1695, 1696, 1697, 1697, 1698, 1699, 1699, 1700, 1701, 1702, 1703, 1704, 1705, 1706, 1707, 1708, 1708, 1709, 1710, 1711, 1712, 1713, 1714, 1715, 1716, 1717, 1718, 1719, 1719, 1720, 1721, 1722, 1723, 1724, 1725, 1726, 1727, 1728, 1729, 1729, 1730, 1731, 1732, 1733, 1734, 1735, 1736, 1737, 1738, 1739, 1739, 1740, 1741, 1742, 1743, 1744, 1745, 1746, 1747, 1748, 1749, 1749, 1750, 1751, 1752, 1753, 1754, 1755, 1756, 1757, 1758, 1759, 1759, 1760, 1761, 1762, 1763, 1764, 1765, 1766, 1767, 1768, 1769, 1769, 1770, 1771, 1772, 1773, 1774, 1775, 1776, 1777, 1778, 1779, 1779, 1780, 1781, 1782, 1783, 1784, 1785, 1786, 1787, 1788, 1788, 1789, 1789, 1790, 1791, 1792, 1793, 1794, 1795, 1796, 1797, 1797, 1798, 1799, 1799, 1800, 1801, 1802, 1803, 1804, 1805, 1806, 1807, 1808, 1808, 1809, 1810, 1811, 1812, 1813, 1814, 1815, 1816, 1817, 1818, 1819, 1819, 1820, 1821, 1822, 1823, 1824, 1825, 1826, 1827, 1828, 1829, 1829, 1830, 1831, 1832, 1833, 1834, 1835, 1836, 1837, 1838, 1839, 1839, 1840, 1841, 1842, 1843, 1844, 1845, 1846, 1847, 1848, 1849, 1849, 1850, 1851, 1852, 1853, 1854, 1855, 1856, 1857, 1858, 1859, 1859, 1860, 1861, 1862, 1863, 1864, 1865, 1866, 1867, 1868, 1869, 1869, 1870, 1871, 1872, 1873, 1874, 1875, 1876, 1877, 1878, 1879, 1879, 1880, 1881, 1882, 1883, 1884, 1885, 1886, 1887, 1888, 1888, 1889, 1889, 1890, 1891, 1892, 1893, 1894, 1895, 1896, 1897, 1897, 1898, 1899, 1899, 1900, 1901, 1902, 1903, 1904, 1905, 1906, 1907, 1908, 1908, 1909, 1910, 1911, 1912, 1913, 1914, 1915, 1916, 1917, 1918, 1919, 1919, 1920, 1921, 1922, 1923, 1924, 1925, 1926, 1927, 1928, 1929, 1929, 1930, 1931, 1932, 1933, 1934, 1935, 1936, 1937, 1938, 1939, 1939, 1940, 1941, 1942, 1943, 1944, 1945, 1946, 1947, 1948, 1949, 1949, 1950, 1951, 1952, 1953, 1954, 1955, 1956, 1957, 1958, 1959, 1959, 1960, 1961, 1962, 1963, 1964, 1965, 1966, 1967, 1968, 1969, 1969, 1970, 1971, 1972, 1973, 1974, 1975, 1976, 1977, 1978, 1979, 1979, 1980, 1981, 1982, 1983, 1984, 1985, 1986, 1987, 1988, 1988, 1989, 1989, 1990, 1991, 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1997, 1998, 1999, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2029, 2030

Obt. 9.

Obr. 10.

Tangenciálne roviny guľovej plochy rovnobežné s rovinou vrhnutého tieňa dotýkajú sa v bodech  $T$  a  $\bar{T}$ . Hladajme vrhnutý tieň na tangenciálnu rovinu v bode  $\bar{T}$ . Rovina  $\alpha_0$ , idúca stredom  $O$  rovnobežne s rovinou  $\alpha$  vrhnutého tieňa, pretína gulovú plochu v kružnici  $h$ . Rovina  $\beta_{**}$  pretína guľovú plochu v hlavnej kružnici  $n$ , ktorá prechádza bodmi  $\bar{T}T\bar{S}\bar{S}^*$ . Tangenty z bodu  $S$  ku kružnici  $n$  dotýkajú sa jej v bodech  $MN$ , ktorých spojnica ide stredom  $w$  a ktoré ležia aj na kružnici  $m$ . Spojnica  $MN$  pretína  $k = \bar{T}\bar{T}$  v bode  $\sigma$ . Ako v prípade eliptického vrhnutého tieňa, aj tu si stanovíme smery  $OU$  a  $OR$  a aj smer  $p$ . Vedeli by sme zoštrojiť aj os perspektívnej kolineácie medzi kuželesčkou  $m$  a hyperbolou  $m'$ . Smery asymptot hyperby  $m'$  dostaneme, ak bodom  $S$  zo strojme rovinu  $\alpha$ , rovnobežnú s rovinou  $\alpha$  vrhnutého tieňa. Tá pretína rovinu  $v_{**}$  v priamke  $SQ$ , rovnobežnej s  $OU$  a rovinu  $\mu$  v priamke  $AQB$ , rovnobežnej s priamkou  $p$ . Smery  $SA$  a  $SB$  sú smery asymptot hyperby  $m'$ .