O ISTÝCH ROZKLADOCH GRAFU

ANTON KOTZIG, Bratislava

1. Základné pojmy a definície

Nech G je konečná množina prvkov. Priraďme každému prvku $a \in G$ práve jedno z čísel 0,1. Číslu $\varrho(a) (= 0,1)$ priradenému prvku a hovoríme *rozmer prvku* a. Prvkom rozmeru *0* budeme hovoriť *uzol*, prvkom rozmeru 1 *hrana*.

Nech je dané zobrazenie φ množiny všetkých dvojíc prvkov rôzneho rozmeru z G do množiny čísel $\{0,1\}$, ktoré má tieto vlastnosti:

1. $\varphi(a, b) = \varphi(b, a)$ pre každú dvojicu prvkov rôzneho rozmeru z G,
2. ak h je ľubovoľná hrana z G, potom existujú práve dva uzly $u_1 \neq u_2$, o ktorých platí:

$$\varphi(h, u_1) = \varphi(h, u_2) = 1.$$

O prvkoch dvojice pozostávajúcej z uzlu u a hrany h hovoríme, že sú *incidentné* práve vtedy, keď platí $\varphi(u, h) = 1$.

Konečnej množine prvkov G, pre ktorú je daný rozklad na množinu uzlov U a množinu hrán $H (G = U + H)$ a pre ktorú je dané zobrazenie φ o vlastnostiach 1, 2, hovoríme *konečný graf*, alebo — vzhľadom na to, že v našej práci nepojednávame o takých grafoch, ktoré by neboli konečné — prosto *graf*.

Nech $G = U + H$ je ľubovoľný graf. O uzle u grafu G hovoríme, že je *n-tého stupňa v* G, ak je incidentný práve s n hranami grafu G.

Množine $G' = U' + H'$, pre ktorú je dané zobrazenie φ' o vlastnostiach 1, 2, hovoríme *čiastočný graf* grafu $G = U + H$, ak G' je grafom a platí:

a) $U' \subset U$, $H' \subset H$,

b) o hrane $h \in H'$ a uzle $u \in U'$ platí $\varphi'(h, u) = 1$ práve vtedy, keď h, u sú incidentné v grafe G.

Postupnosti prvkov grafu G:

$$P = u_1, h_{1,2}, u_2, h_{2,3}, \ldots, h_{n-1,n}, u_n$$

hovoríme *ťah v grafe* G, ak platí:

α) $n \geq 2$,

β) u_i sú uzly a $h_{i,i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sú hrany grafu G,

γ) hrana $h_{i,i+1}$ je incidentná s uzlami $u_i \neq u_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$,

δ) ľubovoľná hrana grafu G sa v postupnosti vyskytuje najviac raz.

Hovoríme, že ťah P v grafe G je *otvorený*, resp., že je *uzavretý* podľa toho, či je $u_1 \neq u_n$, alebo je $u_1 = u_n$.

Otvorený ťah $P = u_1, h_{1,2}, \ldots, u_n$, v ktorom aj každý uzol grafu G sa vyskytuje najviac raz, nazýva sa *cestou spojujúcou uzly* u_1, u_n. Uzavretému ťahu P, v ktorom $u_1 = u_n$, ale pre všetky $i \neq j$ (kde $i, j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$) platí $u_i \neq u_j$, hovoríme *kružnica*. Je známe, že každý uzavretý ťah, obsahujúci hranu h, obsahuje ako podmnožinu kružnicu, obsahujúcu hranu h.

O dvoch uzloch u_1, u_2 grafu G hovoríme, že *súvisia*, ak existuje cesta v G, spojujúca tieto dva uzly. Okrem toho (ako definícia) platí, že každý uzol súvisí sám so sebou. O grafe G hovoríme, že je *súvislý*, ak každá dvojica uzlov grafu G súvisí.

Nech sú dané grafy G_1, G_2 a nech U_i, resp. H_i je množina uzlov, resp. hrán grafu $G_i (i = 1, 2)$. Budeme hovoriť, že graf G_2 vznikne z grafu G_1 zrušením hrany $h \in H_1$, ak platí:

α) $U_2 = U_1$

β) $H_2 = H_1 - \{h\}$

γ) ľubovoľná hrana $h' \in H_2$ je incidentná s tými istými uzlami v grafe G_2 ako v grafe G_1.

Definujme si teraz pojem *stupňa súvislosti medzi uzlami*. Nech u, v sú ľubovoľné dva uzly grafu $G = U + H$, k prirodzené číslo.

I. Budeme hovoriť, že súvislosť medzi uzlami u, v v grafe G je stupňa k vtedy, keď platí:

1. V grafe G existuje taká množina hrán $\bar{H} \subset H$ o k prvkoch, že zrušením všetkých hrán tejto množiny vznikne z grafu G istý graf G', v ktorom uzly u, v nesúvisia.
2. Ak v grafe G zrušíme ľubovoľných k-1 jeho hrán, vznikne graf, v ktorom uzly u, v súvisia.

Skutočnosť, že súvislosť medzi uzlami u, v v grafe G je stupňa k, budeme vyjadrovať takto:

$$\sigma_G(u, v) = k.$$

II. Pretože uzol u bude súvisieť sám so sebou, nech zrušíme akýkoľvek počet hrán grafu, budeme vždy klásť:

$$\sigma_G(u, u) = +\infty.$$

III. Ak uzly u, v v grafe nesúvisia, kladieme:

$$\sigma_G(u, v) = 0.$$

Tým je funkcia $\sigma_G(u, v)$ definovaná pre každú dvojicu $u, v \in U$.

2. O istej ekvivalencii medzi uzlami grafu

Nech k je ľubovoľné prirodzené číslo. Definujme si istý vzťah medzi uzlami u, v grafu G takto:

$$u \,(\overset{k}{=})\, v, \quad \text{alebo} \quad u \,(\overset{k}{\neq})\, v,$$

podľa toho, či $\sigma_0(u, v) \geqq k$ alebo $\sigma_0(u, v) < k$.

Ukážme, že vzťah medzi dvoma uzlami, pre ktorý sme prijali označenie $(\overset{k}{=})$, má vlastnosti ekvivalencie. Platí vždy $u\,(\overset{k}{=})\,u$ (reflexívnosť). Priamo z definície je zrejmé, že ak platí $u(\overset{k}{=})v$, platí aj $v(\overset{k}{=})u$ (symetričnosť). Dokážme napokon, že vzťah $(\overset{k}{=})$ je tranzitívny:

Nech u, v, w sú ľubovoľné tri uzly grafu G, k dané prirodzené číslo a nech platí: $u(\overset{k}{=})v$, $v(\overset{k}{=})w$. Ak zrušíme v G ľubovoľných $k-1$ hrán, vznikne graf G', v ktorom bude súvisieť uzol u s uzlom v a tiež uzol v s uzlom w. Potom však súvisia v grafe G' aj uzly u a w, teda platí $u(\overset{k}{=})w$, čiže vzťah $(\overset{k}{=})$ je aj tranzitívny.

3. Rozklady $U^{(k)}$ množiny uzlov grafu

Dokázali sme, že vzťah medzi dvoma uzlami grafu, pre ktorý sme prijali označenie $(\overset{k}{=})$, má všetky vlastnosti ekvivalencie. Možno preto jednoznačne rozdeliť množinu uzlov U grafu G na triedy ekvivalentných prvkov $U_1^{(k)}$, $U_2^{(k)}, \ldots, U_n^{(k)}$. Pre označenie rozkladu množiny uzlov U na triedy ekvivalentných prvkov (pri pevne zvolenom prirodzenom čísle k) použijeme znak $U^{(k)}$.

O rozkladoch $U^{(k)}$ platí táto veta:

Veta 1. *Nech $i < k$ sú dve prirodzené čísla, potom platí: rozklad $U^{(k)}$ je zjemnením rozkladu $U^{(i)}$.*

Dôkaz: Priamo z definície symbolu $(\overset{k}{=})$ vyplýva, že ak $i < k$ sú prirodzené čísla a platí $\sigma_0(u, v) \geqq k$, platí aj $\sigma_0(u, v) \geqq i$, t. j. ak platí $u(\overset{k}{=})v$, platí aj $u(\overset{i}{=})v$. Preto ak dva uzly u, v sú uzlami tej istej množiny rozkladu $U^{(k)}$, sú tiež uzlami tej istej množiny rozkladu $U^{(i)}$ čiže rozklad $U^{(k)}$ je zjemnením rozkladu $U^{(i)}$, čo bolo treba dokázať.

4. Množiny hrán $H(i, i+1)$ a niektoré ich vlastnosti

Nech i je prirodzené číslo. Označme znakom $H\,(i, i+1)$ množinu všetkých takých hrán grafu G, pri ktorých o dvojici uzlov, s ktorými je hrana incidentná, platí:

1. uzly patria k dvom rôznym množinám rozkladu $U^{(i+1)}$,
2. uzly patria do tej istej množiny rozkladu $U^{(i)}$.

O niektorých vlastnostiach množín hrán $H(i, i+1)$ hovoria nasledujúce vety:

Veta 2. *Nech i, j sú ľubovoľné dve prirodzené čísla $(i \neq j)$, potom množiny $H(i, i+1)$, $H(j, j+1)$ nemajú spoločného prvku.*

Dôkaz: Nech napríklad $i < j$. Predpokladajme oproti tvrdeniu vety, že existuje hrana h incidentná s uzlami u, v, ktorá je spoločným prvkom množín $H(i, i+1)$, $H(j, j+1)$, t. j. uzly u, v patria do dvoch rôznych množín rozkladu $U^{(i+1)}$ a patria do tej istej množiny rozkladu $U^{(j)}$. To je však spor, lebo je buď $i+1 = j$ a potom $U^{(i+1)} = U^{(j)}$, alebo je $i+1 < j$ a podľa vety 1 rozklad $U^{(j)}$ je zjemnením rozkladu $U^{(i+1)}$. Preto množiny $H(i, i+1)$, $H(j, j+1)$ nemôžu mať spoločný prvok. Ak $j > i$, potom obdobný postup vedie k tomu istému záveru.

Veta 3. *Hrana h je prvkom množiny $H(i, i+1)$ vtedy a len vtedy, keď o uzloch u, v, s ktorými je hrana h incidentná, platí $\sigma_0(u, v) = i$.*

Dôkaz: I. Dokážeme toto: ak je $h \in H(i, i+1)$, potom platí $\sigma_0(u, v) = i$. Z definície množiny $H(i, i+1)$ vyplýva, že u, v patria do tej istej množiny rozkladu $U^{(i)}$ a patria do dvoch rôznych množín rozkladu $U^{(i+1)}$. Je teda $u(\overset{i}{=})v$, avšak neplatí $u(\overset{i+1}{=})v$ čiže $\sigma_0(u, v) \geqq i$; $\sigma_0(u, v) < i + 1$, z čoho vyplýva $\sigma_0(u, v) = i$.

II. Dokážeme teraz, že zo vzťahu $\sigma_0(u, v) = i$ vyplýva $h \in H(i, i+1)$. Podľa predpokladu platí $u(\overset{i}{=})v$, neplatí však $u(\overset{i+1}{=})v$. Čiže uzly u, v patria do tej istej množiny rozkladu $U^{(i)}$ a patria do dvoch rôznych množín rozkladu $U^{(i+1)}$, preto $h \in H(i, i+1)$.

Veta 4. *Množina $H(1, 2)$ je množina práve tých hrán grafu G, ktoré nie sú hranami žiadnej kružnice v G.*

Dôkaz: A. Nech hrana h (incidentná s uzlami u, v) je ľubovoľná taká hrana grafu G, ktorá sa nevyskytuje v žiadnej kružnici v G. Uzly u, v patria do tej istej množiny rozkladu $U^{(1)}$, pretože je potrebné zrušiť najmenej jednu hranu (hranu h), aby vznikol graf, v ktorom by uzly u, v nesúviseli. Nech zrušením hrany h vznikne z grafu G graf G'. Ukážme, že v grafe G' uzly u, v nesúvisia. Ak by totiž existovala v G' cesta spojujúca uzly u, v, potom by hrany tejto cesty spolu s hranou h tvorili v grafe G kružnicu. To je spor s predpokladom, čiže uzly u, v v G' nesúvisia, preto platí $\sigma_0(u, v) = 1$ a podľa vety 3 potom platí $h \in H(1, 2)$.

B. Nech h je ľubovoľná hrana množiny $H(1, 2)$. Podľa vety 3 o uzloch u, v incidentných s touto hranou platí:

$$\sigma_0(u, v) = 1.$$

Stačí preto zrušiť jedinú hranu, a to zrejme hranu h, aby vznikol graf G', v ktorom uzly u, v nesúvisia. Preto hrana h nie je hranou žiadnej kružnice v grafe G.

Teda množina $H(1, 2)$ je množinou práve tých hrán grafu, ktoré sa nevyskytujú v žiadnej kružnici grafu, čo bolo treba dokázať.

Medzi hranami grafu zaveďme túto reláciu: hrana h_1 je v relácii s hranou h_2 (písané: $h_1 \sim h_2$) ak h_1 splýva s h_2, alebo ak každá kružnica v grafe G, ktorá obsahuje hranu h_1 obsahuje tiež hranu h_2. Je zrejmé, že táto relácia je reflexívna a tranzitívna. Že je tiež symetrická, vyplýva z tohto: Nech $h_1 \sim h_2$; $h_1 \neq h_2$ (pre $h_1 = h_2$ je zrejme $h_2 \sim h_1$). Predpokladajme, že existuje kružnica K_2 v G, ktorá obsahuje h_2, avšak neobsahuje h_1. Pretože je $h_1 \sim h_2$, existuje aspoň jedna kružnica K_1 v G taká, ktorá obsahuje h_1 a teda tiež h_2. Kompozícia K_3 kružníc K_1 a K_2 (t. j. množina všetkých hrán, ktoré sa vyskytujú práve v jednej z kružníc K_1, K_2 a množina uzlov, s ktorými sú tieto hrany incidentné) obsahuje hranu h_1, avšak neobsahuje hranu h_2. K_3 však obsahuje kružnicu K ako podmnožinu, ktorá obsahuje h_1 a neobsahuje h_2. To je spor. Teda je aj $h_2 \sim h_1$ a relácia $\sim$ je reláciou ekvivalencie. Všetky hrany grafu G sa rozpadajú do tried $T_1, T_2, \ldots, T_p$ ekvivalentných prvkov.

Platí táto veta:

Veta 5. *Množina $H(2, 3)$ je súčtom tých tried $T_i (i = 1, 2, \ldots, p)$, ktoré obsahujú najmenej dve hrany.*

Dôkaz: I. Nech $T_i = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ je ľubovoľná taká trieda, kde $n > 1$ a u, v uzly, s ktorými je incidentná hrana h_1. Každá cesta v grafe G, ktorá spojuje uzly u, v a neobsahuje hranu h_1, obsahuje všetky ostatné hrany triedy T_i, (lebo každá takáto cesta spolu s hranou h_1 tvorí kružnicu, ktorá obsahuje hranu h_1 a teda aj všetky hrany triedy T_i). Ak teda zrušíme v grafe G hranu h_1 a ešte jednu ľubovoľnú ďalšiu hranu z T_1, vznikne graf G', v ktorom uzly u, v nebudú súvisieť. Platí teda:

$$\sigma_G(u, v) = 2$$

a podľa vety 3 teda platí: $h_1 \in H(2, 3)$. Z obdobných úvah o ostatných hranách triedy T_i vyplýva: $T_i \subset H(2, 3)$.

II. Nech h je ľubovoľná hrana množiny $H(2, 3)$; u, v nech sú uzly, s ktorými je h incidentná. Podľa vety 3 je $\sigma_G(u, v) = 2$. Teda existujú také dve hrany $h_1 \neq h_2$, zrušením ktorých vznikne z grafu G graf G'', v ktorom uzly u, v nesúvisia. Jedna z hrán h_1, h_2 splýva s hranou h (ináč by uzly u, v v grafe G'' súviseli). Nech je teda napr. $h = h_1$. Označme znakom G' graf, ktorý vznikne z G zrušením hrany h. Cesta spojujúca uzly u, v v grafe G' existuje a nevyhnutne obsahuje hranu h_2. Teda v G existuje aspoň jedna kružnica, obsahujúca hranu h_1. Podľa predošlého každá takáto kružnica, obsahujúca hranu h_1, obsahuje aj hranu h_2. Čiže $h_1 \sim h_2$ a teda trieda T_j, v ktorej je hrana $h \in H(2, 3)$, obsahuje najmenej dva prvky. (Obdobne ak $h = h_2$).

Čiže $H(2, 3)$ obsahuje všetky hrany takých tried T_i, ktoré obsahujú najmenej dve hrany a $H(2, 3)$ obsahuje len takéto hrany, čo bolo treba dokázať.

5. Rozklad pravidelného grafu na lineárne faktory a množiny $H(i, i+1)$

Pod *pravidelným grafom n-tého stupňa* rozumieme taký graf, pri ktorom každý uzol je n-tého stupňa. Je známe, že pravidelný graf n-tého stupňa o m uzloch má $\frac{1}{2} mn$ hrán.

Čiastočný graf G' grafu G nazývame *faktorom k-tého stupňa grafu G*, ak každý uzol grafu G je incidentný práve s k hranami grafu G'. Faktor grafu je teda pravidelným grafom.

Je známe, že ak $G' = U' + H'$ je faktorom k-tého stupňa pravidelného grafu n-tého stupňa $G = U + H$ $(k < n)$, potom graf $G'' = U'' + H''$ (kde $U'' = U = U'$, $H'' = H - H'$) je faktorom $(n - k)$-tého stupňa grafu G.

Ak každá hrana grafu G je hranou práve jedného faktora systému $R = \{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$, hovoríme, že *R je rozklad grafu G na faktory*. Kompozícia dvoch faktorov $G_i, G_j (i \neq j; i, j = 1, 2, \ldots, m)$ systému je faktor grafu, pričom ak G_i je faktorom p-tého stupňa, G_j faktorom q-tého stupňa, potom ich kompozícia je faktorom $(p + q)$-tého stupňa.

Platia tieto vety:

Veta 6. *Nech v pravidelnom grafe n-tého stupňa G existuje rozklad $R = \{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ na n faktorov prvého stupňa $(n > 1)$, potom množina $H(1,2)$ je prázdna.*

Dôkaz: Predpokladajme, že množina $H(1,2)$ nie je prázdna. Nech $h \in H(1, 2)$ a nech h je hranou faktora L_i. Pretože $n > 1$, existuje okrem L_i ešte aspoň jeden faktor prvého stupňa $L_j \in R$. Kompozícia faktorov L_i, L_j je faktorom druhého stupňa grafu G. Je známe, že faktor druhého stupňa je systém kružníc. Teda h je hranou jednej z kružníc kompozície $L_i L_j$. To je spor, lebo množina $H(1, 2)$ podľa vety 4 je množinou tých hrán grafu, ktoré nie sú hranou žiadnej kružnice. Teda $H(1, 2)$ je prázdna množina, čo bolo treba dokázať.

Veta 7. *Nech v pravidelnom grafe n-tého stupňa existuje rozklad $R = \{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ na n faktorov prvého stupňa $(n > 2)$ a nech $T_i \subset H(2, 3)$ je ľubovoľná z tried ekvivalentných hrán, potom platí: všetky hrany triedy T_i sú hranami toho istého faktora rozkladu R.*

Dôkaz: Predpokladajme oproti tvrdeniu vety, že existujú v triede T_i hrany $h_1 \neq h_2$ také, že $h_1 \in L_a$, $h_2 \in L_b$, kde $a \neq b$; $a, b \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pretože podľa predpokladu $n > 2$ existuje v R faktor L_c, kde $a \neq c \neq b$. Kompozícia faktorov L_a, L_c je faktor druhého stupňa, teda systém kružníc. Nech K je tá kružnica kompozície $L_a \cdot L_c$, ktorá obsahuje hranu h_1. Táto kružnica neobsahuje však hranu h_2 (lebo je $h_2 \in L_b$ a každá hrana grafu je hranou práve jedného faktora rozkladu R). To je spor, lebo podľa predpokladu je $h_1 \sim h_2$. Čiže neexistujú dve hrany v T_i, ktoré by patrili k rôznym faktorom rozkladu R, čo bolo treba dokázať.

Veta 8. *Nech $G = U + H$ je pravidelný súvislý graf n-tého stupňa, kde n je párne číslo, potom o ľubovoľných dvoch uzloch grafu platí: $\sigma_G(u, v) \equiv 0 \pmod 2$.*

Dôkaz: Nech $u \neq v$ sú ľubovoľné dva uzly grafu G a nech platí:

$$\sigma_G(u, v) = k.$$

Pretože G je súvislý graf, je zrejme množina U jedinou triedou rozkladu $U^{(1)}$ a je zrejme $k > 0$. Existuje teda množina hrán H^* o k hranách taká, že zrušením všetkých hrán tejto množiny vznikne z grafu G graf $\bar{G}$, v ktorom uzly u, v nesúvisia; zatiaľ čo zrušením ľubovoľných $(k-1)$ hrán tejto množiny vznikol by opäť graf súvislý. Rozklad $\bar{U}^{(1)}$ v grafe $\bar{G}$ obsahuje teda práve dve množiny; označme ich $\bar{U}_1$, $\bar{U}_2$, pričom nech $u \in \bar{U}_1$, $v \in \bar{U}_2$. Je zrejmé, že každá z hrán množiny H^* je incidentná s jedným uzlom množiny $\bar{U}_1$ a s jedným uzlom množiny $\bar{U}_2$. Nech počet uzlov množiny $\bar{U}_1$ (resp. $\bar{U}_2$) je m_1 (resp. m_2). Spočítajme, koľko je takých hrán v množine $H - H^*$, ktoré sú incidentné s uzlami množiny $\bar{U}_1$. Označme znakom $s(u)$ stupeň uzla u v grafe $\bar{G}$.

Platí:

$$\sum_{u \in \bar{U}_1} s(u) = m_1 n - k.$$

Číslo $m_1 n$ udáva totiž súčet stupňov pri uzloch množiny $\bar{U}_1$, pred zrušením hrán množiny H^*, tento súčet bude v grafe $\bar{G}$ zrejme menší práve o k. Uvážme, že každá hrana v súčte stupňov je počítaná dvakrát, pretože každá hrana, ktorá je incidentná s jedným uzlom množiny $\bar{U}_1$, je incidentná ešte s jedným uzlom množiny $\bar{U}_1$; preto je:

$$m_1 n - k \equiv 0 \pmod 2)$$

a pretože je podľa predpokladu $n \equiv 0 \pmod 2$ je tiež $k \equiv 0 \pmod 2$, čo bolo treba dokázať.

Priamym dôsledkom vety 3 a vety 8 je veta 9:

Veta 9. *Nech G je pravidelný súvislý graf párneho stupňa, potom pre všetky prirodzené čísla i platí: $H(2i-1, 2i) = 0$.*

Dôkaz: Nech h je ľubovoľná hrana grafu G a nech $u \neq v$ sú uzly incidentné s touto hranou. Podľa vety 8 platí $\sigma_G(u, v) = 2p$ (kde p je prirodzené číslo) a podľa vety 3 z toho vyplýva:

$$h \in H(2p, 2p+1)$$

čiže množiny $H(2i-1, 2i)$ sú nevyhnutne prázdne pre všetky $i = 1, 2, \ldots$, čo bolo treba dokázať.

Veta 10. *Nech G je pravidelný súvislý graf n-tého stupňa, v ktorom existuje rozklad $R = \{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ na faktory prvého stupňa a nech $\{U_1, U_2\}$ je ľubovoľný rozklad množiny uzlov grafu na dve množiny. Ďalej nech H^* je množina tých hrán grafu G, ktoré sú incidentné práve s jedným uzlom množiny $U_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ a l_i nech je počet hrán množiny H^*, ktoré sú hranami faktora $L_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. Potom platí:*

$$l_1 \equiv l_2 \equiv \ldots \equiv l_n \pmod 2.$$

Dôkaz: Znakom $H(u_i)$ označme množinu hrán incidentných s uzlom $u_i (i = 1, 2, \ldots, m)$. Kompozíciou všetkých množín $H(u_i)$, kde $u_i \in U_1$ (pričom pod kompozíciou budeme rozumieť opäť množinu tých prvkov, ktoré sa v množinách $H(u_1), H(u_2), \ldots, H(u_m)$ vyskytujú nepárny počet krát) je práve množina H^*. Každá z množín $H(u_i)$ obsahuje po jednej hrane z každého faktora $L_j (j = 1, 2, \ldots, n)$. Teda hrany ľubovoľného faktora sa v množinách $H(u_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ vyskytujú spolu m-krát. Niektoré z hrán faktora L_j môžu sa v týchto množinách vyskytovať dvakrát. Tieto hrany nebudú sa vyskytovať v kompozícii H^*, preto platí:

$$l_j \equiv m \pmod 2.$$

To však platí pre všetky $j = 1, 2, \ldots, m$ čiže je: $l_1 \equiv l_2 \equiv \ldots \equiv l_n \equiv m \pmod 2$, čo bolo treba dokázať.

Veta 11. *Nech G je pravidelný súvislý graf n-tého stupňa, kde $n \equiv 1 \pmod 2$, v ktorom existuje rozklad $R = \{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ na faktory prvého stupňa, potom o ľubovoľných dvoch uzloch $u \neq v$ grafu buď platí $\sigma_G(u, v) \equiv 0 \pmod 2$ alebo $\sigma_G(u, v) = n$.*

Dôkaz: Nech $u \neq v$ sú ľubovoľné dva uzly grafu G a nech

$$\sigma_G(u, v) = k.$$

Vzhľadom na to, že G je pravidelný graf n-tého stupňa, nemôže byť $k > n$ (stačí totiž zrušiť napr. všetky hrany incidentné s uzlom u — takýchto hrán je spolu n — a v takto vzniknutom grafe u nesúvisí so žiadnym uzlom).

Predpokladajme proti tvrdeniu vety, že k je číslo nepárne a menšie ako n. Existuje teda množina hrán H^* o k prvkoch taká, že zrušením hrán tejto množiny vznikne z grafu G graf G', v ktorom uzly u, v nesúvisia. Nech $U_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ je množina všetkých tých uzlov, s ktorými uzol u súvisí v grafe G' a nech U_2 je množina všetkých ostatných uzlov grafu. Je $u \in U_1$, $v \in U_2$. Pretože zrušením ľubovoľných $k-1$ hrán z množiny H^* vznikne graf, v ktorom uzly u, v súvisia, je nevyhnutne H^* práve množinou všetkých tých hrán, ktoré sú incidentné s jedným uzlom množiny U_1 a s jedným uzlom množiny U_2. Teda o počte l_i hrán v množine H^*, ktoré sú hranami faktora L_i, platí podľa vety 10:

$$l_1 \equiv l_2 \equiv \ldots \equiv l_n \pmod 2.$$

Pretože podľa predpokladu je $k < n$, musí existovať aspoň jeden index $i (i = 1, 2, \ldots n)$ taký, že $l_i = 0$. To však znamená, že všetky čísla l_i sú párne a teda ich súčet $\sum_{i=1}^{n} l_i = k$ je číslo párne. To je spor. Platí preto: buď $k \equiv 0 \pmod 2$ alebo je $k = n$, čo bolo treba dokázať.

Priamym dôsledkom viet 3, 9 a 11 je veta 12.

Veta 12. *Nech G je pravidelný súvislý graf n-tého stupňa, v ktorom existuje rozklad $R = \{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ na lineárne faktory, potom ľubovoľná hrana grafu je buď hranou množiny $H(n, n+1)$, alebo je hranou niektorej z množín $H(2i, 2i+1)$, kde $i = 1, 2 \ldots$.*

Došlo 17. IV. 1954,
v zmenenom znení 11. III. 1955.