O METRICKÝCH SVÄZOCH

JÁN JAKUBÍK, Košice

Normou na sväze S nazývame reálnu funkciu $v(x)$, definovanú na S, pre ktorú platí:

$$v(x) + v(y) = v(x \cap y) + v(x \cup y) \tag{M 1}$$

$$x > y \Rightarrow v(x) > v(y) \tag{M 2}$$

(pozri [1], [2]). Sväz S s normou $v(x)$ nazývame normovaným alebo metrickým sväzom a označujeme ho $S(v)$. Názov „metrický“ sa odôvodňuje takto: ak nazveme výraz

$$\partial(x,y = v(x \cup y) - v(x \cap y) \tag{1}$$

vzdialenosťou prvkov x,y, pre $\partial(x,y)$ sú zrejme splnené známe požiadavky, kladené na vzdialenosť v metrických priestoroch.

Pre stručnosť vyjadrovania zavedieme tieto označenia: množinu všetkých prvkov sväzu S (metrického priestoru M) označme $|S|$ ($|M|$), metrický priestor, definovaný rovnicou (1) na $|S|$, označme $M(S(v))$.

Nech je daný metrický priestor M_1. V. Glivenko ([3], [4]) vyšetroval otázku, kedy existuje metrický sväz $S(v)$ tak, že platí:

$$|S| = |M_1|, \quad M(S(v)) = M_1, \tag{2}$$

a to za predpokladu $v(x) \geq 0$ pre každý prvok $x \in S$. Všeobecnejšie, bez predpokladu $v(x) \geq 0$ vyšetroval spomínanú otázku L. M. Kelly v práci [2]. Odvodil nevyhnutnú podmienku, ktorú musí spĺňať metrický priestor M_1, aby k nemu existoval metrický sväz $S(v)$, vyhovujúci rovniciam (2). Ďalej, za predpokladu, že metrický priestor M_1 vyhovuje spomínanej nevyhnutnej podmienke, vykonal konštrukciu normovaného sväzu $S(v)$, vyhovujúceho rovniciam (2).

V poslednom paragrafe práce [2] Kelly poznamenáva, že metrický priestor M_1 neurčuje jednoznačne príslušný sväz $S(v)$ a kladie otázku („the general program of which this section is a begining“) vyšetriť, do akej miery metrický priestor M_1 určuje sväzové vlastnosti všetkých sväzov $S(v)$, pre ktoré platia rovnice (2). Otázka je odôvodnená po prvé tým, že jednotlivé kroky pri jeho konštrukcii sväzu $S(v)$ sú nie jednoznačne určené a za druhé tým, že je nie zrejmé, či nejakou inou konštrukciou nedostaneme sväz $S'(v')$, ktorý tiež vyhovuje rovniciam (2) a ktorý sa pritom „podstatne“ líši od zostrojeného sväzu

$S(v)$. Z Kellyho konštrukcie priamo nevyplýva, aké vzťahy platia medzi (sväzovými) vlastnosťami sväzov $S(v)$, $S'(v')$.

Všade ďalej M_1 značí metrický priestor, pre ktorý je splnená spomínaná Kellyho podmienka; $S(v)$ je normovaný sväz, vyhovujúci rovniciam (2), zostrojený pomocou Kellyho konštrukcie; $\mathfrak{M} = \{S'(v')\}$ je množina všetkých normovaných sväzov $S'(v')$, vyhovujúcich rovniciam (2).

Otázka, ktorú položil L. M. Kelly, v tejto poznámke sa rieši takto: dokážeme, že metrickým priestorom M_1 je sväz $S(v)$ určený jednoznačne až na duálnosť niektorého svojho priameho faktora. Podrobnejšie povedané, platí:

Veta 1. *Nevyhnutná a postačujúca podmienka, aby sväz S' patril do množiny $\mathfrak{M}$, je: $|S'| = |S|$ a existujú sväzy A, B tak, že*

$$S \sim A \times B, \quad S' \sim \tilde{A} \times B,$$

kde $\tilde{A}$ je duálny sväz ku sväzu A a zobrazenie množiny $|S|$ na množinu $|A \times B| = |\tilde{A} \times B|$ je v obidvoch uvedených izomofizmoch to isté.

Dôkaz vyplýva z nasledujúcich lemm 1, 2, 3.

Poznámka: Nech S je ľubovoľný sväz, $S \sim A \times B$. Označme $R_1(R_2)$ vytvorujúci rozklad na S, v ktorom $x \equiv y(R_1)$ ($x \equiv y(R_2)$) vtedy a len vtedy, keď komponenty prvkov x,y v priamom faktore $B(A)$ sú rovnaké. Nech $\bar{z}^1(\bar{z}^2)$ je trieda vytvorujúceho rozkladu $R_1(R_2)$, obsahujúca prvok z. Nech x_0 je pevný prvok sväzu S, označme $A(x_0)$, $B(x_0)$ množinu všetkých prvkov sväzu S, ktorých komponenty vo faktore $B(A)$ sú rovnaké ako komponenty prvku x_0 vo faktore $B(A)$. Ľahko sa preverí, že platí:

$$S \sim A(x_0) \times B(x_0), \tag{3}$$

pričom, ak v priamom rozklade (3) prvok $z \in S$ má komponenty a, b, potom:

$$\{a\} = A(x_0) \cap \bar{z}^2, \; \{b\} = B(x_0) \cap \bar{z}^1 \tag{4}$$

a ak $x_0 \leq a$, $x_0 \leq b$, platí $z = a \cup b$.

Lemma 1. *Ak prvok $z \in S(v)$ má v priamom rozklade $S \sim A(x) \times B(x)$ komponenty a, b, potom $v(z) = v(a) + v(b) - v(x)$.*

Dôkaz. Zvoľme si prvok $y \in S$, $y \leq x \cap a \cap b$. Nech v priamom rozklade

$$S \sim A(y) \times B(y) \tag{5}$$

platí $a \to (a_1, b_1)$, $b \to (a_2, b_2)$. Podľa (4) je potom v priamom rozklade (5)

$$z \to (a_1, b_2), \quad x \to (a_2, b_1) \tag{6}$$

a zároveň platí $a = a_1 \cup b_1$, $b = a_2 \cup b_2$, $z = a_1 \cup b_2$, $x = a_2 \cup b_1$, $a_i \cap b_k = y (i, k = 1, 2)$. Použitím rovnice (M1) dostávame $v(z) = v(a_1) + v(b_2) - v(y)$, $v(a) + v(b) - v(x) = (v(a_1) + v(b_1) - v(y)) + (v(a_2) + v(b_2) - v(y)) - (v(a_2) + v(b_1) - v(y)) = v(z)$.

Lemma 2. *Nech znaky z, a, b majú význam ako v lemme 1. Nech $v(z) = v(a) + v(b) - v(x)$ je norma na sväze $S \sim A(x) \times B(x)$. Potom funkcia $v'(z) = -v(a) + v(b) - v(x)$ je normou na sväze $S' \sim \tilde{A}(x) \times B(x)$ ($|S'| = |S|$) a platí $M(S(v)) = M(S'(v'))$.*

Dôkaz je jednoduchý. Pozri tiež [1], str. 117, cvič. 4.

Lemma 3. *Nech $M(S(v)) = M(S'(v'))$, $|S| = |S'|$. Potom existujú sväzy A, B také, že platí $S \sim A \times B$, $S' \sim \tilde{A} \times B$.*

Dôkaz. Budeme hovoriť, že prvok y leží medzi prvkami x, z, ak $x \cap z \leq y \leq x \cup z$. V metrickom sväze prvok y leží medzi prvkami x, z vtedy a len vtedy, keď platí:

$$\partial(x, y) + \partial(y, z) = \partial(x, z) \tag{7}$$

(pozri [5], resp. [1], str. 120). Pri prechode od sväzu $S(v)$ ku sväzu $S'(v')$ sa zachováva metrika, teda podľa rovnice (7) sa zachováva tiež vzťah „medzi". Podľa [6] potom platí:

$$S \sim A \times B, \quad S' \sim \tilde{A} \times B.$$

Pritom zobrazenie množiny $|S|$ na množinu $|A \times B| = |\tilde{A} \times B|$ je v obidvoch izomorfizmoch to isté.

Veta 2. *Nech sa sväz S dá rozložiť na priamy súčin $S \sim \Pi S_i$ ($i \in N$) nerozložiteľných faktorov, nech $S(v)$ je normovaný sväz. Nevyhnutná a postačujúca podmienka, aby každý sväz $S'(v')$, pre ktorý platí:*

$$|S'| = |S|, \quad M(S'(v')) = M(S(v)) \tag{8}$$

bol izomorfný so sväzom S, je: každý nerozložiteľný priamy faktor S_i ($i \in N$) sväzu S je samoduálny.

Dôkaz a). Nech sú splnené rovnice (8), nech každý faktor S_i ($i \in N$) je samoduálny. Podľa vety 1 platí $S \sim A \times B$, $S' \sim \tilde{A} \times B$. Pritom $A \sim \Pi A_i$ ($i \in N_1$), $N_1 \subset N$, teda $\tilde{A} \sim A$, $S' \sim S$.

b) Predpokladajme, že nerozložiteľný priamy faktor S_0 sväzu S je nie samoduálny. Nech $A = \Pi S_i$ ($i \in N_1$) je priamy súčin všetkých faktorov S_i, pre ktoré je $S_i \sim S_0$. Podľa predpokladu vety platí $S \sim A \times B$ pre vhodný sväz B; žiadny nerozložiteľný priamy faktor sväzu B je nie izomorfný so sväzom S_0. Na množine $|S|$ môžeme definovať sväz S', izomorfný so sväzom $\tilde{A} \times B$. Podľa lemmy 2 platí $M(S(v)) = M(S'(v'))$[1]. Ak by sväzy S, S' boli izomorfné, musel by sväz $S' \sim \tilde{A} \times B$ mať priamy faktor izomorfný so sväzom S_0, čo však podľa predošlého nie je možné. Teda sväzy S, S' sú nie izomorfné.

Došlo 1. IV. 1955.

[1] pre vhodnú normu v' na S'.

LITERATÚRA

1. G. Birkhoff: Lattice theory, New York, 1948 (Teorija struktur, Moskva, 1952). 2. L. M. Kelly: The geometry of normed lattices, Duke Math. J. 19 (1952), 661—669. 3. V. Glivenko: Géométrie des systèmes de choses normées, Amer. Journal of Math. 58 (1936), 799—828. 4. V. Glivenko: Contribution a l'étude des systèmes de choses normées, Amer. Journal of Math. 59(1937), 941-956. 5. E. Pitcher — M. F. Smiley: Transitivities of betweeness, Trans. of the Amer. Math. Soc. 52 (1942), 95—114. 6. M. Kolibiar: K vztahom „medzi" vo sväzoch, Matem.-fyz. časopis SAV, V, 1955.

О МЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

ЯН ЯКУБИК, Кошице

Выводы

Под оценкой на структуре S понимается вещественная функция $v(x)$, определенная на S, которая удовлетворяет условиям ($M1$) и ($M2$). Структуру S с оценкой $v(x)$ мы называем метрической структурой и обозначим $S(v)$. Соответствующая метрика (x,y) определена равенством (1). Множество всех элементов структуры S (метрического пространства M) обозначим $|S|$ ($|M|$). Пусть дано метрическое пространство M_1. В. Гливенко (см. [3], [4]) исследовал вопрос, когда существует метрическая структура $S(v)$, удовлетворяющая уравнениям (2), с предположением, что $v(x) \geqq 0$ для каждого $x \in S$. Более обще, без предположения $v(x) \geqq 0$, исследовал этот вопрос А. М. Кели в работе [2]. Он нашел необходимое условие, которому должно удовлетворять метрическое пространство M_1, для того, чтобы существовала структура $S(v)$, исполняющая уравнения (2). Далее, предполагая что M_1 удовлетворяет необходимому условию, он дает конструкцию структуры $S(v)$, которая удовлетворяет уравнениям (2). В последнем параграфе цитированной работы Кели замечает, что метрическое пространство M_1 не определяет однозначно соответствующую структуру $S(v)$ и ставит вопрос, в какой степени метрическое пространство M_1 определяет структурные свойства всех структур $S(v)$, для которых имеют место уравнения (2).

В нашей заметке этот вопрос решается следующим способом: доказывается, что метрическое пространство M_1 определяет соответствующую структуру $S(v)$ однозначно исключая только дуальность некоторого прямого сомножителя. Более подробно: Пусть M_1 удовлетворяет упомянутому необходимому условию, пусть $S(v)$ — структура, построенная с помощью конструкции Кели, пусть $\mathfrak{M}$—множество всех структур, для которых имеют место уравнения (2).

Необходимое и достаточное условие для того, чтобы структура S, была элементом множества $\mathfrak{M}$, следующее: $|S'| = |S|$ и существуют структуры A, B такие, что $S \sim A \times B$, $S \sim \tilde{A} \times B$, где $\tilde{A}$ — структура, дуальная к структуре A. (При этом отображение множества $|S|$ на множество $|A \times B| = |\tilde{A} \times B|$ в рассматриваемых изоморфизмах то же самое).