O ZAMENITEĽNÝCH RELÁCIACH

MILAN KOLIBIAR, Bratislava

Ak M je množina, $\theta, \theta', \theta''$ budú značiť binárne relácie na M, a, b sú v ďalšom všade prvky množiny M. Pojmy súčin relácií, čiastočné usporiadanie relácií, sväzové operácie s reláciami používame v obvyklom význame. $\theta \leqq \theta'$ teda značí, že $a\,\theta\,b$ implikuje $a\,\theta'\,b$; $a(\theta \cap \theta')\,b$ vtedy a len vtedy, keď $a\,\theta\,b$, $a\,\theta'\,b$; $a\,(\theta \cup \theta')\,b$ vtedy a len vtedy, keď platí aspoň jeden zo vzťahov $a\theta b$, $a\theta' b$; $a\theta\theta' b$ platí vtedy a len vtedy, keď existuje prvok $x \in M$, pre ktorý je $a\theta x$, $x\theta' b$. Ak $a\theta b$ implikuje $b\theta a$, hovoríme, že relácia θ je symetrická. Ak $\theta\theta' = \theta'\theta$, hovoríme, že relácie θ, θ' sú zameniteľné.

1. V knihe [1] Birkhoff dokazuje vetu (kap. VI, teoréma 2): *Normálna kongruencia na lupe je zameniteľná s každou kongruenciou.* Pritom sa kongruencia θ nazýva *normálnou*, ak [namiesto $a\theta b$ píšeme $a \equiv b(\theta)$]

$$ux \equiv x(\theta) \quad \text{implikuje} \quad u \equiv 1(\theta) \tag{1}$$

a

$$xu \equiv x(\theta) \quad \text{implikuje} \quad u \equiv 1(\theta). \tag{2}$$

Dôkaz spomenutej vety uvedený v [1] spočíva v tom, že použitím (1) sa dokáže: Ak θ je normálna a θ' ľubovoľná kongruencia na lupe, je $\theta\theta' \leqq \theta'\theta$; podobne použitím (2) sa dokáže $\theta'\theta \leqq \theta\theta'$. V probléme 32 [1] Birkhoff kladie otázku, či k dôkazu rovnosti $\theta\theta' = \theta'\theta$ nestačí vlastnosť (1).

Ľahko sa ukáže, že ak pre kongruencie θ, θ' platí $\theta\theta' \leqq \theta'\theta$, platí $\theta\theta' = \theta'\theta$, t. j. kongruencie θ, θ' sú zameniteľné. Spomínanú vetu možno teda zovšeobecniť takto:

Veta. *Kongruencia θ na lupe, ktorá má vlastnosť (1), je zameniteľná s každou kongruenciou.*

Tým je daná *kladná odpoveď* na Birkhoffov problém.* Okrem toho ukážeme, že k platnosti implikácie $\theta\theta' \leqq \theta'\theta \Rightarrow \theta\theta' = \theta'\theta$ nie je potrebné predpokladať, že relácie θ, θ' sú ekvivalencie (t. j. reflexívne, symetrické a tranzitívne relácie), ale stačí, aby relácie θ, θ' boli symetrické (pozri 3.5).

* Poznámka pri korektúre: Autor sa medzi časom dozvedel, že spomínaný problém je riešený v práci: G. Trevisan, Construzzione di quasigruppi con relazzioni di congruenza non permutabili. Rend. Sem. Univ. Padova 22 (1953), 11—22. Nasledujúce úvahy sa však týkajú nielen kongruencií, ale ľubovoľných binárnych (v odst. 3 symetrických) relácií.

2. V tomto odseku značia θ, θ', θ'' ľubovoľné (nie nevyhnutne symetrické) relácie.

2.1. *Násobenie relácií je asociatívne, t. j.* $(\theta\theta')\theta'' = \theta(\theta'\theta'')$.

Dôkaz. Obidva vzťahy $a(\theta[\theta'\theta''])b$, $a([\theta\theta']\theta'')b$ značia, že existujú prvky $x, y \in M$, pre ktoré platí $a\theta x$, $x\theta' y$, $y\theta'' b$.

2.2. $\theta' \leqq \theta''$ *implikuje* $\theta\theta' \leqq \theta\theta''$, $\theta'\theta \leqq \theta''\theta$.

Dôkaz. Nech $a\theta\theta' b$. Potom pre určitý prvok $x \in M$ platí $a\theta x$, $x\theta' b$. Pretože $\theta' \leqq \theta''$, platí aj $x\theta'' b$, takže $a\theta\theta'' b$. Podobne dokážeme druhý vzťah.

2.3. *Platí* $\theta(\theta' \cup \theta'') = (\theta\theta') \cup (\theta\theta'')$, $(\theta' \cup \theta'')\theta = (\theta'\theta) \cup (\theta''\theta)$.

Dokážeme prvú rovnosť (druhá sa dokáže podobne).

a) Nech $a(\theta[\theta' \cup \theta''])b$. Potom pre istý prvok $x \in M$ platí $a\theta x$, $x(\theta' \cup \theta'')b$. Nastáva teda aspoň jeden z prípadov $a\theta x$, $x\theta' b$ a $a\theta x$, $x\theta'' b$, t. j. aspoň jeden z prípadov $a\theta\theta' b$, $a\theta\theta'' b$, takže platí $a(\theta\theta' \cup \theta\theta'')b$. Teda $\theta(\theta' \cup \theta'') \leqq \theta\theta' \cup \theta\theta''$.

b) Pretože $\theta' \leqq \theta' \cup \theta''$, $\theta'' \leqq \theta' \cup \theta''$, podľa 2.2 je $\theta\theta' \leqq \theta(\theta' \cup \theta'')$, $\theta\theta'' \leqq \theta(\theta' \cup \theta'')$, teda aj $\theta\theta' \cup \theta\theta'' \leqq \theta(\theta' \cup \theta'')$.

Poznámka. Podobne sa ľahko ukáže, že platí $\theta(\theta' \cap \theta'') \leqq (\theta\theta') \cap (\theta\theta'')$, $(\theta' \cap \theta'')\theta \leqq (\theta'\theta) \cap (\theta''\theta)$. Nemusí však platiť $\theta(\theta' \cap \theta'') = \theta\theta' \cap \theta\theta''$, ako ukazuje príklad:

$\theta, \theta', \theta''$ sú ekvivalencie na množine $\{1, 2, 3\}$, dané rozkladmi, ktorých triedy sú po rade: $\{1\}, \{2,3\}$ (θ); $\{1,2\}, \{3\}$ (θ'); $\{1,3\}, \{2\}$ (θ''). Platí $2(\theta\theta' \cap \theta\theta'')1$, avšak neplatí $2(\theta[\theta' \cap \theta''])1$.

2.4. *Ak relácia θ je zameniteľná s reláciami θ', θ'', je zameniteľná aj so súčinom $\theta'\theta''$.*

Tvrdenie vyplýva bezprostredne z 2.1.

2.5. *Ak relácia θ je zameniteľná s reláciami θ', θ'', je zameniteľná aj s reláciou $\theta' \cup \theta''$.*

Tvrdenie vyplýva bezprostredne z 2.3.

Poznámka. Pre prenik $\theta' \cap \theta''$ neplatí podobné tvrdenie, ako ukazuje príklad: θ, θ' θ'' sú ekvivalencie na množine $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ dané rozkladmi, ktorých triedy sú po rade: $\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}$ (θ); $\{1, 5\}, \{2, 3, 4\}$ (θ'); $\{1, 2, 5\}, \{3, 4\}$ (θ''). $\theta' \cap \theta''$ je ekvivalencia, daná rozkladom $\{1, 5\}, \{2\}, \{3, 4\}$. Platí $\theta\theta' = \theta'\theta$, $\theta\theta'' = \theta''\theta$, avšak $\theta(\theta' \cap \theta'') \neq (\theta' \cap \theta'')\theta$, pretože $2(\theta[\theta' \cap \theta''])4$, avšak neplatí $2([\theta' \cap \theta'']\theta)4$.

2.6. Ak uvažujeme len reflexívne, symetrické a tranzitívne relácie, t. j. ekvivalencie, pre zameniteľnosť týchto relácií platí rad ďalších vlastností (pozri napr. [2], [3], [4]), ktoré neplatia všetky pre ľubovoľné relácie. Pritom sa pre ekvivalencie θ, θ' definuje $\theta \cup \theta'$ inak ako tu (tak, aby relácia $\theta \cup \theta'$ bola ekvivalenciou). Napríklad ekvivalencie θ, θ', pre ktoré platí $\theta \leqq \theta'$, sú zameniteľné. To však neplatí napríklad pre relácie θ, θ' definované na množine $\{1, 2, 3\}$ takto: $1\,\theta\,1, 1\,\theta\,2, 2\,\theta\,1, 2\,\theta\,3, 3\,\theta\,2$; $1\,\theta'\,2, 2\,\theta'\,1, 3\,\theta'\,2$. Plat $\theta' \leqq \theta$, avšak $\theta\theta' \neq \theta'\theta$, lebo $1\,\theta\theta'\,2$, ale neplatí $1\,\theta'\theta\,2$.

3. V celom tomto odseku θ, θ' značia symetrické relácie.

3.1. *$a\,\theta\theta'\,b$ platí vtedy a len vtedy, keď $b\,\theta'\theta\,a$.*

Dôkaz. Nech $a\theta\theta' b$. Potom pre určitý prvok $x \in M$ platí $a\theta x$, $x\theta' b$. Pretože relácie θ, θ' sú symetrické, je $b\theta' x$, $x\theta a$, t. j. $b\theta'\theta a$. Obrátená implikácia sa dokáže podobne.

3.2. *Relácie $\theta\theta'$, $\theta'\theta$ súčasne sú alebo nie sú symetrické.*

Dôkaz. Nech relácia $\theta\theta'$ je symetrická. Potom vzhľadom na 3.1 platí $a\theta'\theta b \Rightarrow b\,\theta\theta' a \Rightarrow a\,\theta\theta'\,b \Rightarrow b\,\theta'\theta\,a$, t. j. relácia $\theta'\theta$ je symetrická. Rovnako sa dokáže obrátená implikácia.

3.3. *$\theta\theta' = \theta'\theta$ platí vtedy a len vtedy, keď relácia $\theta\theta'$ je symetrická.*

Dôkaz.

a) Nech $\theta\theta' = \theta'\theta$. Vzhľadom na 3.1 potom platí $a\theta\theta' b \Rightarrow a\theta'\theta b \Rightarrow b\theta\theta' a$. Teda relácia $\theta\theta'$ je symetrická.

b) Nech relácia $\theta\theta'$ je symetrická. Potom vzhľadom na 3.1 platí $a\,\theta\theta'\,b \Leftrightarrow b\,\theta\theta'\,a \Leftrightarrow a\,\theta'\theta\,b$, teda $\theta\theta' = \theta'\theta$.

3.4. *Ak $\theta\theta' \leqq \theta'\theta$, relácia $\theta\theta'$ je symetrická.*

Dôkaz. Vzhľadom na predpoklad a 3.1 platí $a\,\theta\theta'\,b \Rightarrow a\,\theta'\theta\,b \Rightarrow b\,\theta\theta'\,a$.

3.5. *Ak $\theta\theta' \leqq \theta'\theta$, je $\theta\theta' = \theta'\theta$.* Tvrdenie vyplýva z 3.4 a 3.3.

Došlo 15. XI. 1954.

LITERATÚRA

1. G. Birkhoff, *Lattice theory*, New York, 1948 (ruský preklad, Moskva 1952). 2. O. Borůvka, *O rozkladech množin.* Rozpravy II. třídy České akademie **53** (1943), 23. 3. O. Ore, *Theory of equivalence relations*, Duke Jour. **9** (1942), 573—627. 4. P. Dubreil, M. L. Dubreil—Jacotin, *Théorie algèbrique des relations d'equivalence*, Jour. de Math. **18** (1939), 63—96.

О ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ОТНОШЕНИЯХ

М. КОЛИБЯР, Братислава

Выводы

В настоящей статье обращается внимание на это, что ответ на проблему 32 Биркгофа [1] положителен, так как для отношений эквивалентности θ, θ' (i) из $\theta\theta' \leqq \theta'\theta$ следует $\theta\theta' = \theta'\theta$. Следовательно, в теореме 2 гл. VI книги [1] Биркгофа можно условие нормальности заменить более слабым условием: $ux \equiv x$ (θ) влечет за собой $u \equiv 1$ (θ).

Показывается, что утверждение (i) верно вообще для симметрических бинарных отношений. Даны некоторые простые свойства бинарных отношений в связи с свойством перестановочности отношений, как например: Для любых бинарных отношений на фиксированном множестве справедливо утверждение: Если отношение θ перестановочно с отношениями θ', θ'', то оно перестановочно с отношениями $\theta' \cup \theta''$, $\theta'\theta''$. Симметрические отношения θ, θ' перестановочны тогда и только тогда, когда отношение $\theta\theta'$ симметрично.